Der Dialog zwischen Mathematik und Philosophie in Vergangenheit und Gegenwart[1]

Knut Radbruch (Kaiserslautern)

In einem Beitrag zu Platons Philosophie des Abstiegs schreibt C.F. v. Weizsäcker, er sei „überzeugt, daß die griechische Philosophie, dieses in allen Weltkulturen einzigartige Kunstwerk, ohne das mathematische Paradigma undenkbar gewesen wäre“[2]. Und in seiner berühmten Kant-Vorlesung im WS 1935/36 erklärte M. Heidegger, es sei „kein Zufall, daß die *Kritik der reinen Vernunft*... ständig von einer Besinnung auf das Wesen des Mathematischen und der Mathematik begleitet sei“[3]. Was hier über Platon und Kant gesagt wird, trifft auf fast alle abendländischen Philosophen von Rang zu: Explizit oder implizit spielt die Mathematik eine entscheidende Rolle für die neue philosophische Konzeption. Welche Gründe sind es, die der Mathematik einen so hohen Stellenwert im Denken der maßgebenden Philosophen sichern? Mit welchen Intentionen und Zielvorstellungen montieren Philosophen seit Platon bis Heidegger, seit Aristoteles bis Bloch immer wieder Aussagen über Mathematik in ihre Philosophie? Weshalb war in den vergangenen zweieinhalb Jahrtausenden keine andere Wissenschaft für die Philosophie so »frag-würdig« wie die Mathematik? Die Philosophie hat – dies ist offensichtlich – den Dialog mit der Mathematik immer wieder gesucht.

Und wie steht es um das Interesse der Mathematik an einem Dialog mit der Philosophie? In einem äußerst gehaltvollen und auch heute noch sehr lesenswerten Aufsatz *Mathematik und Antike* stellt der Mathematiker O. Toeplitz 1925 die Frage, „ob einmal im Dasein der Mathematik die Philosophie bestimmend in sie eingegriffen hat, ihre eigentliche definitive Gestalt gebildet hat“[4]? Eine derartige Initiative aus der Mathematik heraus zum Dialog mit der Philosophie ist kein Einzelfall. Cantor, Hilbert, Weyl, Gödel und Robinson – um nur einige Repräsentanten der neueren Mathematik in Erinnerung zu rufen – haben sich immer wieder um Kontakte mit der Philosophie bemüht.

---

[1] Überarbeitete Fassung eines Vortrags, der am 3.6.1998 im Kepler-Kolloquium an der Universität Linz gehalten wurde

[2] v.Weizsäcker: Zeit und Wissen, S.1085

[3] Heidegger: Die Frage nach dem Ding, S.95

[4] Toeplitz: Mathematik und Antike, S.202

Bevor nun einige Passagen dieses Dialogs zwischen Mathematik und Philosophie geschildert werden, sei auf die Besonderheit hingewiesen, dass dieser Dialog keineswegs nur zwischen gleichaltrigen Gesprächspartnern stattfindet. So führen z.B. zahlreiche Mathematiker unseres Jahrhunderts einen virtuellen Dialog mit Platon und/oder Kant, Kant selbst wählte Thales als Dialogpartner und Weyl entdeckte geistige Verwandtschaft mit Nikolaus von Kues.

Natürlich können in diesem Beitrag nur Ausschnitte des nun schon seit mehr als zweitausend Jahren geführten Dialogs thematisiert werden. Die Anteile von Aristoteles, Augustin, Descartes, Leibniz und Husserl an diesem Dialog wird man ebenso vermissen wie die Argumente von Cauchy, Kronecker, Jacobi, Dedekind und Frege – um nur einige Philosophen und Mathematiker zu nennen, die engagiert am Dialog teilgenommen haben.

1. Platon

Wir wissen heute, dass es eine bemerkenswert ausgereifte und höchst leistungsfähige vorgriechische Mathematik gegeben hat. Dort wird ein Balken gegebener Länge schräg an eine Hauswand gestellt und es wird verraten, wie hoch die Spitze des Balkens an der Wand postiert ist; daraufhin wird errechnet, wie weit der Fußpunkt des Balkens von der Wand entfernt ist. Die Berechnung erfolgt genau so, wie wir sie heute ausführen würden, nämlich durch Rückgriff auf den Satz des Pythagoras. Allerdings stand der Balken an der Wand tausend Jahre bevor Pythagoras geboren wurde. In einer anderen Aufgabe aus diesen frühen Zeiten ist der Durchmesser eines runden Getreidefeldes gegeben und es wird dann der Flächeninhalt des Feldes bestimmt. Diese Berechnung basiert auf einem verteufelt guten Näherungswert für die Kreiszahl π, nämlich 3,14. Dabei ist keine Rede von Behauptung und Beweis In dieser babylonischen und ägyptischen Mathematik werden auf konkrete Gegenstände bezogene, praxisorientierte Aufgaben zusammen mit der Lösung in Gestalt einer detaillierten Rechenvorschrift präsentiert. Einziges Wahrheitskriterium ist – unausgesprochen – die pragmatische Bewährung.

Aus ganz anderem Gestein sind die Theoreme des Thales gehauen, die am Anfang der griechischen Geometrie stehen:

In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.
Der Kreis wird von jedem Durchmesser halbiert.

Hier geht es nicht um Balken, Felder oder Wagenräder, sondern um Dreiecke und Kreise. Und es wird auch nicht der Inhalt eines runden Feldes mit ganz bestimmtem Durchmesser konkret ausgerechnet, sondern hier werden Aussagen mit dem

Anspruch von Allgemeingültigkeit formuliert, d.h. es werden Behauptungen aufgestellt. Und diese neuartigen, universellen Aussagen erhalten überdies den Status begründeten Wissens, denn es werden Beweise geführt. Dieser Paradigmenwechsel von vorgriechischer zu griechischer Geometrie bringt eine völlig neue Form des Wissens unter die Menschen. Und genau diesem neuartigen Wissen widmet Platon seine Aufmerksamkeit, indem er zunächst einmal nachfragt, von welchen Objekten diese thaletische Geometrie überhaupt handelt. Und er selbst ist es, der eine originelle Antwort auf die gestellte Frage liefert. Die Sätze der thaletischen Geometrie, so sagt er, gelten für die Idee des Kreises, für die Idee des Dreiecks und zwar bezüglich der Idee der Gleichheit. Sein genialer Einfall besteht also darin, dass er mit den mathematischen Ideen einen Bereich intelligiblen, insbesondere nicht-empirischen Seins postuliert und auf diese Weise die theoretischen Gegenstände nachreicht, für welche die zuvor bereitgestellten, theoretischen Sätze des Thales gelten. Diese Platonische Deutung ist raffiniert, aber sie ist – zumindest aus heutiger Sicht – nicht zwingend. Denn sie beschreibt mathematische Sachverhalte durch ein System, welches in dieser Welt gerade nicht vorzufinden ist; es handelt sich um ein theoretisches Erklärungsmodell. Und darin ist von Begriffen und Objekten die Rede, deren einzige Legitimation in ihrer Bewährung innerhalb des Modells besteht. Die Idee des Kreises und die Idee des Dreiecks sind Begriffe, denen ausschließlich im Rahmen dieses Erklärungsmodells Gehalt zukommt. Platons Deutung ist also nicht ohne Alternative; mit Platon beginnt eine bis in die Gegenwart dynamisch fortgeschriebene philosophische Karriere der Mathematik. Und gleich zu Beginn dieser Karriere gehen von ihr Impulse aus für die Entfaltung von Philosophie. Denn die Überzeugungskraft seiner geometrischen Ideenwelt hat Platon offensichtlich ermutigt, nun in umfassenderem Rahmen eine neue Deutung der Beziehung zwischen empirischer Wahrnehmung und theoretischer Aussage zu versuchen. Bei der Frage etwa nach dem Schönen, der Tapferkeit und dem Guten sieht er eine zur Geometrie analoge Situation: In der sensiblen Welt gibt es jeweils nur ungenaue, unvollkommene Realisierungen von Schönheit; die vollkommene Schönheit oder auch Schönheit selbst gibt es in der sensiblen Welt nicht. So postuliert Platon auch hier die Idee der Schönheit, die mit den unvollkommenen Realisierungen von Schönheit durch ein Urbild-Abbild-Verhältnis verknüpft ist. Die Ursprünge von Platons Ideenlehre liegen ohne Zweifel in seiner Deutung der thaletischen Geometrie. Völlig zu Recht spricht deshalb Mittelstraß explizit von den „geometrischen Wurzeln der Platonischen Ideenlehre“[5] und Patzig meint, „daß Platon am Beispiel der Mathematik etwas aufgegangen ist, das er in der Ideenlehre festhielt“[6].

[5] Mittelstraß: Die geometrischen Wurzeln der Platonischen Ideenlehre
[6] Patzig: Tatsachen, Normen, Sätze, S.126

Platon hat also zunächst mit den mathematischen Ideen eine Philosophie der Mathematik entworfen und ausgestaltet. Diese fungierte dann anschließend als Paradigma für die Konzeption der Ideenlehre.

Diese Orientierungsfunktion der Mathematik für die Entwicklung der Philosophie hat Platon sogar noch systematisch auszunutzen und auszubauen versucht. Weil die Mathematik am Beispiel der Ideen ihre Bewährungsprobe als Paradigma für Philosophie so glänzend bestanden hatte, musste Platon an einem Ausbau der Mathematik selbst interessiert sein in der Hoffnung auf neue Impulse für die Philosophie. Und in der Tat berichtet Dikaiarch über die Platonische Akademie: „Es war aber auch ein großer Fortschritt der mathematischen Wissenschaften in jener Zeit zu erkennen, wobei Platon die baumeisterliche Leitung hatte und die Aufgaben stellte, die dann die Mathematiker mit Eifer erforschten.“[7] Aus dieser Passage geht zweifelsfrei hervor, dass Platon zumindest für eine globale Systematisierung bzw. eine synoptische Rekonstruktion der damaligen Mathematik verantwortlich war. Deshalb konnte Gaiser aus dieser Dikaiarch-Quelle den Schluss ziehen, „daß Platons Forderung eines systematischen, definitorisch-axiomatischen Ausbaus der Mathematik von den Spezialisten nicht als unsinnige oder überflüssige Bevormundung, sondern als sachgemäßes Programm aufgefaßt wurde – um so mehr, da sich Platons Erwartung erfüllte: Die Systematisierung und Axiomatisierung der mathematischen Wissenschaften gelang damals in rasch aufeinanderfolgenden Schritten. Die für die Arithmetik und die Geometrie erzielten Ergebnisse sind in die Architektonik der entsprechenden Bücher von Euklids Elementen eingegangen: Euklids Definitionen, Postulate und Axiome entsprechen methodisch und sachlich dem platonischen Programm.“[8] Somit sehen wir heute den folgenden Begründungszusammenhang: Platons Philosophie ist auf das Paradigma der Mathematik angewiesen – die Mathematik ihrerseits erfährt sowohl ihren wissenschaftstheoretischen Ort als auch ihre Präsentationsform im Kontext eben dieser Philosophie.

2. Platonismus in der Mathematik

Während Platon und seinen Schriften schon immer die Aufmerksamkeit vieler Mathematiker galt, wird der Begriff »Platonismus« erst relativ spät in eine Beziehung zur Mathematik gebracht. Die älteste überlieferte Quelle dazu scheint aus dem Jahr 1934 zu stammen. Damals hielt P. Bernays im Zyklus der »Internationalen Vorträge für mathematische Wissenschaften« einen Vortrag *Über den Platonismus in der Mathematik*. Darin erklärte er: „Viele Mathematiker und Phi-

[7] Gaiser: Platons Zusammenschau, S.119
[8] Ebd., S.120/121

losophen interpretieren die Methoden des Platonismus im Sinne eines Begriffsrealismus und postulieren die Existenz einer Ideenwelt, die alle Gegenstände und Beziehungen der Mathematik enthält.“[9] Darüberhinaus äußert er die Überzeugung, „daß es keine Übertreibung ist, wenn man sagt, der Platonismus sei heute herrschend in der Mathematik“[10]. In der Tat hat die Vorstellung auf Mathematiker zu allen Zeiten faszinierend gewirkt, dass mathematische Objekte und deren Gesetzmäßigkeiten unabhängig von jeder wissenschaftlichen Aktivität, insbesondere vor jeglichem intellektuellen Zugriff durch menschliche Vernunft, festgelegt und fixiert sind. Bei dieser Auffassung wird Mathematik ent-deckt bzw. wahr-genommen, also nicht geschaffen bzw. konstruiert. Ein exponierter Vertreter dieser Auffassung war z.B. G. Cantor, und es dürfte diese platonistische Einstellung zur Mathematik gewesen sein, die ihm eine höchst gelassene Reaktion auf die berühmten Antinomien der Mengenlehre ermöglichte. Bereits im Jahre 1897 – also fast fünf Jahre vor jenem berühmten Brief von B. Russell an G. Frege – teilt er Hilbert beiläufig mit, dass die Gesamtheit aller Kardinalzahlen nicht als Menge aufgefaßt werden dürfe, da sich sonst ein Widerspruch ergebe. Dabei spricht er von „absolut unendlichen Totalitäten, die ... von den transfiniten Mengen scharf unterschieden werden müßten“[11]. Ähnlich äußert er sich zwei Jahre später in einem Brief an Dedekind. Gerade im Zusammenhang mit dem von ihm konzipierten Mengenbegriff fühlte sich Cantor von Beginn an der Philosophie Platons verpflichtet. In der sprachlich noch sehr ungelenken Formulierung von 1883 heißt es: „Unter einer Mannigfaltigkeit oder Menge verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann, und ich glaube hiermit etwas zu definieren, was verwandt ist mit dem Platonischen ειδος oder ιδεα.“[12]

Auch K. Gödel hat sich wiederholt zur platonistischen Auffassung von Mathematik bekannt, wobei er im Unterschied zu Cantor insbesondere die Analogie von mathematischem Universum und physikalischer Realität herausstellt. In seiner berühmten Gibbs-Lecture im Jahr 1951 erklärt er: „The truth, I believe, is that these [mathematical] concepts form an objective reality of their own, which we cannot create or change, but only perceive and describe.“[13] Sowohl mathematische Objekte als auch Sachverhalte, so führt er aus, „exist objectively and independently of our mental acts and decisions, that is to say, it seems to imply

[9] Bernays: Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik, S.65
[10] Ebd.
[11] Purkert-Ilgauds: Georg Cantor, S.225
[12] Cantor: Gesammelte Abhandlungen, S.204
[13] Gödel: Collected works Bd.III, S.320

some form or other of Platonism or realism as to the mathematical objects“[14]. Und dann folgt die Analogie zur physikalischen Realität: „That is, the view that mathematical objects and the way in which we know them are not essentially different from physical or psychical objects and laws of nature.“[15]

Es gibt aber in unserer Zeit unter den Mathematikern auch überzeugte Anti-Platonisten. So erklärt S. MacLane, einer der vielseitigsten und einflußreichsten Mathematiker unseres Jahrhunderts: „Our view of Mathematics ... is, however, in sharp contrast to all variants of Platonism.“[16] Und bei A. Robinson, dem Meister der Nonstandard-Mathematik, lesen wir: „I cannot imagine that I shall ever return to the creed of the true platonist, who sees the world of the actual infinite spread out before him...“[17] Dazu muß angemerkt werden, daß Robinson mit schwindelerregender Virtuosität im mathematischen Unendlichen sowohl zukunftsweisende neue Konzeptionen entworfen als auch höchst subtile Beweise geführt hat. Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass sich Robinson als Formalist verstanden hat und dass MacLane seine philosophische Auffassung von Mathematik als »funktionalen Formalismus« bezeichnet.

Die gegenwärtige Einstellung der Mathematiker zum Platonismus ist schwer einzuschätzen. Mir scheint, dass R. Hersh die derzeitige Situation recht treffend beschrieben hat, wenn er meint, die meisten Mathematiker unserer Zeit seien werktags Platonisten und sonntags Formalisten.[18] Dies ist so zu verstehen, dass der Mathematiker gut beraten ist, wenn er während seiner Forschung einen platonistischen Standpunkt einnimmt. Sobald er jedoch am Sonntag bei Festveranstaltungen einem breiteren Publikum – möglicherweise sind sogar Philosophen darunter – allgemeinverständlich Rechenschaft über seine Wissenschaft abgeben muss, dann hat er als Formalist am wenigsten zu befürchten. Insbesondere kann er etwaige philosophische Nachfragen mühelos befriedigen und etwaige philosophische Angriffe elegant parieren.

Auch innerhalb der »Philosophie der Mathematik«, einer neuen Disziplin im Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie, wird seit einigen Jahren verstärkt über Platonismus nachgedacht. Dabei ist eine Begriffsverschiebung von »Platonismus« zu »Realismus« zu beobachten. So schreibt M.D. Resnik: „Call me a »Platonist«, if you like. I used this label in my earlier writings. But I am using the term »realism« since many of the contemporary philosophers with

[14] Ebd., S.311
[15] Ebd., S.312
[16] MacLane: Mathematics - Form and Function, S.447
[17] Robinson: From a formalist’s point of view, S.49
[18] Hersh: Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics, S.32

whom I debate or ally myself use it."[19] Und P. Maddy gibt eine präzise Beschreibung ihrer Auffassung von Realismus, die eine enge Verwandtschaft zu Gödels Einstellung erkennen lässt: „I use »realism« for the view that there is one objectively-determinate set theoretic universe..."[20]

3. Nikolaus von Kues

Zu Recht gilt Nikolaus von Kues als derjenige Denker, welcher in der abendländischen Geistesgeschichte dem Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit die entscheidenden Impulse vermittelt hat. Dabei entwirft er einen höchst originellen neuartigen Begründungszusammenhang zwischen Theologie, Philosophie und Mathematik. Zunächst nimmt er eine Dreiteilung alles Seienden vor und unterteilt in Sinnliches (reale Welt), Un-Sinnliches (Welt des Geistes) und Über-Sinnliches (Gott). Für ihn hat Gott den Bereich des Sinnlichen nach mathematischen Prinzipien geschaffen: „Gott hat bei der Erschaffung der Welt sich der Arithmetik, der Geometrie, der Musik und der Astronomie bedient..."[21] Diesen Schöpfungsprozess kann der Mensch weder vollends durchschauen noch werkgetreu nachvollziehen. Aber der Mensch simuliert diesen Schöpfungsprozess in den Wissenschaften. Diese gehören in der geschilderten Dreiteilung zum Bereich des Unsinnlichen, nehmen also eine mittlere Position und vermittelnde Funktion zwischen der realen Welt und Gott ein. Bei dieser Simulation entspricht dem göttlichen Schöpfungsprozess ein menschlicher Konstruktionsprozess. Überhaupt spielt der Begriff der Konstruktion im Wissenschaftsverständnis des Kusaners eine zentrale Rolle. Dies gilt auch und insbesondere für die Mathematik, wo er eine klare Gegenposition zu Platon einnimmt.

Für Platon wird Mathematik ent-deckt bzw. wahr-genommen und insbesondere nicht erfunden oder erschaffen. Für Nikolaus von Kues wird Mathematik nun gerade umgekehrt nicht entdeckt, sondern konstruktiv erschaffen; man kann den Kusaner ohne Übertreibung als Vorläufer oder Urheber des mathematischen Konstruktivismus bezeichnen. Bei ihm ist es „... unser Geist, der die mathematischen Dinge herstellt ..."[22] und es ist „die Zahl, die als idealer Gegenstand durch unsere vergleichende Unterscheidung erzeugt wird"[23]. Auf diesem Weg gelangt der Mensch zu verlässlichem Wissen. Nun steht aber für den Kusaner jedes Wissen uneingeschränkt im Dienst des Glaubens. Zunächst einmal lassen sich bei ihm philosophische und theologische Argumentation nicht voneinander trennen;

[19] Resnik: Mathematics as a Science of Patterns, S.10
[20] Maddy: Naturalism in Mathematics, S.87
[21] N. v. Kues: Die belehrte Unwissenheit II, S.109
[22] N. v. Kues: Über den Beryll, S.67
[23] N. v. Kues: Die belehrte Unwissenheit I, S.23

und die Wissenschaften – insbesondere die Mathematik – leisten Zubringerdienste für Philosophie und Theologie: „Wenn wir also die Sache recht betrachtet haben, so besitzen wir nichts Sicheres in unserem Wissen als unsere Mathematik, und diese ist ein Rätselbild, die Werke Gottes zu erjagen. Daher haben bedeutende Männer, wenn sie irgend etwas Großes ausgesprochen haben, es in mathematischem Gleichnis begründet: wie dies, daß die Arten sich zueinander verhalten wie die Zahlen und das Sinnenhafte im Verstandesmäßigen sei wie das Dreieck im Viereck und vieles dergleichen."[24] Wenn hier „etwas Großes" ausgesprochen wird, so ist damit natürlich stets Einsicht oder Spekulation im Hinblick auf Konzeption und Realisierung des göttlichen Schöpfungsprozesses gemeint. Und die Metapher vom mathematischen Gleichnis als idealem Medium menschlicher Verständigung über göttliches Wirken gehört zu den Lieblingsmetaphern des Kusaners: „Alle unsere weisen und gotterleuchteten Lehrer stimmen darin überein, daß die sichtbaren Dinge in Wahrheit Bilder der unsichtbaren Dinge sind, und daß der Schöpfer auf diese Weise wie im Spiegel und Gleichnis für die Geschöpfe dem erkennenden Blick zugänglich wird."[25] Diese Präsentationsform durch ein Gleichnis wird für Nikolaus von Kues darüberhinaus mit mathematischem Gehalt versehen, weil für ihn „mathematische Einsichten zum beinahe absolut Göttlichen und Ewigen führen"[26]. Gemäß dieser erkenntnisleitenden Richtlinien wird dann beispielsweise die Trinitätslehre am Begriff des Dreiecks festgemacht; ganz analog dient die Symmetrie der Kugel als Veranschaulichung der Harmonie Gottes: „Und wie durch unendliche Kreisbewegungen die Kugel entsteht, so ist Gott für alle Kreisbewegungen – gleichsam als die größte Kugel – das absolut einfache Maß."[27] In den *Mutmaßungen* erläutert der Kusaner am Modell des Tetraeders Binnenstruktur und wechselseitige Abhängigkeiten von sinnlicher Wahrnehmung (entspricht den Seiten des Tetraeders), Vernunft (wird durch die Kanten repräsentiert) und Verstand (symbolisiert durch die Ecken). In diesem Zusammenhang wird sehr subtil begründet, dass die Vernunft aus sechs Komponenten besteht, während sinnliche Wahrnehmung und Verstand jeweils aus vier Grundbausteinen zusammengesetzt sind.

Das Werk des Nikolaus von Kues enthält eine Vielzahl von Beispielen der geschilderten Art, dass also mathematische Begriffe, Proportionen, Konfigurationen usw. als Modell, Spiegel oder Gleichnis für philosophisch-theologische Argumentationen verwendet werden. Wie schon bei Platon, so beobachten wir auch hier, dass und wie darüberhinaus Philosophie ihrerseits in die Entfaltung der Ma-

[24] N. v. Kues: Dreiergespräch über das Können-Ist, S.53
[25] N. v. Kues: Die belehrte Unwissenheit I, S.41
[26] N. v. Kues: Die mathematischen Schriften, S.160
[27] N. v. Kues: Die belehrte Unwissenheit I, S.95

thematik hineinwirkt: „Mein Streben geht dahin, aus der Koinzidenz der Gegensätze die Vollendung der Mathematik zu gewinnen.“[28] Offensichtlich haben religiöse Motive den Kusaner ermutigt, sich um eine »Vollendung« der Mathematik zu bemühen. Nachdem sich die von ihm vorgefundene Mathematik als Gleichnis oder Spiegel seiner philosophisch-theologischen Weltsicht in überzeugender und vielfältiger Weise bewährt hat, muss zwischen Gottes Schöpfung der Welt und menschlicher Schöpfung der Mathematik ein Prinzip der Passung walten. Da Gottes Schöpfung vollkommen ist, wird sich folgerichtig auch die Mathematik zu einer Vollkommenheit vorantreiben und also vollenden lassen. Der mathematische Ertrag dieser Vollendungsbemühungen des Kusaners ist nicht der Rede wert, sie legt aber ein weiteres Zeugnis ab von seiner Grundüberzeugung einer Ausnahmestellung der Mathematik unter den Wissenschaften im Rahmen religiöser Weltorientierung und menschlicher Interpretation der göttlichen Schöpfung.

Absichtlich wurden bislang die Weisen der Verständigung über Wissenschaft und Fragen der Präsentation oder Repräsentation von Wissenschaft zurückgestellt, weil Nikolaus von Kues hierfür einen Begriff verwendet, der zum nächsten Abschnitt und damit wieder in unser Jahrhundert überleiten wird. In *De docta ignorantia* heißt es beim Kusaner: „Da uns zu den göttlichen Dingen nur der Zugang durch Symbole als Weg offensteht, so ist es recht passend, wenn wir uns wegen ihrer unverrückbaren Sicherheit mathematischer Symbole bedienen.“[29] Die Symbole der Mathematik erscheinen hier als Garanten bzw. Träger jener Sicherheit, die – wie wir gehört haben – das mathematische Wissen auszeichnet. Ihre Bewährungsprobe müssen die Symbole bei der Behandlung des Unendlichen bestehen. Zunächst vermerkt Nikolaus von Kues, „daß das schlechthin Größte nicht zu den Gegenständen gehören kann, die wir wissen können und zu begreifen vermögen“[30]. Dann fährt er fort: „Da wir uns deshalb vorgenommen haben, es auf dem Wege des Symbols aufzusuchen...“ Daran würde sich mit absoluter Konsequenz die folgende Aussage anschließen: „Das vollendet Unendliche können wir nur repräsentieren im Symbol.“[31] Aber dieses Zitat steht nicht bei Nikolaus von Kues, sondern stammt von Hermann Weyl, einem der produktivsten und philosophischsten Mathematiker unseres Jahrhunderts.

4. Hermann Weyl

[28] N. v. Kues: Die mathematischen Schriften, S.161
[29] N. v. Kues: Die belehrte Unwissenheit I, S.45
[30] Ebd.
[31] Weyl: Gesammelte Abhandlungen Bd.IV, S.335

Im Vorwort zu seiner 1917 erschienenen Schrift *Das Kontinuum* schreibt Weyl: „Wenngleich diese Schrift vor allem mathematische Ziele verfolgt, so bin ich doch philosophischen Fragen nicht aus dem Wege gegangen und habe nicht versucht, sie durch jene rohe und oberflächliche Verquickung von Sensualismus und Formalismus aus der Welt zu schaffen, die unter Mathematikern immer noch großes Ansehen genießt.“[32] Weyl sagt nicht, dass er philosophische Aspekte zusätzlich oder nachträglich zur mathematischen Analyse hinzugefügt habe, sondern dass er „philosophischen Fragen nicht aus dem Wege gegangen“ sei – damit will er zum Ausdruck bringen: Bei bestimmten grundlagentheoretischen mathematischen Problemen stellen sich philosophische Fragen von selbst in den Weg, es sind also Mathematik und Philosophie naturgemäß aufeinander bezogen und unlösbar miteinander verbunden. Weyl selbst hat diese Einsicht nicht nur – quasi als Alibi – im Vorwort der zitierten Schrift ausgesprochen, er hat vielmehr sein gesamtes wissenschaftliches Schaffen unter diese Maxime gestellt. Darüberhinaus hat er sich nicht gescheut, diese Interdependenz von Mathematik und Philosophie auch explizit zu thematisieren und somit zur Diskussion zu stellen, obwohl er in seinem *Lebensrückblick* bekennt: „Das durch die Arbeit in den exakten Wissenschaften geschärfte Erkenntnisgewissen macht es Unsereinem nicht leicht, den Mut zur philosophischen Aussage zu finden. Ganz ohne Kompromiß kommt man da nicht durch.“[33]

Hermann Weyls 1948 erschienene umfangreiche Arbeit mit dem Titel *Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen* kann man durchaus als wissenschaftsphilosophisches Vermächtnis dieses universell gebildeten und interessierten Ausnahmegelehrten lesen. Darin gibt er auf der Basis einer lebenslang erfolgreichen Forschung – und zwar sowohl in der Mathematik als auch in der mathematischen Physik – sowie einer bewundernswert reichen philosophischen Belesenheit eine überzeugende philosophische Deutung der Mathematik. Es entspricht der Persönlichkeit und dem Charakter Weyls, dass er sich dabei insbesondere um einen Ausgleich zwischen so scheinbar unvereinbaren Standpunkten wie denen von Brouwer und Hilbert bemüht: „Nimmt man die Mathematik für sich allein, so beschränke man sich mit Brouwer auf die einsichtigen Wahrheiten, in die das Unendliche nur als ein offenes Feld von Möglichkeiten eingeht; es ist kein Motiv erfindlich, das darüber hinaus drängt. In der Naturwissenschaft aber berühren wir eine Sphäre, die der schauenden Evidenz sowieso undurchdringlich ist; hier wird Erkenntnis notwendig zu symbolischer Gestaltung ... von dieser höheren Warte, von der aus die ganze Wissenschaft als eine Einheit erscheint, bin

[32] Weyl: Das Kontinuum, S.IV
[33] Weyl: Gesammelte Abhandlungen Bd.IV, S.648

ich geneigt, Hilbert recht zu geben.“[34] In diesem Zitat begegnen wir erneut jenem Begriff, der im Zentrum der Wissenschaftsphilosophie des Nikolaus von Kues steht und der sich wie ein Leitmotiv auch bei Hermann Weyl verfolgen läßt, nämlich dem Begriff des Symbols. Zunächst einmal ist das Symbol unverzichtbar für eine Zähmung des Unendlichen: „Das vollendet Unendliche können wir nur repräsentieren im Symbol.“[35] Aber Weyl weist auch darauf hin, dass Symbole traditionell ein unverzichtbares Werkzeug der Mathematiker sind: „Die in der Mathematik schon immer übliche Repräsentation durch Symbole muß auch auf die fundamentalen logischen Operationen ... ausgedehnt werden.“[36] Damit führt er ein Programm konsequent aus, welches er zu Beginn seiner Arbeit mit unüberbietbarer Transparenz als Aufgabe formuliert hat, nämlich „sich dem Problem der Mathematik dadurch zu nähern, daß man das Mathematisieren als eine in Symbolen schaffende Grundtätigkeit des Geistes zu charakterisieren versucht, indem man sie abhebt gegen andere gleich ursprüngliche schöpferische Tätigkeiten wie Sprache und Musik“[37]. Aus Weyls Charakterisierung der Mathematik „als eine in Symbolen schaffende Grundtätigkeit des Geistes“ kann man erneut seine geistige Verwandtschaft mit dem Kusaner entnehmen. An einer anderen Stelle spricht Weyl diese Verwandtschaft auch explizit aus: „Vorahnungen der ganzen hier geschilderten Entwicklung der Mathematik finden sich bei Nicolaus Cusanus, bestimmter bei Leibniz. Sie sehen im Symbolismus eine Repräsentation der vom menschlichen Denken unvollziehbaren göttlichen Ideenwelt.“[38]

In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass der Symbolbegriff auch in der Philosophie von Ernst Cassirer eine zentrale Rolle einnimmt. Cassirer bezeichnet das Symbol als einen „Schlüssel zum Wesen des Menschen“[39]. Dieser Schlüssel entfaltet – bildlich gesprochen – seine aufschließende Kraft im Mythos, in der Religion, in der Sprache, in der Kunst und in den Wissenschaften. Für Cassirer ist dabei „Mathematik eine universelle Symbolsprache“[40].

5. Immanuel Kant

Mathematische Spuren durchziehen Kants Werk in allen Schaffensperioden. Ob sich der Zweiundzwanzigjährige *Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte* macht, ob sich der Vierzigjährige vergeblich bemüht, mit einer

[34] Ebd., S.334
[35] Ebd., S.335
[36] Ebd., S.329
[37] Ebd., S.297
[38] Weyl: Gesammelte Abhandlungen Bd.IV, S.533
[39] Cassirer: Versuch über den Menschen, S.47
[40] Ebd., S.329

Untersuchung über die Deutlichkeit der natürlichen Theologie und der Moral den Preis der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Berlin zu erringen, oder ob der Vierundsiebzigjährige eine *Anthropologie in pragmatischer Hinsicht* verfasst – überall finden sich Einschübe zur Mathematik, immer wieder verleihen Anmerkungen zur Mathematik den philosophischen Argumentationen Antrieb und Überzeugungskraft.

Will man die Art und Weise des Kantschen Zugriffs auf Mathematik knapp und prägnant begrifflich fassen, so bietet sich als Formulierung an, dass Kant durchgängig Tragweite und Grenzen der Mathematik analysiert. Im Zusammenhang mit Kants philosophischen Bemühungen fungiert die Mathematik dabei bevorzugt als Kontrast zur Philosophie. Das sei kurz skizziert.

In der Vorrede zur zweiten Auflage der *Kritik der reinen Vernunft* präzisiert Kant den Unterschied zwischen Wissenschaft und Herumtappen: „Ob die Bearbeitung der Erkenntnisse, die zum Vernunftgeschäfte gehören, den sicheren Gang einer Wissenschaft gehe oder nicht, das läßt sich bald aus dem Erfolg beurteilen ... wenn es nicht möglich ist, die verschiedenen Mitarbeiter in der Art, wie die gemeinschaftliche Absicht erfolgt werden soll, einhellig zu machen: so kann man immer überzeugt sein, daß ein solches Studium bei weitem noch nicht den sichern Gang einer Wissenschaft eingeschlagen, sondern ein bloßes Herumtappen sei ...“[41] Den Status einer Wissenschaft billigte Kant nur der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaft zu: „Die Mathematik ist von den frühesten Zeiten her, wohin die Geschichte der menschlichen Vernunft reicht, in dem bewundernswürdigen Volke der Griechen den sichern Weg einer Wissenschaft gegangen.“[42] Die Philosophie hingegen, und hier insbesondere die Metaphysik, befand sich seiner Meinung nach in der Mitte des 18. Jahrhunderts noch im Stadium des Herumtappens. Das Ziel seiner kritischen Philosophie sah er in der Beförderung von Philosophie aus der niederen Stufe des Herumtappens in den höheren Rang einer Wissenschaft. Auf dem Weg zu diesem Ziel geht er mit bewundernswerter methodischer Raffinesse vor. Er entwirft einerseits eine völlig neuartige Konzeption für den wissenschaftstheoretischen Status von Mathematik und arbeitet andererseits detailliert die grundlegende wissenschaftstheoretische Differenz zwischen Mathematik und Philosophie heraus. Aus der gesicherten Wissenschaft Mathematik und der methodisch bestimmten Differenz zwischen Mathematik und Philosophie hofft er auch Philosophie als Wissenschaft einzufangen.

[41] KdrV, B VII
[42] KdrV, B X

Die neue Auffassung von Mathematik brauche ich nur in Erinnerung zu rufen. Kant hat im weiteren Umfeld der Mathematik einen Vielfrontenkrieg geführt, zwar nicht direkt gegen die Wissenschaft Mathematik, aber sowohl gegen überkommene Auffassungen von Mathematik als auch gegen gängige Gewohnheiten des Umgangs mit Mathematik. Was die Auffassung von Mathematik betrifft, bezieht er eine doppelte Opposition, nämlich sowohl gegen die englischen Empiristen als auch gegen den von Leibniz vertretenen analytischen Charakter der Mathematik. Im Hinblick auf den Umgang mit Mathematik rügt er insbesondere die Verwendung der mathematischen Methode in der Philosophie.

Mathematische Erkenntnis ist für Kant sowohl synthetisch – hier bezieht er Opposition gegen Leibniz, als auch a priori – hier nimmt er eine Gegenposition zu den englischen Empiristen ein. Die Einsicht, dass mathematische Erkenntnis synthetisch und a priori ist, sieht Kant im Ursprung zuerst in der thaletischen Geometrie realisiert. Sowohl Platon als auch Kant nehmen Bezug auf die thaletische Geometrie, jedoch jeweils in einer Art und Weise, wie es unterschiedlicher kaum denkbar ist. Platon fragt angesichts der thaletischen Geometrie nach den Gegenständen der Erkenntnis, Kant fragt gerade gegenläufig dazu nach der Erkenntnis der Gegenstände. Mit Hinweis auf die historischen Ursprünge bei den Griechen heißt es bei Kant: Mathematische Erkenntnis ist synthetisch und a priori. Dem stellt er die programmatische Aussage zur Seite: Metaphysische Erkenntnis muss – will sie den Rang einer Wissenschaft beanspruchen – ebenfalls synthetisch und a priori sein.

Diesem Gleichklang im Typus von mathematischer und metaphysischer Erkenntnis – synthetisch und a priori – stellt Kant nun prägnante Differenzen zur Seite, die Mathematik und Philosophie in ein kontradiktorisches Verhältnis zueinander setzen. So weist er darauf hin, dass Definitionen, Demonstrationen und Axiome für die Mathematik konstitutiv sind, nicht jedoch für die Philosophie. In der *Transzendentalen Methodenlehre* findet sich der vielzitierte Satz: „Die philosophische Erkenntnis ist die Vernunfterkenntnis aus Begriffen, die mathematische aus der Konstruktion der Begriffe.“[43] Daraus wird dann gefolgert: „Die philosophische Erkenntnis betrachtet also das Besondere nur im Allgemeinen, die mathematische das Allgemeine im Besonderen...“[44]

Über den Gleichklang im Charakter der Erkenntnis von Mathematik und Metaphysik, dessen Realisierung in der Mathematik sowie den Methodenkontrast der Betrachtungsweise in Mathematik und Philosophie bestimmt Kant also „jede künftige Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können“.

---

[43] KdrV, B 741
[44] KdrV, B 742

Kaum ein Philosoph hat die nachfolgenden Mathematikergenerationen so herausgefordert wie Kant. Die Urteile der Mathematiker loten das breite Spektrum von euphorischer Zustimmung bis zu schroffer Ablehnung voll aus. Davon soll im nächsten Abschnitt die Rede sein.

6. Mathematiker lesen und deuten Kant

Die Mathematiker des 19. und 20. Jahrhunderts haben kaum einem Philosophen so viel Aufmerksamkeit entgegengebracht wie Immanuel Kant. Es sollen hier einige Äußerungen von Mathematikern in Erinnerung gebracht werden, die sich mit jener zentralen These Kants auseinandersetzen, das wissenschaftstheoretische Fundament der Mathematik bestehe aus synthetischen Urteilen, die a priori gewonnen werden.

Carl Friedrich Gauß äußert sich in einem Brief an Schumacher vom 1.11.1844 ausgesprochen negativ: „... seine [Kants] Distinction zwischen analytischen und synthetischen Sätzen ist meines Erachtens eine solche, die entweder nur auf eine Trivialität hinausläuft oder falsch ist.“[45] Zum besseren Verständnis sollte hinzugefügt werden, dass Gauß von Philosophie und Philosophen generell keine hohe Meinung hatte. In demselben Brief holt er zu einem Rundumschlag aus: „Dass Sie einem Philosophen ex professo keine Verworrenheit in Begriffen und Definitionen zutrauen, wundert mich fast. Nirgends mehr sind solche ja zu Hause als bei Philosophen, die keine Mathematiker sind ... Sehen Sie sich doch nur bei den heutigen Philosophen um, bei Schelling, Hegel, Nees von Esenbeck und Consorten, stehen Ihnen nicht die Haare bei ihren Definitionen zu Berge.“ Daran anschließend werden dann – wie bereits zitiert – auch Kant die Leviten gelesen.

Hier zeigt sich eine Geisteshaltung, der wir nicht nur bei Gauß begegnen, sondern auch bei anderen Mathematikern; diese Einstellung hat den Dialog zwischen Mathematik und Philosophie des öfteren in unglücklicher Weise belastet. So erklärt der Mathematiker Ernst Eduard Kummer in einer öffentlichen Sitzung der Berliner Akademie am 26. Januar 1865, dass viele junge „Talente in der Mathematik nicht nur ein unendliches und fruchtbares Feld ihrer Thätigkeit [vorfanden], sondern auch das, was ihnen die Philosophie niemals geben konnte: die unumstößliche Wahrheit und Gewißheit der Resultate ihrer Forschungen“[46]. Und vier Jahre später sagt er vor derselben Akademie, dass „die Resultate philosophischer Forschungen kaum auf eine absolute Geltung Anspruch“[47] erheben dürften. Es sei auch noch ein Beleg aus unserem Jahrhundert hinzugefügt. In seiner An-

[45] Gauß-Schumacher: Briefwechsel, S.337
[46] Kummer: Collected Papers II, S.771
[47] Ebd., S.805

trittsvorlesung an der Universität Hamburg erläuterte Helmut Hasse Anfang 1951, warum er sich im Anschluss an das Abitur für ein Studium der Mathematik entschied: „Meine Wahl ist deshalb auf die Mathematik gefallen, weil in mir schon in frühester Jugend der Trieb zur Erkenntnis objektiver, unumstößlich gültiger Wahrheiten so stark war, daß er alle anderen Interessen in den Schatten stellte. Sie werden mir zugeben müssen, daß es bei dieser Veranlagung für mich keine andere Wahl gab.“[48]

Doch zurück zu den Kant-Studien von Mathematikern! Bei aller Unterschiedlichkeit in Akzentuierung und Zielsetzung zieht sich eine ganz bestimmte Kritik wie eine Invariante durch alle Argumentationen von Mathematikern bei ihrer Würdigung und Interpretation von Kants Philosophie der Mathematik: Als hätten sie sich abgesprochen oder voneinander abgeschrieben, denn allen gemeinsam ist die Ablehnung des von Kant vertretenen apriorischen Charakters der Mathematik, insbesondere der Geometrie. So äußert Gauß 1829 in einem Brief an Bessel die „Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können“[49]. Bernhard Riemann beginnt seinen berühmten Habilitationsvortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* am 10. Juni 1854 folgendermaßen: „Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als auch die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus ... Das Verhältnis dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; Man sieht weder ein, ob und wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.“[50] Riemann fährt dann fort, dass er eine neue Theorie mehrfach ausgedehnter Größen präsentieren werde, aus der sich ergibt, „dass der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können.“[51] Obwohl er nicht namentlich erwähnt wird, gilt die Kritik ganz offensichtlich Kant.

Machen wir einen Sprung in unser Jahrhundert! Der Mathematiker Leo Koenigsberger ging 1913 in einem Vortrag in der Heidelberger Akademie der Wissenschaften der Frage nach ob *Die Mathematik - eine Geistes- oder Naturwissenschaft* sei ? Darin führte er unter anderem aus, Kant sei dem Irrtum erlegen, „daß die Mathematik in eigenen, aus der Vernunft entnommenen Gesetzen erst die

[48] Hasse: Mathematik ..., S.15
[49] Gauß: Werke VIII, S.200
[50] Riemann: Gesammelte mathematische Werke, S.272/273
[51] Ebd. S.272/273

Grundlagen der Erfahrung schaffe, selbst aber von der Erfahrung unabhängig sei. Die Mathematik geht vielmehr von der Erfahrung aus, baut aber sodann vermöge unserer geistigen Kräfte ein folgerichtiges System ... auf"[52].

In seinem berühmten Vortrag *Naturerkennen und Logik* im Jahre 1930 stellt sich David Hilbert die Aufgabe, „ein altes philosophisches Problem zu behandeln, nämlich die vielumstrittene Frage nach dem Anteil, den das Denken einerseits und die Erfahrung andererseits an unserer Erkenntnis haben"[53]. Mit besonnener Argumentation und frei von aller Polemik grenzt sich Hilbert deutlich gegen Kant ab: „Aber die Grenze einerseits zwischen dem, was wir a priori besitzen, und andererseits dem, wozu Erfahrung nötig ist, müssen wir anders ziehen als Kant; Kant hat die Rolle und den Umfang des Apriorischen weit überschätzt."[54] Ähnliche Überlegungen hatte Hilbert bereits 1922/23 in seiner Göttinger Vorlesung *Wissen und mathematisches Denken* vorgetragen. Auch dort setzt er sich kritisch mit dem »a priori« auseinander: „Aber die Grenze, zwischen dem, was wir a priori besitzen, und dem, wozu Erfahrung nötig ist, müssen wir heute anders ziehen als Kant. Denn z.B. für den Erfolg der Methode Euklids in der wirklichen Welt ist nicht, wie man anfangs annahm, und wie es noch Kant behauptete, die Evidenz der Grundsätze entscheidend."[55]

Schließlich sei noch einmal Hermann Weyl zitiert, der in seinem bereits erwähnten Beitrag *Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen* unter anderem schreibt: „Kant ist überzeugt, daß nur seine Auffassung von der Natur des Raumes die Möglichkeit der Geometrie als einer synthetischen Erkenntnis a priori begreiflich macht. Es ist wohl überflüssig, zu erwähnen, daß durch die ganze Entwicklung der Mathematik seit Kant diese seine Ansicht vom Wesen der Geometrie völlig untergraben ist."[56]

Angesichts einer derartigen Phalanx von Mathematikern mehrerer Generationen, die durchgängig Kants Ausführungen über den apriorischen Charakter der Geometrie kritisieren, erscheint es dringend geboten, doch noch einmal bei Kant nachzufragen bzw. genauer nachzulesen. Und dann stellen sich schon recht bald Bedenken ein, ob alle vorgetragene Kritik wirklich auf gründlichem Quellenstudium basiert.

In der *Transzendentalen Analytik* weist Kant auf den fundamentalen Unterschied zwischen »denken« und »erkennen« hin: „Zum Erkenntnisse gehören nämlich zwei Stücke: erstlich der Begriff, dadurch überhaupt ein Gegenstand gedacht

[52] Koenigsberger: Die Mathematik eine Geistes- oder Naturwissenschaft?, S.10
[53] Hilbert: Gesammelte Abhandlungen Bd.III, S.378
[54] Ebd., S.383
[55] Hilbert: Wissen und mathematisches Denken, S.88
[56] Weyl: Gesammelte Abhandlungen Bd.IV, S.301/302

wird (die Kategorie), und zweitens die Anschauung, dadurch er gegeben wird."[57] Begriffe (Kategorien) haben den Status des Denkmöglichen, sie unterliegen der Forderung der Widerspruchsfreiheit: „Daß in einem solchen Begriffe kein Widerspruch enthalten sein müsse, ist zwar eine notwendige logische Bedingung; aber zur objektiven Realität des Begriffs, d.i. der Möglichkeit eines solchen Gegenstandes, als durch den Begriff gedacht wird, bei weitem nicht genug."[58] Erkenntnis zielt nicht nur auf Denkbares, sondern auf mögliche Erfahrung als Bedingung für objektive Realität. Dazu aber bedarf es zusätzlich zum Begriff auch noch der Anschauung und diese ist „entweder reine Anschauung (Raum und Zeit) oder empirische Anschauung ... Durch Bestimmung der ersteren können wir Erkenntnisse a priori von Gegenständen (in der Mathematik) bekommen, aber nur ihrer Form nach, als Erscheinungen; ob es Dinge geben könne, die in dieser Form angeschaut werden müssen, bleibt doch dabei noch unausgemacht."[59] In der Mathematik gehören also Begriff und Anschauung zusammen. Dies führt unmittelbar zum konstruktiven Charakter der Mathematik bei Kant: „Die philosophische Erkenntnis ist die Vernunfterkenntnis aus Begriffen, die mathematische aus der Konstruktion der Begriffe. Einen Begriff aber konstruieren, heißt: die ihm korrespondierende Anschauung a priori darstellen."[60]

Interpretieren wir im Sinne dieser Kantischen Argumentation das Problem der Euklidizität der Geometrie, so bleibt zunächst festzuhalten, dass verschiedene Geometrien – insbesondere höherdimensionale Geometrien – bei Kant im Medium des Begriffs keineswegs ausgeschlossen sind, sobald sie nur dem Kriterium der Widerspruchsfreiheit genügen. In jungen Jahren hat Kant eine solche Möglichkeit durchaus ins Auge gefasst: „Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumes-Arten wäre ohnfehlbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte. Die Unmöglichkeit, die wir bei uns bemerken, einen Raum von mehr als drei Abmessungen uns vorzustellen, scheint mir daher zu rühren, weil unsere Seele ... die Eindrücke von draußen empfängt."[61] In der ersten Auflage seiner *Kritik der reinen Vernunft* präzisiert Kant diese Argumentation: „Man würde also nur sagen können, so viel zur Zeit noch bemerkt worden, ist kein Raum gefunden worden, der mehr als drei Abmessungen hätte."[62] Man kann diese Passagen durchaus als einen Auftrag an die Mathematiker deuten, welcher dann später von Riemann in seinem Habilitationsvortrag ausgeführt wird. In jedem Fall hat Kant die begriffliche Konsistenz

[57] Kant: KdrV B 146
[58] Ebd., B 268/269
[59] Ebd., B 146
[60] Ebd., B 741
[61] Kant: Werke I, S.35
[62] Kant: KdrV A 24

von Geometrien, die sich von der dreidimensionalen euklidischen Geometrie unterscheiden, durchaus in Erwägung gezogen. Er war aber offensichtlich darüberhinaus der Meinung, dass allein die euklidische Geometrie in reiner Anschauung darstellbar und somit konstruierbar sei. Dass Felix Klein einmal nichteuklidische Geometrien in reiner Anschauung darstellen würde, hat Kant für ausgeschlossen gehalten. Deshalb würde ich dem von Mathematikern wiederholt erhobenen Vorwurf, Kant habe das Apriorische in der Geometrie überschätzt, die folgende These als Alternative entgegenhalten: Kant hat nicht das Apriorische überschätzt, sondern die Anschauung unterschätzt. Das passt auch recht gut zusammen mit Einsichten der Wahrnehmungspsychologie, wonach das menschliche Anschauungsvermögen durch Förderung verbessert werden kann.

Nochmals soll Kant im Original zu Wort kommen: „Nun kann der Gegenstand einem Begriffe nicht anders gegeben werden, als in der Anschauung, und, wenn eine reine Anschauung noch vor dem Gegenstande a priori möglich ist, so kann doch auch diese selbst ihren Gegenstand, mithin die objektive Gültigkeit, nur durch die empirische Anschauung bekommen, wonach sie die bloße Form ist. Also beziehen sich alle Begriffe und mit ihnen alle Grundsätze, so sehr sie auch a priori möglich sein mögen, dennoch auf empirische Anschauungen, d.i. auf Data zur möglichen Erfahrung. Ohne dieses haben sie gar keine objektive Gültigkeit, sondern sind ein bloßes Spiel ... Man nehme nur die Begriffe der Mathematik zum Beispiele, und zwar erstlich in ihren reinen Anschauungen. Der Raum hat drei Abmessungen, zwischen zwei Punkten kann nur eine gerade Linie sein, etc. Obgleich alle diese Grundsätze, und die Vorstellung des Gegenstandes, womit sich jene Wissenschaft beschäftigt, völlig a priori im Gemüt erzeugt werden, so würden sie doch gar nichts bedeuten, könnten wir nicht immer an Erscheinungen (empirischen Gegenständen) ihre Bedeutung darlegen.“[63] Die Entwicklung der Mathematik in den vergangenen zweihundert Jahren ist ganz sicher nicht uneingeschränkt kompatibel mit jener philosophischen Deutung von Mathematik, die Kant im Rahmen seiner kritischen Philosophie gegeben hat. Insofern ist eine sorgfältige Auseinandersetzung mit Kants Philosophie der Mathematik nicht nur zulässig, sondern sogar dringend notwendig. Aus gutem Grund gibt es ja auch eine umfangreiche Sekundärliteratur über Kants Philosophie der Mathematik. Aber der ständig wiederholte Vorwurf, bei Kant werde das a priori ungebührlich überschätzt und gleichzeitig der Erfahrung zu wenig Bedeutung zuerkannt, lässt sich wirklich nicht aufrecht erhalten.

[63] Kant: KdrV B 299

Literatur

Bernays, Paul: Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1976

Cantor, Georg: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Hrsg. von Ernst Zermelo. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980

Cassirer, Ernst: Versuch über den Menschen. Einführung in die Philosophie der Kultur. Frankfurt/M.: Fischer 1990

Gaiser, Konrad: Platons Zusammenschau der mathematischen Wissenschaften. Antike und Abendland Bd. 32 (1986), S.89-124

Gauss, Carl Friedrich – Schumacher, Heinrich Christian: Briefwechsel. Hrsg. von C.A.F. Peters. Band IV. Hamburg: Esch 1862

Gauss, Carl Friedrich: Werke. Hrsg. von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen. Band VIII. Leipzig: Teubner 1900

Gödel, Kurt: Collected Works Vol.III, ed. by Solomon Feferman. New York – Oxford: Oxford University Press 1995

Hasse, Helmut: Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht. Wiesbaden: Verlag für angewandte Wissenschaften 1952

Heidegger, Martin: Die Frage nach dem Ding. Tübingen: Niemeyer 1992

Hersh, Reuben: Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics. Advances in Mathematics Bd.31 (1979), S.31-50

Hersh, Reuben: What is mathematics, really? New York – Oxford: Oxford University Press 1997

Hilbert, David: Gesammelte Abhandlungen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970

Hilbert, David: Wissen und mathematisches Denken. Vorlesung 1922/23. Ausgearbeitet von W. Ackermann. Überarbeiteter Nachdruck, Göttingen: Mathematisches Institut 1988

Kant, Immanuel: Werke. Hrsg. von Wilhelm Weischedel. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1983

Koenigsberger, Leo: Die Mathematik eine Geistes- oder Naturwissenschaft? Jahresbericht der DMV Bd.23 (1914), S.1-12

Kummer, Ernst Eduard: Collected Papers. Ed. by André Weil. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1975

Mac Lane, Saunders: Mathematics – Form and Function. New York – Berlin – Heidelberg – Tokyo: Springer 1986

Maddy, Penelope: Naturalism in Mathematics. Oxford: Clarendon Press 1997

Mittelstraß, Jürgen: Die geometrischen Wurzeln der platonischen Ideenlehre. Gymnasium Bd. 92 (1985), S.399-418

Nikolaus von Kues: Dreiergespräch über das Können-Ist. Hamburg: Meiner 1973

Nikolaus von Kues: Die belehrte Unwissenheit I,II. Hamburg: Meiner 1977/79

Nikolaus von Kues: Über den Beryll. Hamburg: Meiner 1977

Nikolaus von Kues: Die mathematischen Schriften. Hamburg: Meiner 1980

Patzig, Günter: Platons Ideenlehre, kritisch betrachtet. In ders.: Tatsachen, Normen, Sätze. Stuttgart: Reclam jun. 1980, S.119-143

Purkert, Walter und Ilgauds, Hans Joachim: Georg Cantor 1845-1918. Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1987

Radbruch, Knut: Mathematik in den Geisteswissenschaften. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1989

Radbruch, Knut: Mathematik à la Philosophie – Philosophie à la Mathematik. Ein historischer Überblick. Mathematische Semesterberichte Bd.38 (1991), S.18-57

Radbruch, Knut: Philosophische Spuren in Geschichte und Didaktik der Mathematik. Mathematische Semesterberichte Bd.40 (1993), S.1-27

Radbruch, Knut: Mathematische Spuren in der Philosophie. Preprint Nr. 307 Fachbereich Mathematik: Kaiserslautern 1998

Reichel, Hans-Christian: Mathematik als Paradigma und Propädeutik der Philosophie. Mathematische Semesterberichte Bd.37 (1990), S.180-215

Reichel, Hans-Christian: Wie könnte/sollte die rezente Entwicklung der Mathematik deren Philosophie beeinflussen? In: Alfred Schramm (Hrsg.): Philosophie in Österreich 1996. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 1996, S.138-150

Resnik, Michael D.: Mathematics as a Science of Patterns. Oxford: Clarendon Press 1997

Riemann, Bernhard: Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. New York: Dover 1953

Robinson, Abraham: From a formalist’s point of view. Dialectica Bd.23 (1970), S.45-49

Thiel, Christian: Philosophie und Mathematik. Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1995

Toeplitz, Otto: Mathematik und Antike. Antike Bd.1 (1925), S.175-203

v.Weizsäcker, Carl Friedrich: Zeit und Wissen. München: Hanser 1992

Weyl, Hermann: Das Kontinuum und andere Monographien, New York: Chelsea Publ. Comp. 1973

Weyl, Hermann: Gesammelte Abhandlungen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1968