Die Riemann-Siegel-Integralformel für die Mellintransformation von Spitzenformen

Andreas Guthmann

ABSTRACT. An analogue of the classical Riemann-Siegel integral formula for Dirichlet series associated to cusp forms is developed. As an application of the formula, we give a comparatively simple proof of the approximate functional equation for this type of Dirichlet series.

Mathematics Subject Classification (1991): 11M41

0. Einführende Bemerkungen. Geeignete Integraldarstellungen Dirichletscher Reihen spielen in vielen Untersuchungen eine hervorragende Rolle. Ein wichtiges Beispiel ist eine auf Riemann zurückgehende Formel, die die Zetafunktion durch die Funktion

$$f(s) = \int_{0\searrow 1} \frac{x^{-s}e^{-\pi i x^2}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \mathrm{d}x$$

ausdrückt. Dabei ist der Integrationsweg eine Gerade parallel zur Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten, die die reelle Achse zwischen 0 und 1 schneidet, wie durch das Zeichen $0 \searrow 1$ angedeutet. Riemanns Formel lautet nun

$$\zeta(s) = f(s) + X(s)\overline{f(1-\overline{s})}, \; X(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}.$$

Diese Darstellung der Zetafunktion blieb lange Zeit unbemerkt, ehe sie Siegel Anfang der dreißiger Jahre publizierte [4]. Allgemein wird sie daher als *Riemann-Siegel-Integralformel* bezeichnet.

In Anbetracht der zahlreichen Anwendungen dieser Formel (vgl. [2]) stellt sich die Frage, ob nicht auch andere Dirichletreihen durch ähnliche Integrale darstellbar sind. Das trifft erwartungsgemäß auf Dirichlets L-Funktionen zu, da sich der Riemann-Siegelsche Beweis ohne weiteres auf diesen Fall verallgemeinern läßt [5]. Abgesehen davon sind aber bisher keine weiteren Integrale dieses Typs gefunden worden. In der vorliegenden Arbeit zeigen wir, daß auch Dirichletreihen, die mittels der Mellintransformation Spitzenformen f zugeordnet sind, solche Darstellungen gestatten. Der Beweis beruht auf der Einführung eines Parameters ξ in der Mellintransformation (man vergleiche dazu Satz 1 unten) und auf den Eigenschaften einer neuen Funktion, die in natürlicher Weise im Beweisgang auftritt und am einfachsten als Laplacetransformation der gegebenen Spitzenform anzusehen ist. Wird zunächst nur $\mathrm{Re}(\xi) > 0$ zugelassen, so ermöglicht die Tatsache daß f Spitzenform ist, gewisse Grenzübergänge mit $\mathrm{Re}(\xi) \to 0$. Hier betrachten wir nur den Fall $\xi \to i$; betreffend der Möglichkeit $\xi \to i\frac{p}{q}$ mit beliebigem rationalen $\frac{p}{q} \neq 0$ vergleiche man die Bemerkungen am Ende von Abschnitt 2. Durchweg benutzen wir folgende Bezeichnungen. Es sei k eine gerade natürliche Zahl und S_k der $\mathbf{C}$-Vektorraum der Spitzenformen vom Gewicht k zur vollen Modulgruppe. Es gilt also $f \in S_k$ genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind ($\mathcal{H}$ ist die obere Halbebene):

I) $f : \mathcal{H} \to \mathbf{C}$ ist holomorph.

II) Es gilt $f(\frac{az+b}{cz+d}) = (cz+d)^k f(z)$ für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$, $z \in \mathcal{H}$.

III) f hat eine Fourierentwicklung der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}, \quad \mathrm{Im}(z) > 0.$$

Bekanntestes Beispiel ist die Diskriminantenfunktion

$$\Delta(z) = e^{2\pi iz} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi inz})^{24}$$

vom Gewicht 12, deren Fourierkoeffizienten

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi inz}$$

durch die Ramanujansche Taufunktion gegeben sind.

1. Modifikation der Mellintransformation. Sei $f \in S_k$ eine Spitzenform. Die zugeordnete Dirichletreihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s} \tag{1}$$

ist wegen $\sum_{n \leq x} a(n) = O(x^{\frac{k+1}{2}})$ [1] als holomorphe Funktion zunächst nur in der Halbebene $\sigma > \frac{k+1}{2}$ definiert. Absolute Konvergenz liegt für $\sigma > \frac{k}{2} + 1$ vor. Die analytische Fortsetzung von φ ergibt sich nun wie Hecke zeigte [1], über die Mellintransformation von f. Dazu benutzen wir hier und im folgenden stets die Funktion ψ, die durch

$$\psi(x) = f(ix) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{-2\pi nx}, \ \mathrm{Re}(x) > 0, \tag{2}$$

vereinbart sei. Offenbar ist dann ψ holomorph in der rechten Halbebene $\mathrm{Re}(x) > 0$. Aus der Transformationsgleichung II) folgt speziell mit der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

$$f(z) = z^{-k} f\left(-\frac{1}{z}\right),$$

bzw. mit $z = ix$

$$\psi(x) = (-1)^{\frac{k}{2}} x^{-k} \psi\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3}$$

Nun gilt

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-2\pi nx} x^{s-1} \mathrm{d}x, \ \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Summation über n liefert für $\sigma > \frac{k}{2} + 1$

$$R(s) = \int_0^{\infty} \psi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x, \tag{4}$$

mit

$$R(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s), \tag{5}$$

als der Mellintransformation von ψ. Da $\psi(x)$ für $x \to \infty$ und wegen der Funktionalgleichung (3) auch für $x \to 0$ exponentiell verschwindet, konvergiert das Integral (4) bei beliebigem $s \in \mathbf{C}$ und liefert die gesuchte analytische Fortsetzung von R und φ.

Wir modifizieren diese Darstellung von R wie folgt. Sei δ eine reelle Zahl, $0 \leq |\delta| < \frac{\pi}{2}$ und $\xi = e^{i\delta}$. Das Integral (4) kann um den Winkel δ gedreht werden, da der Integrand in der rechten Halbebene holomorph ist und für $\mathrm{Re}(x) \to \infty$ exponentiell abnimmt. Setzt man nämlich $x = re^{i\delta}$, $r \geq 0$, so ist $|x^s| = r^{\sigma} e^{-\delta t} = O(r^{\sigma})$ für festes t. Also gilt

$$R(s) = \int_0^{\xi\infty} \psi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x.$$

Aufspalten des Integrationsweges bei $x = \xi$ und Anwendung der Transformationsgleichung (3) liefert

$$\begin{aligned} R(s) &= \left(\int_0^{\xi} + \int_{\xi}^{\xi\infty}\right) \psi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x \\ &= \int_{\xi}^{\xi\infty} \psi(x) x^{s-1} + (-1)^{\frac{k}{2}} \int_0^{\xi} \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{s-k-1} \mathrm{d}x \\ &= \int_{\xi}^{\xi\infty} \psi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x + (-1)^{\frac{k}{2}} \int_{\xi^{-1}}^{\xi^{-1}\infty} \psi(x) x^{k-s-1} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Die Integrale können wieder um den Winkel $-\delta$ bzw. δ gedreht werden, so daß sie parallel zur positiven reellen Achse verlaufen. Es ist also demnach

$$R(s) = \int_{\xi}^{\xi+\infty} \psi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x + (-1)^{\frac{k}{2}} \int_{\xi^{-1}}^{\xi^{-1}+\infty} \psi(x) x^{k-s-1} \mathrm{d}x.$$

Nach Übergang zu $\varphi(s)$ ergibt sich daraus sofort

Satz 1: *Sei δ reell, $|\delta| < \frac{\pi}{2}$, $\xi = e^{i\delta}$. Dann gilt für alle $s \in \mathbf{C}$*

$$\varphi(s) = T_0(s, \xi) + (-1)^{\frac{k}{2}} X(s) T_0(k - s, \xi^{-1}),$$

mit den Funktionen

$$T_0(s, \xi) = (2\pi)^s \Gamma(s)^{-1} \int_{\xi}^{\xi+\infty} \psi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x,$$

und, falls $s \neq k, k+1, \ldots$

$$X(s) = (2\pi)^{2s-k} \frac{\Gamma(k-s)}{\Gamma(s)}.$$

Falls die Fourierkoeffizienten $a(n)$ reell sind (also etwa für normierte Eigenfunktionen der Heckealgebra), kann man die Formel des Satzes auch in der Form

$$\varphi(s) = T_0(s, \xi) + (-1)^{\frac{k}{2}} X(s) \overline{T_0(k - \overline{s}, \xi)}$$

schreiben.

Aus Satz 1 folgt in wohlbekannter Weise die Funktionalgleichung der Dirichletreihe φ. Dazu setze man $\xi = 1$ und benutze $X(k - s) = X(s)^{-1}$. Dann lautet Satz 1, indem man s durch $k - s$ ersetzt

$$\begin{aligned} \varphi(k - s) &= T_0(k - s, 1) + (-1)^{\frac{k}{2}} X(k - s) T_0(s, 1) \\ &= T_0(k - s, 1) + (-1)^{\frac{k}{2}} X(s)^{-1} T_0(s, 1) \\ &= (-1)^{\frac{k}{2}} X(s)^{-1} \varphi(s), \end{aligned}$$

oder

$$\varphi(s) = (-1)^{\frac{k}{2}} X(s) \varphi(k - s).$$

Wir untersuchen nun das in T_0 auftretende Integral

$$I(\xi) = \int_{\xi}^{\xi+\infty} \psi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x \tag{6}$$

genauer. Wir zeigen, daß hier der Grenzübergang $\delta \to \frac{\pi}{2}$, d.h. $\xi \to i$, vollzogen werden kann. Dazu schreiben wir

$$I(\xi) = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \psi(\xi + x)(\xi + x)^{s-1} \mathrm{d}x = I_0 + I_1.$$

Für I_1 erhält man unmittelbar

$$\lim_{\xi \to i} I_1 = \int_1^\infty \psi(i + x)(i + x)^{s-1} \mathrm{d}x = \int_1^\infty \psi(x)(i + x)^{s-1} \mathrm{d}x.$$

Zur Untersuchung von I_0 ziehen wir die Funktionalgleichung II) von f heran. Danach gilt für $\mathrm{Im}(z) > 0$

$$f\left(\frac{-1}{z+1} \right) = (z+1)^k f(z),$$

und daraus *a fortiori*

$$\psi(x) = (ix + 1)^{-k} \psi\left(\frac{1}{x - i} \right)$$

falls $\mathrm{Re}(x) > 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 \psi(\xi + x)(\xi + x)^{s-1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{\xi - i + x} \right) (i\xi + 1 + ix)^{-k} (\xi + x)^{s-1} \mathrm{d}x \\
&= \int_{\xi - i}^{\xi - i + \infty} \psi\left(\frac{1}{x} \right) (ix)^{-k} (i + x)^{s-1} \mathrm{d}x \\
&= i^{-k} \int_{(\xi - i + 1)^{-1}}^{(\xi - i)^{-1}} \psi(x) x^{k-2} (i + x^{-1})^{s-1} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Hier gilt $\lim_{\xi \to i} (\xi - i + 1)^{-1} = 1$ und $\lim_{\xi \to i} (\xi - i)^{-1} = \infty$. Der Integrand verschwindet wieder exponentiell an der oberen Intervallgrenze, so daß das Integral für $\xi \to i$ absolut konvergiert. Wir erhalten

$$\lim_{\xi \to i} I_0 = \int_1^\infty \psi(x) x^{k-2} (i + x^{-1})^{s-1} \mathrm{d}x.$$

Damit ist gezeigt, daß der Grenzwert $\lim_{\xi \to i} I(\xi) = \lim_{\xi \to i} I_0 + \lim_{\xi \to i} I_1$ existiert und mit (6) erhalten wir

$$I(i) := \lim_{\xi \to i} I(\xi) = \int_i^{i + \infty} \psi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \psi(x)(i + x)^{s-1} \mathrm{d}x.$$

Wir sind damit zu folgender Darstellung der Ergebnisse gelangt:

Satz 2: *Sei $f \in S_k$, $-\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}$, $\xi = e^{i\delta}$, $s \in \mathbf{C}$ und*

$$T_0(s, \xi) = (2\pi)^s \Gamma(s)^{-1} \int_\xi^{\xi + \infty} \psi(x) x^{s-1} \mathrm{d}x.$$

Dann existiert $T(s) := \lim_{\xi \to i} T_0(s, \xi)$ und es gilt

$$T(s) = (2\pi)^s \Gamma(s)^{-1} \int_0^\infty \psi(x)(i + x)^{s-1} \mathrm{d}x,$$

sowie

$$\varphi(s) = T(s) + (-1)^{\frac{k}{2}} X(s) \overline{T(k - \overline{s})},$$

falls die Fourierkoeffizienten von f reell sind. Andernfalls muß in der letzten Formel in $\overline{T(k-\overline{s})}$ die Funktion ψ durch $\overline{\psi}$ ersetzt werden.

Beweis: Die ersten beiden Behauptungen wurden eben gezeigt und die letzte folgt daraus und aus der im Anschluß an Satz 1 gemachten Bemerkung.

Differentiation liefert Formeln für die Ableitungen von φ und zwar

$$\varphi^{(m)}(s) = T^{(m)}(s) + (-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} X^{(\mu)}(s)\overline{T^{(m-\mu)}(k-\overline{s})}.$$

2. Die Integralformel. Zur Riemann-Siegel-Integralformel ist es jetzt nicht mehr weit. Benötigt wird aber eine neue Funktion F, die wir durch

$$F(z) = 2\pi \int_0^\infty e^{2\pi x z}\psi(x)\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Re}(z) < 1, \tag{7}$$

definieren. Da $\psi(x) = O(e^{-2\pi x})$ für $x \to \infty$, folgt die absolute und gleichmäßige Konvergenz des Integrals falls $\mathrm{Re}(z) \leq 1-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Also ist F in der linken Halbebene $\mathrm{Re}(z) < 1$ eine holomorphe Funktion. Es gilt überdies $F(z) = O(1)$ gleichmäßig in $\mathrm{Re}(z) \leq 1-\varepsilon < 1$.

Nun betrachte man das Integral

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda e^{2\pi i z} F(z) z^{-s} \mathrm{d}z. \tag{8}$$

Dabei ist Λ eine Schleife um die positive imaginäre Achse, die von $e^{-3\pi i/2}\infty$ bis $e^{-3\pi i/2}\varepsilon$ läuft ($0 < \varepsilon < 1$ beliebig), den Nullpunkt auf einem Kreis mit Radius ε im positiven Sinne umläuft, und dann von $e^{\pi i/2}\varepsilon$ nach $e^{\pi i/2}\infty$ zurückkehrt. Das Argument von z liegt also im Interval $-\frac{3\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$. Ist die Variable s in einem kompakten Gebiet der komplexen Ebene enthalten, so ergibt sich die absolute und gleichmäßige Konvergenz des Integrals. Daher ist I eine ganze Funktion. Wir nehmen nun vorläufig $\mathrm{Re}(s) < 1$ an. Dann kann der Radius ε des Kreises um den Nullpunkt beliebig klein und insbesondere $\varepsilon \to 0$ angenommen werden. Parametrisiert man die Teilstücke entlang der imaginären Achse wie oben mit $z = ue^{-3\pi i/2}$ bzw. $z = ue^{\pi i/2}$, $u \geq 0$ reell, so folgt

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{i}{2\pi i}\left(\int_\infty^0 e^{-2\pi u}F(iu)(e^{-\frac{3\pi i}{2}}u)^{-s}\mathrm{d}u + \int_0^\infty e^{-2\pi u}F(iu)(e^{\frac{\pi i}{2}}u)^{-s}\mathrm{d}u\right) \\
&= -\frac{i}{2\pi i}e^{\frac{\pi i s}{2}}\left(e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}\right)\int_0^\infty e^{-2\pi u}F(iu)u^{-s}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Hier setze man die Definition (7) von $F(iu)$ ein, so daß

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-2\pi u}F(iu)u^{-s}\mathrm{d}u &= 2\pi \int_0^\infty e^{-2\pi u}u^{-s}\int_0^\infty e^{2\pi i x u}\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}u \\
&= 2\pi \int_0^\infty \psi(x)\int_0^\infty e^{-2\pi u(1-ix)}u^{-s}\mathrm{d}u\mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^s\Gamma(1-s)\int_0^\infty \psi(x)(1-ix)^{s-1}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist wegen absoluter Konvergenz gerechtfertigt. Setzt man dies oben ein und berücksichtigt die Funktionalgleichung $\pi^{-1}\Gamma(1-s)\sin\pi s = \Gamma(s)^{-1}$ der Gammafunktion, so folgt unmittelbar

$$I(s) = (2\pi)^s\Gamma(s)^{-1}\int_0^\infty \psi(x)(x+i)^{s-1}\mathrm{d}s = T(s),$$

nach der Formel aus Satz 2. Diese Darstellung wurde zunächst nur für $\mathrm{Re}(s) < 1$ bewiesen. Analytische Fortsetzung zeigt nun die Gültigkeit von

Satz 3: *Für $s \in \mathbf{C}$ gilt für die in Satz 2 definierte Funktion T*

$$T(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Lambda e^{2\pi i z} F(z) z^{-s} \mathrm{d}z,$$

wobei F die in der Halbebene $\mathrm{Re}(z) < 1$ holomorphe Funktion

$$F(z) = 2\pi \int_0^\infty e^{2\pi x z} \psi(x) \mathrm{d}x$$

ist.

Mit diesem Ergebnis ist das gesuchte Analogon der Riemann-Siegel-Integralformel gefunden. Sie stellt die $f \in S_k$ zugeordnete Dirichletreihe φ als Integral der Funktion F dar. Ähnlich wie im Fall der Zetafunktion liegt hier die Frage nahe, ob man sie benutzen kann, um eine asymptotische Entwicklung der Dirichletreihe $\varphi(s)$ für festes σ und $|t| \to \infty$ herzuleiten. In der Tat ist dies möglich, wie gleich (Abschnitt 4) gezeigt wird, und führt zur einer erheblichen vereinfachten Herleitung der bisher bekannten approximativen Funktionalgleichung [3]. Als Vorbereitung ist allerdings eine eingehende Untersuchung der Funktion F notwendig. Wie aus der Definition im Satz hervorgeht, kann F im wesentlichen als die Laplace-Transformation von ψ bzw. f aufgefaßt werden.

Wir bemerken noch, daß man für die Ableitungen von T die Darstellung

$$T^{(m)}(s) = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \int_\Lambda e^{2\pi i z} \log^m z F(z) z^{-s} \mathrm{d}s$$

erhält. In Verbindung mit Satz 2 und der im Anschluß daran gezeigten Formel ergeben sich dann auch Riemann-Siegel-Integrale für die Ableitungen von φ.

Anstelle des oben durchgeführten Grenzüberganges $\xi = e^{i\delta} \to i$ (vgl. Satz 2) kann man auch allgemeiner für natürliche Zahlen p, q den Übergang $\xi = \frac{p}{q} e^{i\delta} \to \frac{p}{q} i$ betrachten. Diese Möglichkeit kommt in anderem Zusammenhang auch schon in einer Arbeit von A. Weil [7] vor. Es ergeben sich dann Verallgemeinerungen der Sätze 2 und 3, die zu einer unsymmetrischen Form der approximativen Funktionalgleichung führen.

3. Einfachste Eigenschaften der Laplacetransformation. Ein Vergleich der Formel für $\zeta(s)$ aus der Einleitung und derjenigen aus Satz 3 zeigt, daß die Laplacetransformation F aus (7) das „modulare“ Äquivalent der Funktion $\frac{2i}{\sin(\pi z)}$ darstellt. Die Eigenschaften dieser Funktion sind wohlbekannt, so daß man unmittelbar zur approximativen Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ gelangt. Im vorliegenden Fall müssen also zuerst die Eigenschaften von F geklärt werden. Zunächst gilt der fundamentale

Satz 4: *Ist $f \in S_k$ mit Fourierreihe (2) und F durch (7) definiert, so läßt sich F zu einer meromorphen Funktion in die ganze komplexe Ebene fortsetzen. Die Funktion F ist analytisch in allen Punkten $z \notin \mathbf{N}$. Im Punkt $z = n \in \mathbf{N}$ ist F analytisch oder hat einen einfachen Pol mit Residuum $-a(n)$, je nachdem ob $a(n) = 0$ oder $a(n) \neq 0$ ist.*

Beweis: F ist analytisch in $z = 0$ mit Taylorreihe

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{c_\nu}{\nu!} z^\nu, \quad c_\nu = \frac{\mathrm{d}^\nu F}{\mathrm{d}z^\nu}(0) = (2\pi)^{\nu+1} \int_0^\infty x^\nu \psi(x) \mathrm{d}x$$

nach (7). Vergleich mit der Mellintransformation (4) zeigt $c_\nu = (2\pi)^{\nu+1} R(\nu + 1) = \Gamma(\nu + 1)\varphi(\nu + 1)$. Sei n die kleinste natürliche Zahl mit $a(n) \neq 0$. Da $\varphi(\nu + 1) \sim a(n)$ für $\nu \to \infty$, konvergiert diese Reihe absolut falls $|z| < 1$. Nun sei m eine natürliche Zahl mit $m > \frac{k}{2} + 1$. Wir haben dann $\varphi(\nu) = \sum a(n)n^{-\nu}$ falls $\nu \geq m$ und für $|z| < 1$

$$zF(z) = \sum_{\nu=1}^{m-1} \varphi(\nu)z^\nu + \sum_{\nu=m}^{\infty} z^\nu \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-\nu} = \sum_{\nu=1}^{m-1} \varphi(\nu)z^\nu + z^m \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-m} \frac{1}{1-\frac{z}{n}}.$$

Hier konvergiert die unendliche Reihe wieder absolut falls $z \notin \mathbf{N}$, da $\sum a(n)n^{-m}$ absolut konvergent ist. Nach Division durch $z \neq 0$ können wir auch schreiben

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{m-1} \varphi(\nu)z^{\nu-1} + z^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-m+1} \frac{1}{n-z}. \tag{9}$$

Diese Formel gilt für alle $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{N}$, $m > \frac{k}{2} + 1$, und liefert die gesuchte analytische Fortsetzung von F. Daraus folgen auch alle übrigen Behauptungen, q.e.d.

Partielle Summation sichert unter Berücksichtigung von

$$A(t) := \sum_{n \leq t} a(n) = O(t^{\frac{k+1}{2}}) \tag{10}$$

die Konvergenz in (9) auch noch für $m = \frac{k}{2} + 1$. Es gilt also

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{\frac{k}{2}} \varphi(\nu)z^{\nu-1} + z^{\frac{k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{n-z}. \tag{11}$$

Daraus ergibt sich eine einfache Abschätzung der Größenordnung von $F(z)$, falls z keine natürliche Zahl ist. Man definiere dazu $M = \min\{|z-n| : n \in \mathbf{N}\}$, so daß $M > 0$ gilt. Wieder mit (9), (10) und partieller Summation ergibt sich dann

$$F(z) \ll M^{-1}|z|^{\frac{k}{2}} \log|z|, \quad |z| \geq 1, \tag{12}$$

gleichmäßig in M.

Als nächstes leiten wir eine Formel für $F(z)$ ab, die sich aus der Transformationseigenschaft (3) ergibt. Das Ergebnis erlaubt eine scharfe asymptotische Abschätzung von $F(z)$, die später oft benutzt wird.

Sei zunächst $\mathrm{Re}(z) < 0$ und zusätzlich $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \pi$. Mit (7) und (3) folgt

$$F(z) = (-1)^{\frac{k}{2}} 2\pi \int_0^\infty e^{2\pi xz} \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{-k} \mathrm{d}x.$$

Einsetzen der Fourierreihe (2) und Vertauschung von Integration und Summation liefert unter Beachtung von [6, S.183]

$$\int_0^\infty e^{-y-w^2/(4y)} \frac{\mathrm{d}y}{y^{\nu+1}} = 2\left(\frac{w}{2}\right)^{-\nu} K_\nu(w), \ \mathrm{Re}(w^2) > 0,$$

wobei K_ν die modifizierte Besselfunktion (Macdonalds Funktion) bedeutet,

$$F(z) = 4\pi i z^{\frac{k-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-\frac{k-1}{2}} K_{k-1}(-4\pi i\sqrt{nz}). \tag{13}$$

Unter $\sqrt{z}$ ist dabei der Hauptwert mit $\frac{\pi}{4} < \arg(\sqrt{z}) < \frac{\pi}{2}$ zu verstehen. Nun gilt aber [6, S.202]

$$K_\nu(w) \sim \left(\frac{\pi}{2w}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-w}, \quad w \to \infty, \ |\arg w| < \frac{3\pi}{2}.$$

Also konvergiert (13) absolut für $0 < \arg(z) < 2\pi$ und dies zeigt vermöge analytischer Fortsetzung und der Identität $K_\nu(e^{-\frac{\pi i}{2}}w) = \frac{\pi i}{2}e^{\frac{\pi i\nu}{2}}H_\nu^{(1)}(w)$ ([6, S.78]; $H_\nu^{(1)}$ ist eine Hankelfunktion) den

Satz 5: *Sei $f \in S_k$ und die Funktion F durch (7) definiert. Dann gilt in der längs der positiven reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene (d.h. $0 < \arg z < 2\pi$)*

$$F(z) = (-1)^{\frac{k}{2}}2\pi^2 iz^{\frac{k-1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-\frac{k-1}{2}}H_{k-1}^{(1)}(4\pi\sqrt{nz}).$$

Die erste Anwendung dieser Formel besteht in einer scharfen asymptotischen Abschätzung von $F(z)$. Dazu benutze man [6, S. 201] $H_{k-1}^{(1)}(z) \ll |z^{-\frac{1}{2}}e^{iz}|$ für $z \to \infty$, $0 \le \arg(z) \le \pi$. Da stets $a(n) = O(n^{\frac{k}{2}})$ gilt, ergibt sich sofort

$$F(z) \ll |z|^{\frac{k}{2}-\frac{3}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{1}{4}}e^{-4\pi\alpha\sqrt{n}}, \quad \alpha = \mathrm{Im}(\sqrt{z}) > 0. \tag{14}$$

Die letzte Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig, wenn man z auf das Gebiet $|z| \ge 1$, $\varepsilon \le \arg(z) \le 2\pi-\varepsilon$ mit festem $\varepsilon > 0$ einschränkt. Falls $\alpha = \mathrm{Im}(z) \ge 1$ ist, so hat man sogar $F(z) \ll \alpha^{-c}$ für jedes feste $c > 0$. Diese Eigenschaft werden wir oft benutzen.

4. Die approximative Funktionalgleichung. Als Anwendung von Satz 3 zeigen wir nun, wie die *approximative Funktionalgleichung* der Dirichletreihe φ hergeleitet werden kann. Diese Näherungsformel für $\varphi(\sigma + it)$, $|t| \to \infty$, stammt von Jutila [3]. Die dort angegebene Methode beruht auf der Verwendung gewisser Mittelwertoperatoren und ist wesentlich komplizierter als der hier mitgeteilte Beweis. In der Tat kann unsere Methode als einfachste Anwendung der Sattelpunktmethode angesehen werden und stellt damit die Übertragung der von der Zetafunktion bekannten Technik [2, 4] auf $\varphi(s)$ dar. Auch hier stellt sie den schnellsten Zugang zur approximativen Funktionalgleichung dar, sofern man die neuen Resultate der vorangegangenen Abschnitte als gegeben hinnimmt.

Sei $f \in S_k$ eine Spitzenform. Der Einfachheit halber nehmen wir an, f sei normierte Eigenfunktion der Heckealgebra, so daß dann alle Fourierkoeffizienten $a(n)$ reell sind. Wegen $\overline{\varphi(\sigma+it)} = \varphi(\sigma - it)$ darf man sich auf den Fall positiver Werte von t beschränken. Der Realteil σ von s sei in einem festen vertikalen Streifen $0 \le \sigma_0 \le \sigma \le \sigma_1$ enthalten. Außerdem nehmen wir $t \ge t_0$ mit einer hinreichend großen reellen Zahl t_0 an. Nach Satz 2 und 3 ist

$$\varphi(s) = T(s) + (-1)^{\frac{k}{2}}X(s)\overline{T(k-\bar{s})}, \quad T(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda e^{2\pi iz}F(z)z^{-s}\mathrm{d}s.$$

Es genügt also, das asymptotische Verhalten von $T(s)$ für $t \to \infty$ zu bestimmen. Daraus ergibt sich die Riemann-Siegel-Formel, da die asymptotische Entwicklung von $X(s)$ unmittelbar aus der Stirlingschen Formel folgt.

In Satz 3 werde der Integrationsweg Λ mit Hilfe des Satzes von Cauchy durch den Weg $W = W_1 \cup W_2 \cup W_3$ ersetzt, der folgendermaßen definiert ist. Dazu sei von nun an stets $N = \frac{t}{2\pi}$, $\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{4}}$. Wir wählen einen Parameter β mit $0 < \beta < 1$ ($\beta = \frac{3}{5}$ ist geeignet) und setzen $z_0 = N - \beta N\varepsilon$, $z_1 = N + \beta N\varepsilon$, sowie

W_1: $z = r + i\,\mathrm{Im}(z_0)$, $-\infty \le r \le \mathrm{Re}(z_0)$, Gerade von $-\infty + z_0$ bis z_0 parallel zur reellen Achse.

W_2: $z = N + rN\varepsilon$, $-\beta \le r \le \beta$, Strecke von z_0 bis z_1 parallel zur Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

W_3: $z = N + rN\varepsilon$, $r \ge \beta$, Strahl von z_1 bis $z_1 + e^{\frac{\pi i}{4}}\infty$.

Der Integrationsweg W läuft also durch den Punkt $N = \frac{t}{2\pi}$ auf der reellen Achse. Falls N eine natürliche Zahl ist, so werde der Pol des Integranden bei $z = N$ durch einen kleinen Halbkreis nach rechts umgangen, so daß die reelle Achse zwischen N und $N+1$ überschritten wird. Es folgt aus Satz 3 wegen Satz 4

$$T(s) = \sum_{n \le N}a(n)n^{-s} + \frac{1}{2\pi i}\int_W e^{2\pi iz}F(z)z^{-s}\mathrm{d}z. \tag{15}$$

Wir zeigen zuerst, daß die Teilintegrale über W_1 und W_3 vernachlässigt werden können. Wir benutzen hier oft die Tatsache, daß $F(z)$ für $\mathrm{Im}(\sqrt{z}) \to \infty$ nach (14) hinreichend klein ist.

Sei nun $\gamma_0 = \arg(z_0)$ und $y_0 = \mathrm{Im}(z_0)$. Auf W_1 ist $-\pi < \arg(z) \leq \gamma_0 = -\arctan\frac{\beta\sqrt{2}}{2-\beta\sqrt{2}}$, so daß

$$|e^{2\pi iz}z^{-s}| = |z|^{-\sigma}e^{-2\pi y_0 + t\arg(z)} \leq |z|^{-\sigma}e^{\sqrt{2}\beta t/2 + t\gamma_0} \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}N^{-\sigma}e^{-t\beta_1},$$

mit $\beta_1 = \arctan\frac{\beta\sqrt{2}}{2-\beta\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\beta$. Es folgt

$$\left|\int_{W_1} e^{2\pi iz}F(z)z^{-s}\mathrm{d}z\right| \ll t^{-\sigma}e^{-t\beta_1}\int_{W_1}|F(z)\mathrm{d}z| = O(e^{-t\beta_1}). \tag{16}$$

Dabei wurde wieder (14) verwendet. Auf W_3 ist $z = N(1+\varepsilon r)$mit $r \geq \beta$. Setzen wir $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, so ist $|e^{2\pi iz}z^{-s}| \leq N^{-\sigma}e^{-tf(r)}$, wo $f(r) = cr - \arctan\frac{cr}{1+cr}$. Es gilt $\arctan(x) \leq x$, so daß

$$f(r) \geq cr - \frac{cr}{1+cr} = c^2 r\frac{r}{1+cr} \geq c^2 r\frac{\beta}{1+c\beta}.$$

Also haben wir auch $|e^{2\pi iz}z^{-s}| \leq N^{-\sigma}e^{-t\beta_2 r}$ mit $\beta_2 = \frac{c^2\beta}{1+c\beta} = \frac{\beta}{2+\sqrt{2}\beta}$. Mithin ist

$$\left|\int_{W_3} e^{2\pi iz}F(z)z^{-s}\mathrm{d}z\right| \ll t^{-\sigma}\int_{\beta_1}^{\infty} e^{-t\beta_2 r}\mathrm{d}r = O(e^{-t\beta_1\beta_2}). \tag{17}$$

Da mit der Wahl $\beta = \frac{3}{5}$ sowohl β_1 als auch β_2 positiv und von t unabhängig ist, verschwinden die Integrale über W_1 und W_3 gemäß (16), (17) exponentiell für $t \to +\infty$.

Es bleibt die Untersuchung des Teilstückes entlang W_2. Es ist

$$\int_{z_0}^{z_1} = \int_{z_0}^{N-\varepsilon} + \int_{N-\varepsilon}^{N+\varepsilon} + \int_{N+\varepsilon}^{z_1} = J_1 + J_2 + J_3,$$

etwa, wobei das mittlere Integral J_2 geradlinig von $N-\varepsilon$ über $[N]+\frac{1}{2}$ nach $N+\varepsilon$ führt. Auf diesem Wege gilt $|\mathrm{Im}(z)| \leq 1$, $|\arg(z)| = O(t^{-1})$, so daß $|e^{2\pi iz}z^{-s}| \ll |z|^{-\sigma} = O(N^{-\sigma})$. Nach (12) ist $F(z) = O(|z|^{\frac{k}{2}}\log|z|)$ und somit $J_2 = O(t^{\frac{k}{2}-\sigma}\log t)$. In J_3 sei $z = N + r\varepsilon$ mit $1 \leq r \leq \beta$. Wie im Beweis von (17) ist $|e^{2\pi iz}z^{-s}| \leq N^{-\sigma}e^{-tf(r)}$ mit $f(r) \geq 0$ für $r \geq 0$. Außerdem ist $\mathrm{Im}(\sqrt{z}) = N^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Im}(1+r\varepsilon/N)^{\frac{1}{2}} \geq cr/\sqrt{N}$ mit einer passenden Konstanten $c > 0$. Mit (14) ergibt sich dann

$$J_3 \ll |z|^{-\sigma}\int_1^{\beta N}|F(N+r\varepsilon)|\mathrm{d}r \ll N^{-\sigma}\int_1^{\beta N}|N+r\varepsilon|^{\frac{k-1}{2}-\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}d(n)n^{-\frac{1}{4}}e^{-4\pi\sqrt{n}\,\mathrm{Im}\sqrt{N+r\varepsilon}}\mathrm{d}r,$$

mit $\mathrm{Im}\sqrt{N+r\varepsilon} \geq crN^{-\frac{1}{2}}$. Für geeignetes $c_1 > 0$ gilt daher

$$\begin{aligned} J_3 &\ll N^{\frac{k}{2}-\sigma-\frac{3}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}d(n)n^{-\frac{1}{4}}\int_1^{\infty}e^{-c_1 r\sqrt{n/N}}\mathrm{d}r \ll N^{\frac{k}{2}-\sigma-\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}d(n)n^{-\frac{3}{4}}e^{-c_1\sqrt{n/N}} \\ &\ll N^{\frac{k}{2}-\sigma}\log N, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wohlbekannte Abschätzungen der Teilersummenfunktion benutzt wurden. Die gleiche Größenordnung ergibt sich für das Integral J_1 (man benutze $F(\overline{z}) = \overline{F(z)}$) und somit ist

$$\left|\int_{W_2} e^{2\pi iz}F(z)z^{-s}\mathrm{d}z\right| \ll t^{\frac{k}{2}-\sigma}\log t. \tag{18}$$

Aus (16), (17), (18) folgt insgesamt

$$T(s) = \sum_{n \le t/2\pi} a(n) n^{-s} + O(t^{\frac{k}{2}-\sigma} \log t), \quad t \ge t_0.$$

Dies führt in Verbindung mit Satz 2 auf folgende Version der *approximativen Funktionalgleichung*:

Satz 6: *Sei $f \in S_k$, $t \ge t_0$ mit geeignetem $t_0 > 0$. Dann gilt*

$$\varphi(s) = \sum_{n \le t/2\pi} a(n) n^{-s} + (-1)^{\frac{k}{2}} X(s) \sum_{n \le t/2\pi} a(n) n^{s-k} + O(t^{\frac{k}{2}-\sigma} \log t)$$

gleichmäßig in $0 \le \sigma_0 \le \sigma \le \sigma_1$.

Natürlich liegt wie im Fall der Zetafunktion auch hier die Frage nahe, ob sich diese Approximation nicht verbessern ließe. Dies ist in der Tat der Fall, erfordert aber eine wesentlich genauere Untersuchung der Laplacetransformation F und gewisser Integrale der Form

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{0\nearrow} e^{\pi i z^2/N} F(z+N) z^l \mathrm{d}z, \quad N > 0, \ l \ge 0,$$

die bei Anwendung der Sattelpunktmethode in natürlicher Weise auftreten.

Literatur

[1] Hecke, E., Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Ann. **112**, 664-699 (1936).

[2] Ivić, A., The Riemann Zeta function, New York: Wiley 1985.

[3] Jutila, M., On the Approximate Functional Equation of $\zeta^2(s)$ and Other Dirichlet Series, Quarterly J. Math. Oxford Ser. **37**, 193-209 (1986).

[4] Siegel, C.L., Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik **2**, 45-80 (1932).

[5] Siegel, C.L., Contribution to the Theory of the Dirichlet L Series and the Epstein Zeta-functions, Ann. of Math. **44**, 143-172 (1943).

[6] Watson, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd edition, Cambridge: Cambridge University Press 1944.

[7] Weil, A., Remarks on Hecke's lemma and its use, Algebraic Number Theory Symposium, ed. by S. Iyanaga, Kyoto 1976.

Andreas Guthmann
FB Mathematik
Universität Kaiserslautern
D-67663 Kaiserslautern