Stücklisten und lineare Algebra

Florentine Bunke[*]
Horst W. Hamacher[*]
Andreas Maurer[†]
Stefanie Müller[*]

WiMS/TeMS-Report, Wirtschafts- und Technomathematik in Schulen

[*]Fachbereich Mathematik, Universität Kaiserslautern
[†]Allianz AG Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorüberlegungen

1.1 Warum betriebliche Planungs- und Entscheidungsprobleme im Mathematikunterricht ?

Mitte des Jahres 1997 hat die Veröffentlichung der sogenannten TIMMS-Studie (*Third International Mathematics and Science Study)* für erhebliche Aufregung in der deutschen Öffentlichkeit gesorgt. Ursache hierfür waren die von den deutschen Schülerinnen und Schülern am Ende der achten Jahrgangsstufe erzielten mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachleistungen, welche lediglich im internationalen Mittelfeld lagen, wobei insbesondere im mathematischen Bereich die Mehrzahl der nord-, ost-, und westeuropäischen TIMSS-Teilnehmerstaaten - ganz zu schweigen von den meisten asiatischen Ländern - deutlich bessere Leistungen erzielt hatten. Insgesamt musste den deutschen Schülerinnen und Schülern nicht nur ein Leistungsrückstand von mehr als einem Schuljahr gegenüber den europäischen Nachbarstaaten und wichtigsten Handelspartnern Deutschlands attestiert werden, sie wiesen darüber hinaus ein gravierendes Defizit im Bereich des konzeptionell-inhaltlichen Verständnisses von Mathematik auf. Diese Schwäche der deutschen Schülerinnen und Schüler, Routineaufgaben und offene Aufgabenstellungen durch das selbständige Anwenden von Gelerntem und dessen Übertragung in neue Kontexte nicht lösen zu können, bestätigte sich nochmals in dem 1999 erschienenen dritten Teil der oben genannten TIMMS-Studie. Auch innerhalb der neuen Untersuchungsphase der Sekundarstufe 2 lagen die Leistungen der deutschen Schülerinnen und Schüler in der Gruppe der vergleichbaren Länder weiterhin nur im unteren Mittelfeld, wobei sich die Abstände zu den leistungsstärkeren Ländern im Vergleich zur Mittelstufe noch vergrößert, zu den leistungsschwächeren Staaten dagegen verringert hatten. Insbesondere bei solchen Aufgaben, die den Schulkontext verlassen und für die Berufswelt als geradezu symptomatisch anzusehen sind, ergaben sich zum Teil erhebliche Defizite. So sind selbst unter den Schülerinnen und Schülern der mathematischen Leistungskurse nur 10% in der Lage, anwendungsbezogene Problemstellungen zu erschließen, zu strukturieren und mittels bereits bekannten mathematischen Verfahren erfolgreich zu lösen.

Als Reaktion auf die ernüchternden Ergebnisse der TIMSS-Studie wurden der bisherige mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht mehrheitlich als zu fertigkeitszentriert und zu vordergründig wissensorientiert beurteilt. Als Instrument zur Verbesserung der aktuellen Situation rückte - nachdem die mittelmäßigen deutschen Schülerleistungen offensichtlich nur wenig mit den verschiedenen Schulformen, aber viel den verwandten Lernformen zu tun hatten - das Konzept eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts verstärkt in den Mittelpunkt der fachdidaktischen Diskussion. Hintergrund dieses Ansatzes ist die wissenschaftlich fundierte Erkenntnis, dass die Förderung sowohl des sachsystematischen als auch des situativen Lernens die wesentliche Bedingung für den Erwerb intelligenten, flexibel nutzbaren Wissens ist. Mit anderen Worten: Neben einem wohlorganisierten disziplinären Wissenserwerb bedarf es von Anfang an einer Nutzung des erworbenen Wissens in lebensnahen, interdisziplinären und problemorientierten Kontexten, soll das prinzipiell verfügbare Wissen nicht tot, träge und ungenutzt bleiben.

In diesem Sinne verfolgt die Einbeziehung von Anwendungen in den Mathematikunterricht eine doppelte Zielsetzung. Zum einen wird damit ein vertieftes Verständnis der Situation angestrebt, die ohne mathematische Behandlung in wesentlichen Teilen nur lückenhaft verständlich wäre. Zum anderen wird durch das Aufzeigen des Werkzeugcharakters der Mathematik zur Lösung realer Problemsituationen eine wesentliche Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die Bewältigung von Aufgaben unseres Alltagslebens gewonnen. Der häufig in diesem Zusammenhang anzutreffende Hinweis auf die auch im bisherigen Unterricht weit verbreiteten ,,Textaufgaben" ist jedoch insofern nicht zielführend, da es sich hierbei in der Mehrzahl um lebensfremde Scheinprobleme, unechte Anwendungen und inhaltlich stark eingeengte Problemstellungen handelt, die von den Schülerinnen und Schülern auch als solche entlarvt werden.

Demgegenüber soll in der vorliegenden Handreichung der Versuch unternommen werden, den mathematischen Schulstoff aus konkreten, auf den ersten Blick durchaus anspruchsvollen und vielschichtigen Problemstellungen heraus zu entwickeln. Bezugspunkte hierfür sind reale, nur minimal in ihrer Komplexität reduzierte Anwendungen aus der Wirtschaftsmathematik, wie sie von der Arbeitsgruppe Mathematische Optimierung der Universität Kaiserslautern und der entsprechenden Abteilung des Instituts für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM) für Auftraggeber aus der Wirtschaft und Verwaltung bereits gelöst wurden. Kapitel 1.2 beschreibt eine solche Anwendung.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehen betriebswirtschaftliche Planungs- und Entscheidungsprobleme, wie sie von fast allen Wirtschaftsunternehmen zu treffen sind. Davon erhofft man sich ein größeres Interesse und eine damit verbundene Leistungssteigerung der Schülerinnen und Schüler.

Weiterhin stellt dieser Ansatz auch eine der ansonsten seltenen Möglichkeiten dar, den Anspruch des Mathematiklehrplans hinsichtlich der Trias *Anwendungsrelevanz, Interdisziplinarität* und *mathematische Modellierung* gerecht zu werden. So fordert beispielsweise der Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe in Rheinland-Pfalz explizit: ,,Eine weitere Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, Schülerinnen und Schülern den Prozess des Mathematisierens nahe zu bringen. Wo sich mathematische Mittel anbieten, ein Sachproblem zu strukturieren, wesentliche Aspekte eines komplexen Sachverhalts in einem Modell darzustellen und eine Lösung zu suchen, können Wechselbeziehungen zwischen Theorie und Praxis erfahren werden. (...) Schülerinnen und Schüler (...) sollen Beziehungen zwischen einem außermathematischen Sachverhalt und der Mathematik herstellen, das Problem mit mathematischen Mitteln bearbeiten, gefundene Lösungen interpretieren und kritisch beurteilen. Dabei sollen auch Grenzen der fachspezifischen Verfahren und Grenzen der Mathematisierung erkannt werden."

1.2 Anwendungsbeispiel aus der Wirtschaftsmathematik

In der betrieblichen Realität sind die Herstellungsverfahren nur sehr selten linear aufgebaut. Es dominieren vielmehr Produktionsstrukturen, bei denen die Montage nicht ,,stufig" in verschiedenen Produktionsebenen abläuft, sondern sowohl gewisse Ausgangsprodukte als auch bestimmte, zuvor aus diesen Ausgangsprodukten erstellte Zwischenprodukte in die Fertigung einbezogen werden.

Darüber hinaus sind selbst wechselseitige Verflechtungen im Produktionsprozess vorzufinden, bei denen dann beispielsweise ein Zwischenprodukt sowohl direkt in das Fertigprodukt als auch in die Herstellung weiterer Zwischenprodukte eingeht. Man spricht in diesem Fall von einer sogenannten **Kuppelproduktion**.

Das Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM) in Kaiserslautern löste folgendes Problem für ein großes deutsches Softwareunternehmen.

Abbildung 1.1 zeigt einen zyklischen Produktionsprozess, wie er sich zum Beispiel für Raffinerien oder chemische Industrien ergibt.

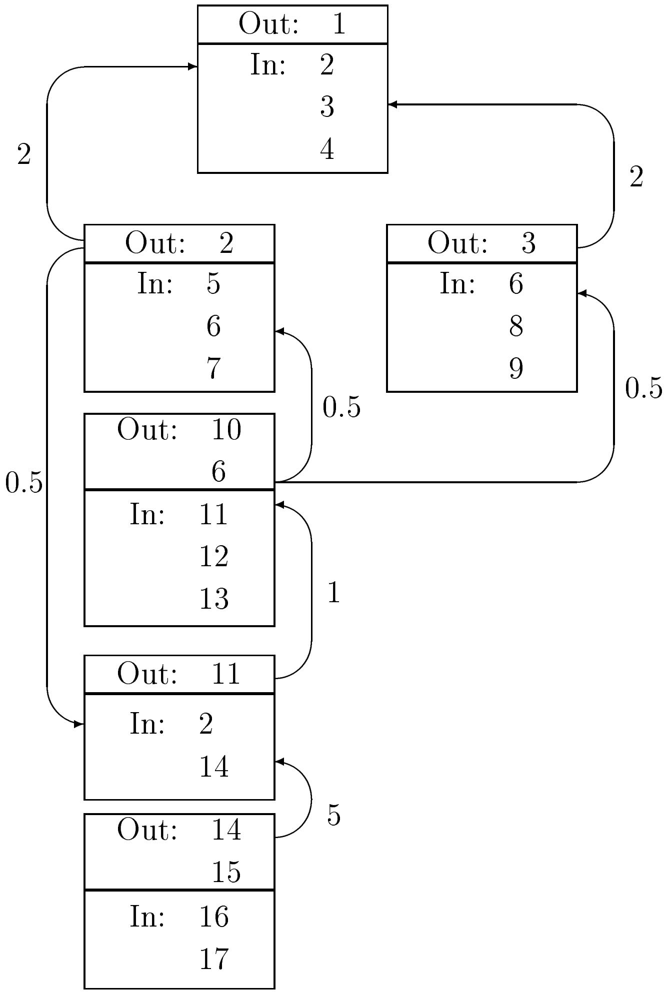

Abbildung 1.1: zyklischer Produktionsprozess

In der Abbildung ist zu erkennen, dass die Produkte mit den Nummern 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 17 in den Produktionsprozess zwar eingehen („In”), aber nicht von ihm selbst hervorgebracht werden. Man würde diese Produkte also besser als **Rohstoffe** bezeichnen. Die übrigen Produkte werden in verschiedenen Produktionsstufen hergestellt („Out”) und weiterverwertet. Am Beispiel von Produkt 2, das in Produktionsprozessen benötigt wird, die seinem eigenen übergeordnet (Produktionsprozess von Produkt 1) als auch untergeordnet (Produktionsprozess von Produkt 11) sind, ist leicht einzusehen, dass eine zyklische Verflechtung des Produktionsprozesses entsteht. Die Zahlen an den Pfeilen zwischen den verschiedenen Produktionsprozessen geben an, wieviele Mengeneinheiten eines Produktes in einen anderen Produktionsprozess eingehen.

Die Problematik besteht nun darin, verschiedene Parameter des Produktionsprozesses schnell berechnen zu können. Die verschiedenen Produktionsprozesse und die Lagerung von Rohstoffen, Zwischen- und Endprodukten verursachen Kosten. Die Rohstoffe müssen eingekauft werden. Der Verkauf von End- und eventuell auch von Zwischenprodukten dagegen bringt Einnahmen. Unter Berücksichtigung all dieser und eventuell auch noch weiterer Faktoren wird zum Beispiel versucht, einen maximalen Gewinn zu erzielen. Es wäre auch denkbar, bei vorgegebener Produktion die Produktionszeit oder die Umweltbelastung zu minimieren. Die Lösung des vom ITWM gelösten Problems würde an dieser Stelle der Handreichung sicher zu komplex sein. Deshalb sollen im weiteren zunächst vereinfachte Probleme behandelt werden, um schließlich diese konkrete Problemstellung in einzelnen Punkten betrachten zu können.

1.3 Teileverflechtung im Produktionsprozess

Als vereinfachte Problemstellung soll in Kapitel 2.1 die Thematik der Teileverflechtung in einem Produktionsprozess betrachtet werden, welche sich grundsätzlich in zwei unterschiedliche Fragestellungen untergliedert:

- Ausgehend von extern vorgegebenen Bestellungen soll der für die Herstellung bestimmter georderter Produkte benötigte Bedarf an Rohstoffen bestimmt werden.
- Wird die obige Problemstellung umgekehrt, so stellt sich die Frage nach dem nötigen Produktionsvolumen, um vorhandene Lagerbestände aufzubrauchen.

Kapitel 2

Lösung betriebswirtschaftlicher Fragestellungen mit Hilfe der Linearen Algebra

Die in Abschnitt 1.3 beschriebenen Aufgaben aus dem Bereich der betrieblichen Teileverflechtung lassen sich mit Hilfe von elementaren Inhalten der Linearen Algebra lösen.

2.1 Analyse betrieblicher Produktionsprozesse

Im Mittelpunkt der folgenden Ausführungen steht die Annahme, dass die Herstellung der einzelnen Güter in einem linearen mehrstufigen Prozess erfolgt. So stellt das zu untersuchende Unternehmen beispielsweise in der Abteilung A durch den Zusammenbau von verschiedenen Rohprodukten Zwischenprodukte her, welche dann nachfolgend in Abteilung B zu Endprodukten montiert werden. Eine solche, auf nur zwei Produktionsebenen beschränkte Montagestruktur verdeutlicht Abbildung 2.1.

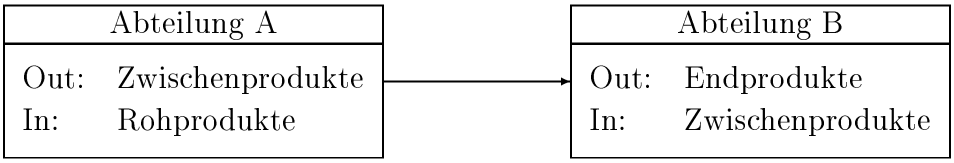

Abbildung 2.1: linearer, mehrstufiger Produktionsprozess

2.1.1 Berechnung des Rohstoffbedarfs bei vorgegebenen Bestellungen

Nun ist also ist der quantitative Zusammenhang zwischen extern vorgegeben Bestellungen und dem daraus resultierenden Rohstoffbedarf der Produktion gesucht.

Als Illustration kann das folgende leicht vereinfachte Beispiel der Produktionsstruktur der (fiktiven) Einrichtungsfirma ABC-Massivmöbel dienen:

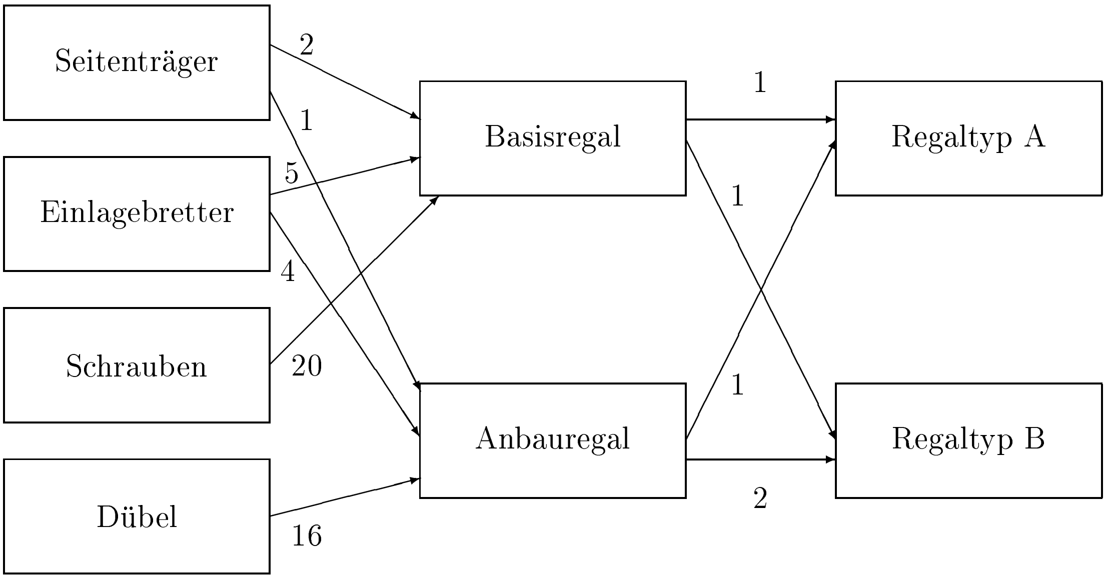

Abbildung 2.2: Materialfluss der Möbelfirma

Anhand des Materialfluss-Graphen in Abbildung 2.2 lässt sich der Materialbedarf für die Herstellung von zehn Regalen vom Typ A und fünf Regalen vom Typ B durch Abzählen bestimmen. So benötigt man allein hinsichtlich der fünf Regale vom Typ B $5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 20$ Seitenträger, $5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 4 = 65$ Einlagebretter, $5 \cdot 20 = 100$ Schrauben und $5 \cdot 2 \cdot 16 = 160$ Dübel.

Erhöht man nun die Zahl der möglichen Regaltypen, so wird der Rechenaufwand schnell sehr hoch. Die Zahl der selbst für dieses einfach gehaltene Beispiel nötigen Rechenschritte macht deutlich, dass an dieser Stelle ein geeignetes mathematisches Verfahren, welches ausgehend von den variierenden Aufträgen der Kunden die hierfür nötigen Rohstoffe geschlossen ausgibt, eine erhebliche Arbeitsersparnis beinhalten würde.

Was fehlt, ist eine **mathematische Modellierung** des Problems. Im ersten

Schritt erscheint es sinnvoll, die eingegangenen Bestellungen in Form einer Liste, der sogenannten **Stückliste**, zu notieren.[1] Neben dem Bestellvektor $\vec{x}$ lassen sich analog auch die Zwischen- und Rohprodukte durch die Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ darstellen.

Um die ursprüngliche Aufgabenstellung der Teilebedarfsrechnung zu vereinfachen können folgende Teilprobleme abgeleitet werden:

- Wieviel Zwischenprodukte jeder Sorte (Basisregal, Anbauregal) benötigt man, um eine Bestellung von Endprodukten (Regaltyp A und B) zu erfüllen?
- Wieviele Rohstoffe jeder Sorte (Seitenträger, Einlagebretter, Schrauben und Dübel) sind für die Herstellung einer bestimmten Anzahl von Zwischenprodukten nötig?

Zur Klärung der ersten Frage betrachtet man den fiktiven Bestellvektor $\vec{x} = \binom{10}{7}$. Den hierfür nötigen Bedarf an Zwischenprodukten entnimmt man dem Materialfluss-Diagramm aus Abbildung 2.2:

Anzahl der benötigten Basisregale: $y_1 = 10 \cdot \underline{1} + 7 \cdot \underline{1} = 17$

Anzahl der benötigten Anbauregale: $y_1 = 10 \cdot \underline{1} + 7 \cdot \underline{2} = 24$

Die unterstrichenen Werte lassen sich in einer Matrix zusammenfassen.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die auf diese Weise entstandene, sogenannte **Produktionsmatrix** P_1 veranschaulicht die Geschehnisse in der letzten Produktionsstufe.

Zurückgreifend auf das Skalarprodukt und die neue Form der Notation lässt sich nun die obige Rechnung sehr kompakt schreiben als:

$$\vec{y} = P_1 \cdot \vec{x} \tag{2.1}$$

Respektive mit den Zahlen des obigen Beispiels:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$$

[1] Hierdurch ergibt sich auf einfachem Wege die Möglichkeit zur Einführung des Vektorbegriffs als geordnetes Zahlen-n-Tupel.

Ganz analog lässt sich auch die zweite Frage nach den benötigten Rohstoffen bei vorgegebenen Zwischenprodukten lösen. Aus dem Materialfluss-Diagramm bestimmt man zunächst die entsprechende Produktionsmatrix P_2:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Für den Rohstoffbedarf für die erste Phase der Produktion gilt somit:

$$\vec{z} = P_2 \cdot \vec{y} \tag{2.2}$$

Damit ergibt sich für das Beispiel:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 181 \\ 340 \\ 384 \end{pmatrix}$$

Es werden also 58 Seitenträger, 181 Einlagebretter, 340 Schrauben und 348 Dübel benötigt, um die Bestellung zu erfüllen.

Aus den Gleichungen 2.1 und 2.2 folgt:

$$\vec{z} = P_2 \cdot P_1 \cdot \vec{x} \tag{2.3}$$

Man berechnet die Produktionsmatrix P für die gesamte Produktion:

$$P = P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 20 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \\ 20 & 20 \\ 16 & 31 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Aufarbeiten von vorhandenen Lagerbeständen

Sinngemäß gelten obige Überlegungen auch für die Umkehrung der Fragestellung, wenn also bei vorgegebenen Lagerbestand das maximal mögliche Produktionsvolumen bestimmt werden soll. Auch hier ist der reine Rechenaufwand erheblich, wobei die Aufgabe noch dadurch erschwert wird, dass der vorhandene Bestand an Rohstoffen sich unter Umständen nicht eindeutig den einzelnen Fertigprodukten zuordnen lässt. Dadurch müssen in der Regel zunächst einige der prinzipiell möglichen Varianten durchgespielt werden, bis man schließlich die im Sinne eines minimalen verbleibenden Lagerbestandes optimale Zuordnung findet.

In diesem Zusammenhang lässt sich nun die bisher betrachtete Aufgabe der Teilebedarfsrechnung bei linearer Produktionsstruktur noch erweitern, wodurch ein größerer ,,Realitätsgehalt” der Aufgabenstellung erzielt wird.

Problemstellung:
Da mittlerweile die von der Firma ABC-Massivmöbel hergestellten Regaltypen nicht mehr so stark nachgefragt werden, hat die Firmenleitung beschlossen, ein neues Design für die Regale zu entwerfen, die alten nicht mehr herzustellen und die noch vorhandenen Teile - bis auf die auch zukünftig zu verwendenden Schrauben und Dübel - auszuverkaufen. Bei einer Inventur des Lagers wurde festgestellt, dass noch 39 Seitenträger und 120 Einlagebretter vorhanden sind. Die Geschäftsleitung möchte möglichst keine Teile übrig behalten und sucht daher nach einer Regalzusammenstellung, die es ihr ermöglicht, den Restbestand als Sonderangebot so anzubieten, dass alle Seitenträger und Einlagebretter vollständig aufgebraucht werden. Das veränderte Materialfluss-Diagramm der Einrichtungsfirma ist in Abbildung 2.3 zusehen.

Zurückgreifend auf die in Kapitel 2.1.1 bereits gewonnenen Erkenntnisse wird der Materialfluss durch eine neue Produktionsmatrix P beschrieben.

$$P = P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$$

Im Unterschied zum zuvor ausgeführten Beispiel der Teilebedarfsrechnung wird nun jedoch die Fragestellung umgekehrt. Statt bei vorgegebenen Bestellvektor $\vec{x}$ den Rohstoffvektor $\vec{z}$ zu bestimmen, ist Letzterer nun bekannt und $\vec{x}$ ist gesucht. Das Matrix-Vektor-Produkt lautet:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 120 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

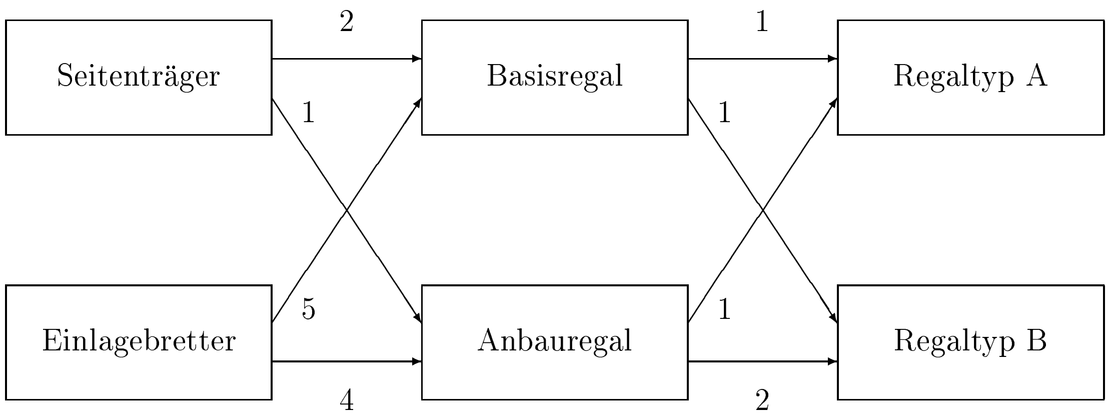

Abbildung 2.3: veränderter Materialfluss der Möbelfirma

Zur Berechnung der Inversen von $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$ sind zwei LGS zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weil die Systeme sich nur auf der rechten Seite unterscheiden, können die Rechnungen in einem Schema mit zwei rechten Seiten zusammengefasst werden:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 13 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 13 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 13 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{-4}{3} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix steht nach den Umformungen auf der rechten Seite. Somit lässt sich Gleichung 2.4 umschreiben zu:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} & \frac{-4}{3} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 39 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Mit dem noch vorhandenen Lagerbestand können somit - bei vollständiger Leerung des Lagers - neun Regale vom Typ A und drei Regale vom Typ B produziert werden. [2]

2.2 Das Stücklistenproblem

Wie bereits eingangs beschrieben, steht hier eine andere, der betrieblichen Realität stärker entsprechende Produktionsstruktur im Mittelpunkt als in Abschnitt 2.1. War zuvor der Materialfluss noch in einzelne Produktionsstufen getrennt, so benötigt man für die Montage eines Fertigprodukts an dieser Stelle neben gewissen Ausgangsprodukten auch Zwischenprodukte, die u. a. diese Ausgangsprodukte enthalten.

Das bereits vorgestellte mathematische Modell zur Beschreibung mehrstufiger linearer Produktionsprozesse liefert in diesem Fall jedoch falsche Ergebnisse. Das Ziel dieses Kapitels soll es demzufolge sein, für derartig strukturierte Unternehmen konkrete Stücklisten anzugeben, die nötig sind, um einen bestimmten Auftrag ausführen zu können (**Stücklistenproblem**).

Als Ergänzung und weitere Annäherung an die betriebliche Wirklichkeit sollen darüber hinaus nicht nur Fertigprodukte, sondern auch bestimmte Ersatzteile geordert werden können. Man denke in diesem Zusammenhang etwa an die Automobilindustrie, wo Vertragshändler sowohl Fahrzeuge verschiedener Typen als auch große Mengen an diversen Ersatzteilen ordern. Auf den gesuchten Stücklisten erscheinen dann sowohl die georderten Endprodukte und Ersatzteile, als auch alle für die Montage nötigen Einzelteile, so dass man den kompletten Materialbedarf, der für die Erfüllung eines Auftrags nötig ist, ablesen kann.

Beispiel:
Produziert wird die Baby-Wiege ,,Sofie" (vgl. Abbildung 2.4). Das entsprechende Materialfluss-Diagramm illustriert den nicht mehr linearen, mehrstufigen Produktionsprozess ohne wechselseitige Verflechtungen (vgl. Abbildung 2.5).

Aus der in Abbildung 2.5 dargestellten Fertigungsstruktur wird deutlich, dass die Produktion - dargestellt als Vektor $\vec{z}$ - nun sowohl die interne Nachfrage $\vec{a}$ als auch die externe Nachfrage $\vec{x}$, d.h. die Bestellungen der Kunden decken muss. Es

[2] Wird diese Problemstellung bereits in der Mittelstufe behandelt, steht das Lösen von linearen Gleichungssystemen im Vordergrund. Als Verfahren kommen hierbei in erster Linie die in der Sekundarstufe 1 vorgesehenen Substitutions-, Gleichsetzungs- und Eliminationsverfahren in Frage.

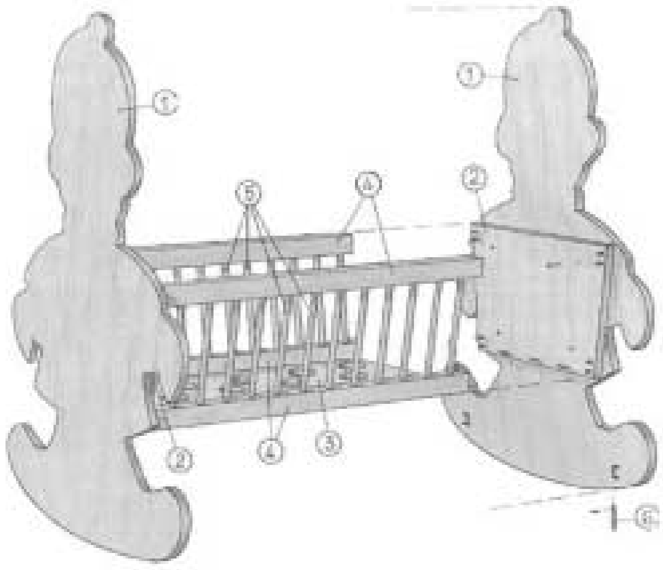

Abbildung 2.4: Baby-Wiege „Sofie" (1 =Kufenwände, 2 =Stirnplatten, 3 =Bodenplatte, 4 =Längszargen, 5 =Sprossen, 6 =Stopper)

folgt somit:

$$\vec{z} = \vec{a} + \vec{x} \tag{2.5}$$

Hinsichtlich der Besetzung der Vektoren $\vec{z}$, $\vec{a}$ und $\vec{x}$ ist es naheliegend, den Produktionsprozess aufzugreifen und ein Bauteil erst dann im Vektor erscheinen zu lassen, wenn alle Teile und Baugruppen, die es enthält, bereits aufgeführt sind.

Ein Beispiel für eine solche **technologische Reihenfolge** innerhalb der Vektoren wäre etwa:

$$\begin{pmatrix} \text{Anzahl der Schrauben} \\ \text{Anzahl der Dübel} \\ \text{Anzahl der Kufenwände} \\ \text{Anzahl der Stirnplatten} \\ \text{Anzahl der Stopper} \\ \text{Anzahl der Längszargen} \\ \text{Anzahl der Sprossen} \\ \text{Anzahl der Bodenplatten} \\ \text{Anzahl der Gatter} \\ \text{Anzahl der Liegen-Korpi} \\ \text{Anzahl der Seitenträger} \\ \text{Anzahl der Baby-Wiegen} \end{pmatrix}$$

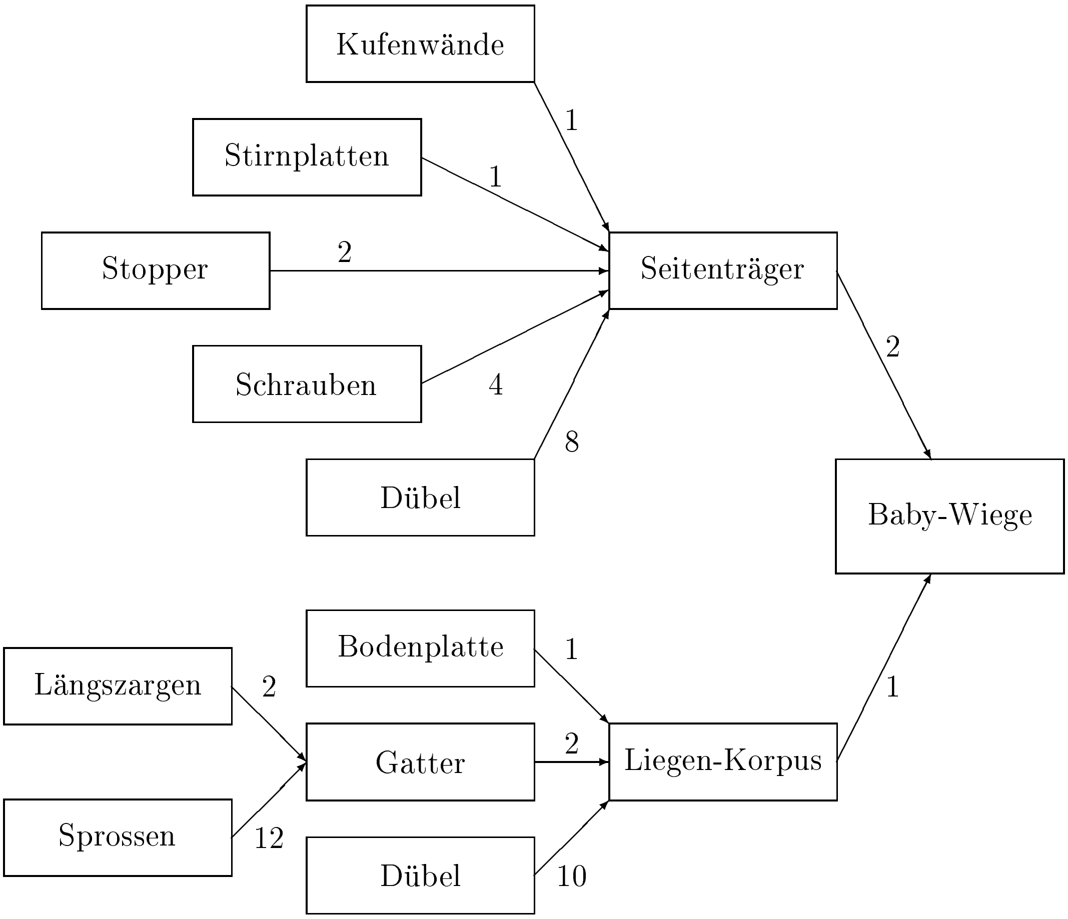

Abbildung 2.5: Materialfluss der Baby-Wiege ,,Sofie"

Eine auf diese Weise entstandene technologische Reihenfolge der Vektoren ist i.A. jedoch nicht eindeutig. So ist in obigem Beispiel etwa die Reihenfolge der ersten acht Einträge beliebig, da die dort aufgeführten Produkte als Rohstoffe in die Produktion eingehen.

Darüber hinaus besteht offensichtlich ein linearer Zusammenhang zwischen der internen Materialanforderung $\vec{a}$ und der vorgegebenen Produktion $\vec{z}$, d.h.:

$$\vec{a} = P \cdot \vec{z} \tag{2.6}$$

Die Einträge der 12×12-Matrix P sind zunächst noch unbekannt, er gilt aber infolge der Linearitätseigenschaft von Matrizen:

$$\begin{aligned} \vec{a} = P \cdot \vec{z} &= P \cdot (z_1 \vec{e_1} + z_2 \vec{e_2} + ... + z_{12} \vec{e_{12}}) \\ &= x_1 P \cdot \vec{e_1} + x_2 P \cdot \vec{e_2} + ... + x_{12} P \cdot \vec{e_{12}} \end{aligned}$$

wobei $\vec{e_i}$ die Standardbasisvektoren sind.

Welche Bedeutung haben nun die $P\vec{e_i}$?

$\vec{e_i}$ ist der Produktionsvektor für „genau ein Teil der Sorte i". So steht etwa $\vec{e_{10}}$ für die Produktion eines Liegen-Korpus.
$P\vec{e_i}$ gibt die interne Materialanforderung an, die nötig ist, um ein Teil der Sorte i herzustellen. Diese ist aber durch das Materialflussdiagramm bereits bekannt.
Das Ergebnis der Multiplikation $P\vec{e_i}$ ist gerade die i-te Spalte der Matrix P. Man erhält somit die Matrix P, indem man die $P\vec{e_1}$,...,$P\vec{e_{12}}$ als die Spalten von P auffasst und diese wiederum anhand des Materialflussdiagramms bestimmt.
Die Matrix P wird auch als **Mengenmatrix** bezeichnet. Für den obigen Fall lautet sie:

$$P = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&4&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&10&8&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Wählt man nun beispielsweise die neunte Spalte zur näheren Betrachtung aus, so erkennt man an ihr die Materialanforderungen zum Bau eines Gatters, nämlich zwei Längszargen und zwölf Sprossen.

Eigenschaften der Mengenmatrix P:
Alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind null, da zur Herstellung eines Teils dieses selbst nicht benötigt wird.
Alle Einträge, die unter der Hauptdiagonalen liegen, sind null, da aufgrund der technologischen Reihenfolge nur solche Teile verwendet werden können, die einen kleineren Index haben und Kuppelproduktionen darüber hinaus nicht vorkommen.

Die Matrix in diesem Beispiel enthält sehr viele Nullen, da der Produktionsprozess sehr einfach ist. Im Allgemeinen wird die Matrix mehr von null verschiedene Einträge enthalten, jedoch immer schwach besetzt sein.

Zur Berechnung des Produktionsvolumens $\vec{z}$ nach einer eingegangenen Bestellung $\vec{x}$ folgt zunächst aus den Gleichungen 2.5 und 2.6, dass gilt:

$$\begin{aligned} \vec{z} &= P\vec{z} + \vec{x} \quad \text{d.h.} \\ E\vec{z} &= P\vec{z} + \vec{x} \quad \text{, wobei } E \text{ die Einheitsmatrix ist.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (E - P)\vec{z} = \vec{x} \tag{2.7}$$

Der Rechenaufwand zur Lösung dieses linearen Gleichungssystems gestaltet sich aufgrund der sich bereits in oberer Dreiecksform befindlichen Matrix $(E - P)$ zwar sehr einfach, jedoch wäre das gefundene Verfahren für den Betrieb in der Praxis sehr beschwerlich, müsste doch für jede Bestellung das Gleichungssystem 2.7 gelöst werden.
Aus diesem Grund wäre folgende Umformung anzustreben:

$$\vec{z} = (E - P)^{-1}\vec{x} \tag{2.8}$$

Nach einer Bestimmung von $(E - P)^{-1}$ könnten die Auswirkungen unterschiedlicher Bestellungen auf den Produktionsprozess sehr leicht simuliert werden.

Wie bestimmt man nun aber $(E - P)^{-1}$?

Wurde die Inverse einer Matrix im Unterricht bereits behandelt, so gestaltet sich dieser Vorgang, abgesehen von recht hohem Rechenaufwand, weitgehend problemlos. Andernfalls bedient man sich der Korrespondenz zwischen Matrizen und Zahlen hinsichtlich ihrer Rechenoperationen:
Für eine reelle Zahl a, mit $\mid a \mid < 1$ gilt:

$$\begin{aligned} (1-a)^{-1} &= 1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n + ... \quad \text{(geometrische Reihe)} \\ \text{oder} \qquad 1 &= (1-a) \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n + ...) \end{aligned}$$

Gilt nun auch analog $E = (E - P) \cdot (E + P + P^2 + ... + P^n + ...)$?

Man überzeugt sich leicht, dass P nilpotent ist, d.h. es existiert ein $n_0 \in I\!N$, so dass $P^k = 0 \quad \forall k \geq n_0$. Es folgt:

$$\begin{aligned} &(E - P) \cdot (E + P + ... + P^{n_0 - 1}) = \\ &E + P + P^2 + ... + P^{n_0 - 1} - (P + P^2 + ... + P^{n_0}) = \\ &E - P^{n_0} = E \end{aligned}$$

Somit ist die Matrix $(E-P)$ invertierbar und für ihre Inverse gilt: $(E-P)^{-1} = E + P + P^2 + ... + P^{n_0-1}$ Damit lässt sich Gleichung 2.8 umschreiben zu:

$$\vec{z} = (E + P + ... + P^{n_0-1}) \cdot \vec{x} \tag{2.9}$$

Fallbeispiel:
Angenommen es würden bei einer bestimmten Bestellung neben vier Wiegen noch drei Längszargen und elf Sprossen geordert werden. In diesem Fall hätte der Bestellvektor $\vec{x}$ folgende Form:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von Gleichung 2.9 bestimmt sich $\vec{z}$ zu[3] :

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 8 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 24 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 104 \\ 8 \\ 8 \\ 16 \\ 19 \\ 107 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

[3]In diesem Beispiel ist $n_0 = 3$.

2.3 Lösung des Anwendungsbeispiels

Mit den in den Abschnitten 2.1 und 2.2 erarbeiteten mathematischen Modellen und Techniken soll versucht werden, das Anwendungsbeispiel aus Abschnitt 1.2 zu lösen.

Aus Abbildung 1.1 erhält man die Mengenmatrix P, indem man die nicht selbstproduzierten Produkte 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 16, und 17 nicht berücksichigt. Außerdem werden die Produkte 10 und 15 zwar hergestellt, aber im Produktionsprozess nicht weiterverwertet[4]. Deshalb können sie auch in der Mengenmatrix unberücksichtigt bleiben.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E - P)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.\bar{3} & 1.\bar{3} & 0.\bar{3} & 0.\bar{6} & 0.\bar{6} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.\bar{6} & 0.\bar{6} & 0.\bar{6} & 1.\bar{3} & 0.\bar{3} & 0 \\ 2.\bar{6} & 0.\bar{6} & 0.\bar{6} & 1.\bar{3} & 1.\bar{3} & 0 \\ 13.\bar{3} & 3.\bar{3} & 3.\bar{3} & 6.\bar{6} & 6.\bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

Um zum Beispiel eine Nachfrage von einer Mengeneinheit (ME) von Produkt 1 zu decken, benötigt man zur Herstellung:

[4]In der Realität kann man sich die Produkte 10 und 15 als Abfallprodukte vorstellen, die bei den Produktionsprozessen der Produkte 6 und 14 entstehen.

$3.\bar{3}$	ME von Produkt 2
2	ME von Produkt 3
$2.\bar{6}$	ME von Produkt 10
$2.\bar{6}$	ME von Produkt 11
$13.\bar{3}$	ME von Produkt 14