



Flavien Foko Foko

# Semi-analytische Kontaktmodellierung in Maschinenelementen

Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte

Band 46 | 2023

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Bernd Sauer

Prof. Dr.-Ing. Oliver Koch



*Research for Sustainability*



Lehrstuhl für  
Maschinenelemente,  
Getriebe und Tribologie

# Flavien Foko Foko

## **Semi-analytische Kontaktmodellierung in Maschinenelementen**

---

Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte

Band 46 | 2023

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Bernd Sauer  
Prof. Dr.-Ing. Oliver Koch

## **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

## **Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte**

Wissenschaftliche Schriftenreihe des  
Lehrstuhls für Maschinenelemente, Getriebe und Tribologie  
der Rheinland-Pfälzischen Technischen Universität Kaiserslautern-Landau

Herausgeber: Lehrstuhl für Maschinenelemente, Getriebe und Tribologie  
Prof. Dr.-Ing. Bernd Sauer  
Prof. Dr.-Ing. Oliver Koch  
Postfach 3049  
Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau  
67653 Kaiserslautern

Verlag: Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau

Druck: Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau  
Dezernat 5 Technik  
Abteilung 5.6 Foto-Repro-Druck

D-386

© Lehrstuhl für Maschinenelemente, Getriebe und Tribologie, 2023  
Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau  
Erwin-Schrödinger-Straße  
67663 Kaiserslautern

Alle Rechte vorbehalten, auch das des auszugsweisen Nachdrucks, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe (Photographie, Mikroskopie), der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und das der Übersetzung.

Als Manuskript gedruckt. Printed in Germany.

ISSN 1860-8035

# **Semi-analytische Kontaktmodellierung in Maschinenelementen**

Vom Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik  
der Technischen Universität Kaiserslautern  
zur Verleihung des akademischen Grades

**Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)**  
genehmigte  
**Dissertation**

von  
**Herrn Flavien Foko Foko, M.Sc.**  
aus Douala

Tag der Einreichung: 12.12.2022  
Tag der mündlichen Prüfung: 31.03.2023

Dekan: Prof. Dr. rer. nat. Roland Ulber  
Prüfungsvorsitzende: Prof. Dr.-Ing. Kritin de Payrebrune  
Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Bernd Sauer  
Prof. Dr.-Ing. Balázs Magyar

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Maschinenelemente Getriebe und Tribologie (MEGT) der Technischen Universität Kaiserslautern. Grundlage der Dissertation sind die Arbeiten im Teilprojekten C01: Morphologieeinfluss auf Wellenabdichtungen in der zweiten Förderperiode und T05: Einfluss der Oberflächenmorphologie auf die Wälzlagerlebensdauer unter Mischreibungsbedingungen in der dritten Förderperiode des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Sonderforschungsbereichs (SFB) 926: Bauteiloberflächen: Morphologie auf der Mikroskala sowie im Projekt FVA 866 I: Einfluss kurzfristiger Überlasten auf die Lebensdauer von Wälzlagern.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr.-Ing Bernd Sauer und Prof. Dr.-Ing Oliver Koch für die tolle Möglichkeit am Lehrstuhl für Maschinenelemente Getriebe und Tribologie zu promovieren. Die Zeit hier am Lehrstuhl hat mir auf der persönlichen Ebene sehr viel Spaß bereitet und auch auf professioneller Ebene wertvolle Erfahrung gebracht. Dank an Frau Prof. Dr.-Ing. Krittin de Payrebrun für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission

Dr.-Ing. Daniel Frölich und Prof. Dr.-Ing. Balázs Magyar möchte ich mich für die sehr wertvolle Anleitung in den Themen Dichtungstechnik und Simulation bedanken. Auch bei Prof. Daniel Nelias, dem Leiter des Instituts: Laboratoire de Mécanique des Contact et des Structures (LaMCoS) in Lyon für die große Hilfestellung beim Verständnis der Modellierungsansätze in der Kontaktmechanik bedanken.

Für die Unterstützung durch meine Kollegen möchte ich mich bedanken. Insbesondere bei Jun. Prof. Dr.-Ing. Manuel Oehler, Jun. Prof. Dr.-Ing. Stefan Thielen, Dr.-Ing. Christoph Burkhart, Julia Heimes, M.Sc., Dr.-Ing. Markus Hofmann, Dipl.-Ing. Lukas Rütth für die stets hilfreichen Diskussionen und ihre Unterstützung meiner Arbeit am MEGT.

Neben meinen Arbeitskollegen am Lehrstuhl und im SFB 926 möchte ich mich auch bei meinen Studentischen Hilfskräfte und Studien-/ Abschlussarbeiter, die mich auf wertvolle Weise in meiner Arbeit entlastet haben bedanken. Ein besonderer Dank geht an Dipl.-Ing. Peter Zimmermann und Dipl.-Ing. Bercaud Tiwo Nimpa.

Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, um meiner leiblichen Familie und meiner adoptierten Familie, der Familie Spies, meine aufrichtige Dankbarkeit auszudrücken. Euer Vertrauen in mich hat mich trotz Herausforderungen und Rückschlägen immer wieder dazu ermutigt, aufzustehen und weiterzumachen. Ein ganz besonderer Dank gilt meiner lieben Schwester

Motouom Foko Colette, die sich seit meiner Kindheit unermüdlich um meine Erziehung gekümmert hat. Ihre Hingabe ist unvergleichlich.

Meine Dissertation wäre unvollständig ohne den Dank an zwei ganz besondere Menschen in meinem Leben: meine Liebe Djuidja Fotso Celionthe Nikese und meinen Sohn Fotso Foko Divine Francois. Ihr seid meine größte Quelle der Motivation, Inspiration und bedingungslosen Liebe, und ich bin unendlich dankbar, euch an meiner Seite zu haben.

Kaiserslautern, Juni 2023

## Kurzfassung

Die tribologische Untersuchung von mechanischen Kontaktproblemen nimmt im Maschinenbau einen immer wichtigeren Platz ein. Sie ermöglicht ein tieferes Verständnis von Phänomenen wie Reibung und Verschleiß auf der Mikroebene und trägt zur Optimierung von Maschinenelementen bei. Eine große Herausforderung besteht darin, die Rechenzeit trotz der hohen Auflösung gering zu halten. Dazu bieten die Randelementmethoden eine große Rechenzeitoptimierung für eine Kategorie von Kontaktproblemen, die durch bestimmte Annahmen definiert werden. Die auf der Halbraumtheorie basierende semi-analytische Methode, die Gegenstand dieser Arbeit ist, gehört zu den Randelementmethoden. Die Halbraumtheorie beruht auf Grundannahmen wie beispielsweise dem linearen elastischen Materialverhalten oder der alleinigen Berücksichtigung lokaler Verformungsanteile. Diese verhindern die Anwendbarkeit der Methode auf spezielle Fälle in der Dichtungstechnik und im Wälzlager.

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein am Institut bereits vorhandenes semi-analytisches Kontaktmodell für den Normalkontakt mit linear elastischem Materialverhalten der Kontaktpaare erweitert werden, um eine Anwendung in der Dichtungstechnik und in Wälzlagern zu ermöglichen. Mit dem Modell sollen Reibung und Verschleiß im Dichtkontakt sowie Plastizität (Kontaktpressung- und Oberflächenveränderungen sowie belastungsinduzierte Eigenspannungen) und Materialinhomogenität im Wälzkontakt untersucht werden können.

Eine Modellvalidierung wird in den beiden Anwendungsfällen durch Vergleich mit experimentellen Messergebnissen durchgeführt.

## **Abstract**

The tribological investigation of mechanical contact problems is becoming increasingly important in mechanical engineering. It enables a deeper understanding of phenomena such as friction and wear at the micro level and contributes to the optimisation of machine elements. A major challenge is to keep the computation time low despite the high resolution. For this purpose, the boundary element methods offer a great computational time optimisation for a category of contact problems defined by certain assumptions. The semi-analytical method based on the half-space theory, which is the subject of this work, belongs to the boundary element methods. The half-space theory is based on basic assumptions such as linear elastic material behaviour or the only consideration of local deformation components. These limit the applicability of the method to special cases in sealing technology and rolling bearings.

Within the scope of this work, a semi-analytical contact model for normal contact with linear elastic material behaviour of the contact pairs, which already exists at the institute, is to be extended in order to enable an application in sealing technology and in rolling bearings. With the model, friction and wear in the sealing contact as well as plasticity (contact pressure and surface changes as well as load-induced residual stresses) and material inhomogeneity in the rolling contact should be able to be investigated.

A model validation is carried out in the two application cases by comparison with experimental measurement results.



# Inhalt

Nomenklatur	V
<b>1 Kontaktproblem in technischen Anwendungen</b>	<b>1</b>
1.1 Aspekte eines Kontaktproblems	1
1.2 Lösungsmethode in der Kontinuumsmechanik	6
1.3 Ziel der Arbeit	9
<b>2 Grundlage der Halbraummodellierung</b>	<b>11</b>
2.1 Linear elastisches Halbraummodell	11
2.2 Kontaktmodellierung	17
2.3 Fourier-Transformation im Halbraum-Kontaktmodell	24
<b>3 Numerische Umsetzung des Halbraumkontaktmodells</b>	<b>26</b>
3.1 Konjugierte-Gradient-Methode als Gleichungssystemlöser	28
3.2 Normal-Kontaktalgorithmus nach POLONSKY und KEER	34
3.3 Tangential Kontaktalgorithmus	37
3.4 DC-FFT Methode in der Kontaktsimulation	42
<b>4 Aufbau und Implementierung eines 3D Halbraummodells mit Plastifizierung</b>	<b>47</b>
4.1 Bestimmung der plastischen Dehnungen	51
4.2 Eigenspannungsberechnung im Halbraummodell	58
<b>5 Materialheterogenität im Halbraum-Kontaktmodell</b>	<b>64</b>
5.1 Anwendung der Eshelby-Lösung in der äquivalenten Inklusionsmethode	69
5.2 Implementierung der EIM und Integration im Kontaktalgorithmus	70
5.3 Verifikation der implementierten EIM im Halbraummodell	71
<b>6 Anwendung in der Dichtungstechnik</b>	<b>75</b>
6.1 Bestimmung des Strukturdeformationseinflusses mittels FEM	76
6.2 Verschleißsimulation	82
6.3 Dichtfähigkeitsimulation	87
<b>7 Anwendung in der Wälzlagerberechnung</b>	<b>103</b>
7.1 Modellierungsansatz	105
7.2 FATEMI-SOCIE Ermüdungsansatz	106
7.3 Ergebnisse im Projekt FVA 866 I	110
7.4 Ergebnisse im Projekt T05N (SFB 926)	128

---

<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>144</b>
<b>A Anhang: Eingangsgrößen und Datenaufbereitung zur Verschleißsimulation im Dichtkontakt</b>	<b>146</b>
A.1 Geometrie der Kontaktpartner . . . . .	146
A.2 Bestimmung des Verschleißkoeffizients . . . . .	147
A.3 Materialparameter der Kontaktpartner . . . . .	150
<b>Literatur</b>	<b>152</b>

# Nomenklatur

## Parameteter der Elastizitätstheorie (Kapitel 2)

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$	Feldgrößen: Verschiebung, Verzerrung, Spannung	m,-,Pa
$dA, \vec{n}_j, \vec{t}_i$	Flächenelement, Normalenvektor am Flächenelement, Spannungsvektor am Flächenelement	$m^2,-, Pa$
$E, \nu$	Elastizitätsmodul, Poissonzahl	MPa,-
$\lambda, G$	Lamé-Materialkonstante, Schubmodul	MPa
$\sigma_F, \sigma_{F0}$	Materialfließspannung, Startfließspannung	MPa
$B_{sw}, C_{sw}, n_{sw}$	Parameter des Swiftverfestigungsmodells	MPa, -, -
$\varphi, \vec{\psi}$	skalaren und vektoriellen harmonischen Potentialen (PAPKOVICH-NEUBER Potentiale für einen homogenen Halbraum)	$m^2, m$
$\varphi^k, \psi_1^k, \psi_3^k$	PAPKOVICH-NEUBER Potentiale für einen Halbraum mit Schichten (k: index der jeweiligen Schicht)	$m^2, m, m$
$A^k, \dots, \bar{C}^k$	unbekannte Koeffizienten in PAPKOVICH-NEUBER-Potentiale im Frequenzbereich in der Schicht k	-
$m, n$	im Frequenzbereich transformierten Koordinaten $x$ und $y$	-, -

## Parameteter der Normal und Tangentialkontaktproblem (Kapitel 2)

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$ij, kl$	Indizes der Position des Auswertungspunkts (z.B. an dem die Verschiebung gerade bestimmt wird), und der Position an dem die Flächenpressung wirkt	-, -
$C_{ijkl}^{xx}, \dots, C_{ijkl}^{zz}$	Einflusskoeffizienten zur Bestimmung der Verschiebungsanteile (z.B. in x-Richtung aufgrund einer Flächenlast in z-Richtung: $C_{ijkl}^{xz}$ ) im Punkt ij aufgrund einer Flächenlast im Punkt kl	$mm^3/N$
$U_{ij}^x, U_{ij}^y, U_{ij}^z$	Verschiebungsanteile (in den Raumrichtungen x, y, z) im Punkt ij	mm, mm, mm

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$p_{ij}^z, q_{ij}^x, q_{ij}^y$	Flächenlasten (in Normalenrichtung: z, und Tangentialenrichtung: x, y) im Punkt ij	MPa, MPa, MPa
$F_z, F_x$	Normalkraft, Tangentialkraft	N, N
$F_{x1}, F_{x2}$	Aktions-Reaktionskräfte auf Körper 1 und 2	N, N
$\delta_1, \delta_2$	Körperschiebung der Körper 1 und 2 in normaler Richtung	mm, mm
$\delta_{x1}, \delta_{x2}$	Körperschiebung der Körper 1 und 2 in tangentialer Richtung	mm, mm
$s_{x1}, s_{x2}$	Gleitwege auf der Kontaktzone der Körper 1 und 2 in tangentialer Richtung	mm, mm
$p$	Kontaktpressung (z-Richtung)	MPa
$q_x, q_y$	Schubspannungskomponente (in x- und y Richtung) im Kontakt	MPa, MPa
$u_z, u_x$	Oberflächenverschiebung in z (normale) und x (tangentiale)-Richtung	mm, mm
$\Gamma_c, \Gamma_{sl}, \Gamma_{st}$	gesamte Kontaktzone, Gleitbereich und Haftbereich der Kontaktzone	mm <sup>2</sup> , mm <sup>2</sup> , mm <sup>2</sup>
$\mu$	Reibungskoeffizient	-
$L_{P_x}, L_{P_y}$	Periodenlänge bei der Festlegung des Berechnungsgebiets	mm, mm

### Parameter der numerischen Umsetzung des Halbraumkontaktmodells (Kapitel 3)

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$x_k, d_k, \alpha_k, r_k, \beta_k$	Parameter der Suchrichtungsmethode im aktuellen k. Iterationsschritt (Suchpunkt, Suchrichtung, Schrittweite in der Suchrichtung, Residuum, Orthogonalisierungsfaktor der Suchrichtungen)	-, -, -, -
$x_{k+1}, x_*$	nächster Näherungslösungspunkt, gesuchte Minimum	-, -
$g_{ij}$	aktueller Spalt im Berechnungspunkt ij	mm
$h_{ij}, u_{ij}^z, \delta_z$	Parameter zur Beschreibung der Spalt im Berechnungspunkt ij (initialer Spalt, Oberflächenverschiebung, Körperschiebung)	mm, mm, mm
$p_{ij}$	Kontaktpressung im Berechnungspunkt ij	MPa

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$d_{ij}, r_{ij}^p$	Abstiegsrichtung und Residuum im Berechnungspunkt ij	MPa, mm
$\zeta, G_{old}$	Hilfsvariablen des iterativen Prozess	-, -
$q_{ij}^x, q_{ij}^y$	Schubspannungen im Berechnungspunkt ij (in tangentielle x-, und y-Richtung)	MPa, MPa
$u_{qx}^x, u_{qy}^x$	Oberflächenverschiebungsanteile in x-Richtung aufgrund der Schubspannung in x- und y-Richtung	mm, mm
$u_{qx}^y, u_{qy}^y$	Oberflächenverschiebungsanteile in y-Richtung aufgrund der Schubspannung in x- und y-Richtung	mm, mm
$s_{ij}^x, s_{ij}^y$	Gleitwege in tangentielle x-, und y-Richtung im Berechnungspunkt ij	mm, mm
$\Pi_{kom}$	Gesamte komplementäre Oberflächendeformationsenergie	Nmm

### Parameter des 3D Plastifizierungsmodells (Kapitel 4)

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$P_{krit}$	krit. Flächenpressung zur Modellierung des 2D Plastifizierungsmodell	MPa
$F, dF$	Gesamtlast, Lastinkremente	N, N
$h_i$	die aktuelle Oberflächengeometrie der Kontaktpartner	mm
$h_i^*$	undeformierte Oberflächengeometrie der Kontaktpartner	mm
$u_r$	durch plastische Dehnungen verursachten Oberflächendeformation	mm
$\sigma_i, \sigma_e, \sigma_r,$	initiale Gesamtspannung, elastischer, und plastischer Anteil	MPa, MPa, MPa
$\delta p$	inkrementelle Kontaktpressung	MPa
$\delta u_r$	inkrementelle plastische Oberflächendeformation	mm
$\delta \varepsilon^p$	inkrementelle plastische Dehnung	-
$\delta \sigma_r$	inkrementelle plastische Spannung	MPa
$\delta \varepsilon^{pi}, \delta \varepsilon^{pf}$	plastischen Dehnungsinkremente vor und nach der Iteration	-, -
$\delta u_{ri}, \delta u_{rf}$	inkrementelle plastische Oberflächendeformation vor und nach der Iteration	mm, mm

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$\lambda_1, \lambda_2$	Relaxationsfaktor des plastischen Dehnungs- und Oberflächeninkrements	-, -
$F_f$	allgemeine Fließfunktion	MPa
$\sigma, \gamma, \hat{\gamma}$	Parameter der Fließfunktion: effektiven Spannung, der inneren isotropen und kinematische Verfestigungsvariable	MPa, -, -
$\kappa$	Verfestigungsgesetz	MPa
$s$	deviatorischer Anteil des Spannungstensors	MPa
$J_2$	2. Invariant des deviatorischen Spannungstensors	MPa
$\sigma_v$	von Mises-Vergleichsspannung	MPa

### Kontaktmodell mit Materialinhomogenität (Kapitel 5)

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$S_{ijkl}$	Eshelby Tensor	-
$C_{ijkl}^M, C_{ijkl}^I$	Materialsteifigkeit der Matrix und Inhomogenität	MPa, MPa
$\varepsilon^{tot}, \varepsilon^{el}$	Gesamtdehnung, elastische Dehnung	-, -
$\varepsilon^*, \varepsilon^c$	Eigendehnung, Zwangsdehnung	-, -
$\sigma^0, \varepsilon^0$	durch äußere Last verursachte Spannung und Dehnung im homogenen Material	MPa, -
$\sigma^{dis}, \varepsilon^{dis}$	durch Inhomogenität verursachte Störung des Spannungsfelds und Dehnungsfelds	MPa, -
$\Delta C_{mnkl}$	Steifigkeitsdifferenz zwischen der Matrix und der Inhomogenität	MPa

### Parameter der Verschleiß- und Dichtfähigkeitssimulation (Kapitel 6)

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$L_x$	Länge des Berechnungsgebiets in X (axiale) Richtung	mm
$L_y$	Länge des Berechnungsgebiets in Y (Umfangs-) Richtung	mm
$d_x, d_y$	Diskretisierungslänge in X (Axial), Y (Umfangs)-Richtung	mm
$F_r$	gesamt Radialkraft	N
$F_{mikro}$	Mikronormalkraft auf dem Berechnungsgebiet	N

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$F_{tx}$	Mikrotangentialkraft in x-Richtung auf einen Flächenelement	N
$u_{total}$	Gesamtoberflächenverschiebung im Dichtkontakt	mm
$u_{lokal}$	lokale Oberflächendeformationsanteil ohne Strukturdeformation (Biegung) der Dichtungsmembran	mm
$u_{struk}$	Oberflächendeformationsanteil aus der Strukturdeformation (Biegung) der Dichtungsmembran	mm
$u_{total}$	Gesamtoberflächenverschiebung im Dichtkontakt	mm
$K_{ij}$	Aus FE-Analyse ermittelte Einflusskoeffizient zur Bestimmung des Strukturdeformationsanteils im Halbraummodell	mm <sup>3</sup> /N
$V_{vol}, \Delta h$	Verschleißvolum und Verschleißinkrement (lokale Höhenänderung durch Verschleiß)	mm <sup>3</sup> , mm
$\alpha_a, \alpha_F$	Verschleißkoeffizient nach Archard, Fleischer	mm <sup>3</sup> /Nmm
$e_r$	Reibungsenergiedichte nach Fleischer	Nmm/mm <sup>3</sup>
$E_d, \Delta E_d$	gesamte, inkrementelle Reibungsenergie	Nmm
$s_{weg}$	gesamte Gleitweg	km
$M_{reib}$	Reibmoment	Nm
$\Delta E_1, \dots, \Delta E_3$	Arbeitsenergiebeiträge im Dichtkontakt	Nmm
$k_s$	linear Anstiegsfaktor der Reibungskraft	-

## Parameter der Lebensdauerberechnung (Kapitel 7)

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$\gamma_{a,eq}$	äquiv. Scherdehnungsamplitude in der kritischen Ebene	-
$\gamma_{max}$	max. Scherdehnungsamplitude in der kritischen Ebene	-
$k_e$	Normalspannungsempfindlichkeitskoeffizient	-
$\sigma_{ES}$	Eigenspannung in tangentielle Richtung	MPa
$\sigma_{nmax}$	max. Normalspannung senkrecht zur kritischen Ebene	MPa
$\tau_f$	zyklischer Schwingfestigkeitskoeffizient	-
$\gamma_f$	zyklischer Duktilitätskoeffizient	-
$b_y$	Schwingfestigkeitsexponent	-
$c_y$	Duktilitätsexponent	-
$N_f$	kritische Lastzyklenanzahl	Lastzyklen
$N_{IR}$	Anzahl der Innenringumdrehungen	U
$n_{IR}$	Drehzahl der Innenring	U/min

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$N_K$	Drehzahl der Käfig	U/min
$N_{freq,IR}$	Belastungsfrequenz am Innenring	U/min

## Indizes

Index	Bedeutung
x	Koordinatenrichtung x
y	Koordinatenrichtung y
z	Koordinatenrichtung z

## Mathematische Symbole und Operatoren

Symbol	Verwendung	Bedeutung
$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B$	Aussage A folgt aus B und umgekehrt
$\leftarrow$	$A \leftarrow B$	Bedingung B wird in der Aussage A gezwungen
$:=$	$A := B$	A wird per Definition gleich B gesetzt
:	$A : B$	FROBENUS-Skalarprodukt der Matrizen A und B
,	$\sigma_{ij,j}$	Part. Ableitung des Schubspannungstensor $\sigma_{ij}$ nach der Raumrichtung j
$\Sigma$	$\Sigma_{(i,j) \in \Gamma_c}$	Summe über alle Berechnungspunkte (i,j) innerhalb der Kontaktzone $\Gamma_c$
$\nabla$	$\nabla f(x)$	Gradient der Funktion $f$
*	$f * h$	lineare Faltung der zwei kontinuierliche Funktionen $f$ und $g$

## Allgemeine Funktionen

Index	Bedeutung
$f, h, g$	kontinuierliche Funktionen
$\tilde{F}, \tilde{H}, \tilde{G}$	Fourier-Transformation der kontinuierlichen Funktionen $f, h$ und $g$
$f^*, h^*$	Diskrete Funktionen (durch Abtastung aus den kontinuierlichen Funktionen $f, h$ gewonnen)



$\tilde{F}^*, \tilde{H}^*$  Diskrete Fourier-Transformation der Diskrete Funktionen  $f^*, h^*$

## Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Bedeutung
ACM	Polyacrylatkautschuk
CGM	Verfahren der konjugierten Gradienten in Englisch „Conjugated gradient method“
$C_{radial}$	radialer Lagerluft
$D_{Wk}, D_{IR}$	Wälzkörperdurchmesser, Durchmesser der Innenring
DC	diskrete Faltung in Englisch „discret convolution“
DFT	diskrete Fourier-Transformation
DC-FFT	Lösungsmethode der diskreten Faltung mittels FFT
DIN	Deutsches Institut für Normung
EHD	Elastohydrodynamik
EIM	Äquivalente Inklusionsmethode in Englisch „Equivalent Inclusion Method“
EN	Europäische Norm
FE	Finite Elemente
FEA	Finite Elemente Analyse
FT	Fourier-Transformation
FFT	Schnelle Fourier-Transformation in Englisch „Fast-Fourier-Transformation“
FKM	Fluorkautschuk
FVA	Forschungsvereinigung Antriebstechnik
IR, AR, $Wk_i$	Innenring, Außenring, Wälzkörper
ISO	International Organization for Standardization
IDFT	invers diskrete Fourier transformiert
KKT	KARUSH-KUHN-TUCKER Bedingungen
$L_{eff}$	Effektive Kontaktlänge
MEGT	Lehrstuhl für Maschinenelemente, Getriebe und Tribologie
MKS	Mehrkörpersimulation
NBR	Nitrilkautschuk
$N_{Wk}$	Anzahl der Wälzkörper
PAO	Polyalphaolefin
REM	Randelementmethode
RWDR	Radialwellendichtring

SAM	Semi-analytische Methoden
SFB	Sonderforschungsbereich
$V_{IR}, V_{kritisch}$	diskretisierter Innenring-Volumenbereich (Berechnungsvolumen), kritisches Volumelement im diskretisierten Innenring Volumenbereich
$\psi_E, \psi_A$	Winkelposition beim Einlauf und Auslauf aus der Lastzone

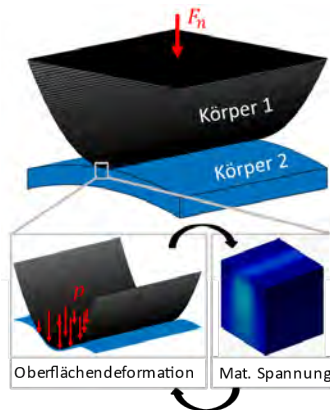
# 1 Kontaktproblem in technischen Anwendungen

Im Maschinenbau treten zwischen Maschinenelementen vielfältige Kontaktprobleme auf. Ihre Analyse erfordert meistens aufgrund deren Komplexität eine Interdisziplinarität in den Bereichen der *Mechanik*, *Oberflächenanalytik*, *Werkstoffkunde*, und *Tribologie*. Ziel dieses Kapitels ist es, zuerst eine Einführung in die verschiedenen Aspekte eines Kontaktproblems nach den aufgezählten Disziplinen zu geben. Danach werden die existierenden Lösungsmethoden für Kontaktprobleme vorgestellt. Zum Schluss wird das Ziel dieser Arbeit formuliert.

## 1.1 Aspekte eines Kontaktproblems

### Kontaktmechanik

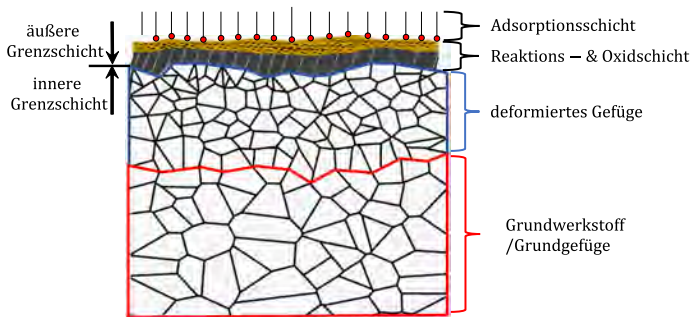
Aus mechanischer Sicht beschreibt ein Kontaktproblem (siehe Abbildung 1.1) die Verlagerungen und Deformationen durch eine äußere Belastung  $F_n$  zwischen zwei Körpern. Die Lösung stellt sich als ein iterativer Prozess dar, in der Oberflächen deformation und Materialspannungen infolge der Kontaktpressung  $p$  sich gegenseitig beeinflussen. Eine konvergierende Lösung zu dem Kontaktproblem wird erreicht, wenn keine signifikante Veränderung der Kontaktzone mehr festgestellt wird.



**Abb. 1.1:** Gegenseitige Beeinflussung von Oberflächen deformation und Materialspannungen beim Kontaktproblem

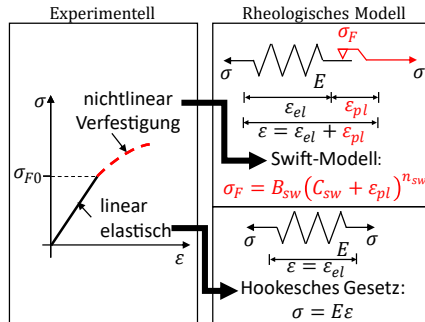
## Oberflächenmorphologie und Metallographie

Die Höhe der Kontaktpressung hängt maßgeblich von der Morphologie (Kombination aus der Topographie und chemischen-physikalischen Eigenschaften) der Oberflächen ab. Technische Oberflächen werden im Einsatz unterschiedlichen Beanspruchungen und Zerstörungsmechanismen ausgesetzt. Demzufolge liegt in der Aufrechterhaltung der Funktionsfähigkeit der Grund für die große Relevanz der Erzeugung anforderungsgerechter Eigenschaften technischer Oberflächen. Die Oberflächenanalytik als Disziplin beschäftigt sich mit der Untersuchung der Morphologie technischer Oberflächen. Mittels metallografischer Untersuchungen lässt sich wie in Abbildung 1.2 veranschaulicht, eine schichtförmige Heterogenität von metallischen technischen Oberflächen sichtbar machen. Im Wesentlichen wird im oberflächennahen Bereich zwischen einer äußeren und inneren Grenzschicht unterschieden.



**Abb. 1.2:** Schematische Darstellung einer metallischen technischen Oberfläche

Die äußere Grenzschicht steht in der Wechselwirkung mit dem Umgebungsmedium und besitzt meist eine vom Grundwerkstoff abweichende Zusammensetzung. Sie kann aus Adsorptionsschicht, Reaktions- und Oxidschichten sowie Verunreinigungen, Fett oder Ölfilm bestehen [Saeu16]. Die innere Grenzschicht bildet sich in einer deformierten und nicht deformierten Gefügezone aus, wobei die Erstere in vielen Forschungsthematiken von zentraler Bedeutung ist. Dieser Werkstoffbereich wird sehr stark vom Fertigungsverfahren beeinflusst und unterliegt oft den aus der mechanischen Bearbeitung resultierenden plastischen Verformungen und Eigenspannungen. Diese benötigen für ihre Ermittlung werkstoffkundliche Untersuchungen. Neben solchen Untersuchungen liefert die Werkstoffkunde Materialkenngrößen die häufig bei der Materialmodellierung benötigt werden, wie z.B. der Elastizitätsmodul, die Streckgrenze.



**Abb. 1.3:** Rheologisches Modell des elasto-plastischen Materialverhaltens aus experimentellen Zugversuchsergebnissen

Zur Veranschaulichung wird in Abbildung 1.3 die Modellierung eines elasto-plastischen Werkstoffverhaltens mittels experimentellen Zugversuches gezeigt. Die aus dem Zugversuch ermittelte Spannungsdehnungskurve zeigt zwei charakteristische Bereiche, einen nahezu linearen durch eine Startfließspannung  $\sigma_{F0}$  begrenzter Bereich von einem nichtlinearen Verfestigungsbereich, welcher auch plastischer Bereich genannt wird. Der lineare Bereich mit dem Elastizitätsmodul  $E$  als Materialparameter verhält sich rheologisch wie eine linear elastische Feder. Die Spannungen folgen hier dem Hooke'schen Gesetz. Im plastischen Teil setzt sich die Gesamtdehnung  $\varepsilon$  aus einem elastischen  $\varepsilon_{el}$  und einem irreversiblen plastischen Anteil  $\varepsilon_{pl}$  zusammen. Der plastische Spannungsanteil wird rheologisch durch ein Reibelement  $\sigma_F$  beschrieben. Dieses Reibelement beschreibt die Verfestigung (Veränderung der Startfließspannung in Abhängigkeit der plastischen Dehnungen) durch Modelle wie z.B das SWIFT Modell (siehe Abbildung 1.3), das in dieser Arbeit verwendet wird.

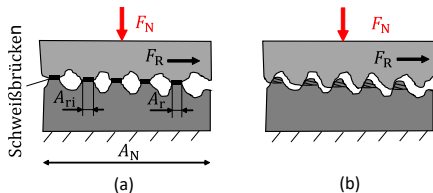
### Tribologie (Reibung, Verschleiß, Reibzustände)

Bei einer relativen Bewegung der Kontaktkörper kommen im Kontakt Reibungs- und Verschleißphänomene ins Spiel. Hier liefert die Tribologie als [GfT02] "Lehre der Wechselwirkungen zwischen Festkörper Oberflächen in Relativbewegung mit oder ohne Zwischenstoff" die theoretische und praktische Grundlage zur Untersuchung. Im Folgenden werden die Grundbegriffe der Tribologie erläutert.

Die Reibung ist eine Wechselwirkung zwischen sich berührenden Stoffbereichen von Körpern, die einer Relativbewegung entgegenwirkt [GfT02]. Sie führt zu einem Verlust an mechanischer Energie, die überwiegend in Wärme umgewandelt wird.

Zur Erklärung der Reibungsursache wurden zwei Hauptpostulate gemacht. Nach BOWDEN und TABOR [BoTa01] wurde als Hauptgrund zur Reibung zwischen metallischen

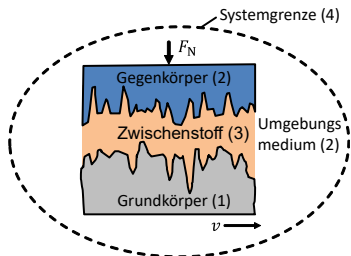
Oberflächen die Bildung und Scherung von Schweißbrücken, die sich aufgrund der hohen Beanspruchung an den Rauheitsgipfeln bilden [Weyh16] (siehe Abb. 1.4 (a)) genannt. Die Gesamtfläche dieser Schweißbrücken stellt die reale Kontaktfläche  $A_r$ , auf der der Kontakt erfolgt, dar.



**Abb. 1.4:** Postulate zur Reibungsursache.(a) infolge Verschleiß der Oberflächenteile nach BOWDEN und TABOR [BoTa01] (b) infolge Abscherung von Oberflächenteilen nach MING FENG [Ming52]

Die nominelle Kontaktfläche  $A_N$  hingegen ist die Überdeckungsfläche und setzt sich aus den realen Kontaktflächenteile  $A_{r_i}$ , die im direkten Kontakt stehen und solchen, die sich nicht berühren zusammen. Zum Scheren der realen Kontaktfläche  $A_r$  ist die Tangentialspannung  $\tau$  erforderlich. Somit gilt nach BOWDEN und TABOR für die Reibkraft  $F_R = \tau A_r$ . Hingegen wurde nach MING FENG [Ming52] die Reibung auf das mechanische Abscheren von ineinander verhakteten Oberflächenteilen zurückgeführt (siehe Abb. 1.4 (b)). Untersuchungen von HERBERTZ und CHO [HeCh83] zeigen, dass neben diesen beiden noch weitere Mechanismen wie Adhäsion und Scheren, plastische Deformation, Furchung, elastische Hysterese und Dämpfung in der Reibfläche auftreten.

Ein Ansatz der das heutige Verständnis der Reibung geprägt hat, ist der Ansatz des dritten Körpers nach GODET [Gode84; Gode90]. Aus diesem Ansatz entstand die Notwendigkeit Reibungsphänomene immer mit dem gesamten tribologischen System zu betrachten. Die Grundstruktur eines Tribo-technischen Systems besteht aus vier Elementen, dem Grundkörper, dem Gegenkörper, dem Zwischenstoff auch dritten Körper genannt und dem Umgebungsmedium (siehe Abb. 1.5).



**Abb. 1.5:** Schematische Darstellung der Grundstruktur eines Tribo-technischen Systems

Als Eingangsgröße des tribologischen Systems zählen die Normalkraft  $F_N$  und die Reibgeschwindigkeit  $v$ . Der Reibungskoeffizient  $\mu$  hingegen stellt sich in Abhängigkeit des Systemverhaltens ein. Die eingebrachte Energie  $E_{ein}$  im Reibkontakt kann durch das Produkt aus Normalkraft, Reibgeschwindigkeit sowie des Reibungskoeffizienten beschrieben werden und teilt sich in Wärmeenergie  $E_W$ , Verschleißenergie  $E_V$  und Materialumwandlungsenergie  $E_M$  auf [Weyh16]:

$$E_{ein} = F_N v \mu = E_W + E_V + E_M \quad (1.1)$$

Die Energiebeiträge in (1.1) lassen sich experimentell und semi-analytisch bestimmen. Die Wärmeenergie kann beispielsweise durch eine Temperaturmessung und das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung ermittelt werden. Nach [GfT02] wird der Begriff Verschleiß definiert als der fortschreitende Materialverlust aus der Oberfläche eines festen Körpers, hervorgerufen durch mechanische Ursachen, d.h. Kontakt- und Relativbewegung eines festen, flüssigen oder gasförmigen Gegenkörpers. Der Verschleißenergieanteil in (1.1) wurde beispielsweise von FLEISCHER [Flei85] untersucht. Zur Bestimmung des Energiebeitrages zur Materialumwandlung wurde in [SPS04] die Beziehung (1.1) verwendet.

Zur Beschreibung der Reibzustände eines tribologischen System wird häufig die Stribeckkurve [Weyh16] (siehe Abb. 1.6), in der der Reibungskoeffizient in Abhängigkeit eines Geschwindigkeitsparameter aufgetragen ist, eingesetzt. Hierbei wird als Reibungskoeffizient das Verhältnis der Bewegung entgegengesetzter Reibkraft zu der Normalbelastung des Tribosystems definiert. Der Geschwindigkeitsparameter  $V_s = \frac{qv}{F_N}$  hingegen wird aus der Gleitgeschwindigkeit  $v$ , der Schmiermittelviskosität  $\eta$  und der Normallast  $F_N$  errechnet. Die Stribeckkurve ermöglicht es drei Reibzustände zu identifizieren:

- **Trocken- oder Grenzreibung:** Zu Beginn bei keiner Relativbewegung zwischen den Kontaktpartnern herrscht zunächst eine Haftreibung. Die Feststoffe sind in direktem Kontakt (Trockenreibung) oder durch eine Adsorptionsschicht getrennt (Grenzreibung). Es resultiert ein hoher Reibwert.
- **Mischreibung:** In diesem Bereich herrscht eine kleine Relativbewegung zwischen Grund- und Gegenkörper. In einigen Bereichen stehen die Reibpartner noch in direktem Kontakt, während in anderen Bereichen der Schmierstoff, dessen Druck steigt, zur Unterstützung der angewandten Kraft beiträgt. Der Reibwert nimmt allmählich ab während die Relativbewegung zunimmt. Je mehr Schmierstoff sich zwischen den beiden Reibpartnern befindet, desto geringer wird die Reibung bis zu dem Punkt (Flüssigkeitsreibung), an dem beide Reibpartner vollständig durch den Schmierstoff voneinander getrennt sind.
- **Flüssigkeitsreibung:** In diesem Bereich liegt eine hohe Relativbewegung zwischen Grund- und Gegenkörper, die für die Ausbildung einer vollständigen und tragfähigen

Schmierstoffschicht sorgt. Hier steigt in Abhängigkeit der Schmierstoffviskosität und der Geschwindigkeit der Reibwert wieder an.

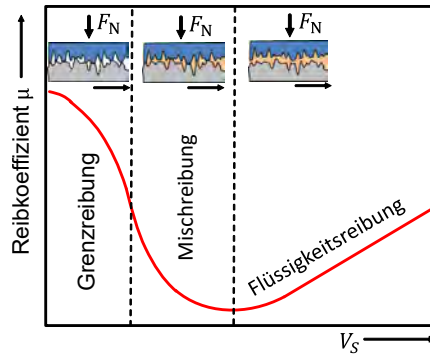


Abb. 1.6: Schematische Darstellung der Stribeckkurve

## 1.2 Lösungsmethode in der Kontinuumsmechanik

Die zwei großen Teilgebiete der Kontinuumsmechanik sind die Theorie der elastischen Strukturen (kurz Strukturmechanik oder Elastizitätstheorie) und die der fließenden Medien (kurz Strömungsmechanik). Eine schnelle Klassifizierung der Kontaktprobleme in der Strukturmechanik kann anhand der Krümmungsradien der Kontaktkörper in non-konforme und konforme Kontaktproblemen erfolgen. Bei non-konformen Kontaktproblemen ist häufig die Abmessung der Kontaktzone sehr klein im Vergleich zu den Krümmungsradien der Kontaktkörper. Dies erlaubt die Annahme eines Halbraums (siehe Abschnitt 1.2.1) bei der Beschreibung des Verhaltens der Kontaktkörper. Non-konforme Kontaktprobleme treten zwischen vielen Maschinenelementen auf (wie z.B. Wälzkontakt) und werden häufig als HERTZ'sche Kontaktprobleme bezeichnet. Im Folgenden werden Lösungsmethoden für hertzische und nicht hertzische Kontaktprobleme als auch allgemeine numerische und semi-analytische Methoden beschrieben

### 1.2.1 Hertz'sche Kontaktprobleme

Der HERTZ'sche Kontakt beschreibt den Kontakt zwischen zwei elastischen Körpern mit elliptischer Geometrie, die einer statischen Belastung oder Verschiebung ausgesetzt sind. Die HERTZ'sche Theorie beruht auf folgenden wichtigen Hypothesen [Chai12]:

- Elliptische Kontaktzone



- Kontaktflächen als ideal glatt angenommen und reibungsloses Kontaktproblem
- Kontaktkörper als elastische Halbräume betrachtet

Diese letzte Hypothese ist von entscheidender Bedeutung für die Anwendung der Theorie. Damit Kontaktkörper als Halbräume betrachtet werden, müssen folgende zwei miteinander verknüpfte Bedingungen erfüllt werden [Chai12]:

- Die Abmessungen der Kontaktfläche sind klein im Vergleich zu den Abmessungen der Körper. In diesem Fall konzentrieren sich die Spannungen um die Kontaktzone herum und der Einfluss des Körperandes auf die Spannungsverteilung ist vernachlässigbar.
- Die Krümmungsradien der sich berührenden Körper sind groß im Vergleich zu den Abmessungen des Kontakts. Diese Bedingung bestätigt die erste Bedingung. Folglich müssen die Winkel der sich berührenden Oberflächen klein bleiben, damit die Kontaktfläche durch eine Ebene angenähert werden kann.

Unter diesen Annahmen stellte HEINRICH HERTZ in [Hert82] eine analytische Lösung der Druckverteilung vor, die die Randbedingungen innerhalb und außerhalb der Kontaktfläche erfüllt. Trotz der vielen Restriktionen bei der Hertz'sche Theorie, die das Anwendungsspektrum begrenzen, liefert sie zufriedenstellende Lösungen für eine große Anzahl Anwendungen und bietet eine schnelle erste Abschätzung für komplexe Fälle. Im Laufe der Jahre wurden viele spezielle analytische Lösungen entwickelt. Diese sind im Referenzbuch zur Kontaktmechanik nach JOHNSON [John03] zusammengefasst.

### 1.2.2 Nicht HERTZ'sche Kontaktprobleme

Für Kontaktprobleme die aufgrund der Konformität der Geometrie, der Berücksichtigung der Rauheit, Reibung, oder Materialnichtlinearität (z.B. Inhomogenität, Plastizität) nicht zu den HERTZ'schen Kontaktproblemen gehören, existieren sowohl analytische als auch numerische Lösungsmethoden. Die meisten analytischen Methoden basieren dennoch auf der bereits erwähnten Halbraum-Theorie. Im Folgenden wird zuerst auf einige analytische Lösungen eingegangen. Im nächsten Abschnitt wird auf die numerischen und semi-analytischen Lösungsmethoden eingegangen.

Zur Untersuchung von Kontaktproblemen mit sinusförmigen Rauheit wurde von WESTERGAARD [Wert39] eine analytische Lösung vorgeschlagen. GREENWOOD und WILLIAMSON [GrWi66] hingegen stellten eine Lösung dar, in der statistisch mittels GAUSS-Verteilung erstellte raue Oberflächen berücksichtigt werden. Für Kontaktprobleme mit Materialinhomogenität beschreibt MEIJERS in [Meij68] eine Lösung für einen starren Zylinder im

Kontakt mit einem beschichteten Untergrund. JOHNSON schlägt in [John03] Lösungen für Kontaktprobleme mit Plastizität vor. Dabei werden Indentationsprobleme mit verschiedenen Indentergeometrien wie z.B. Kugel, Pyramide oder Kegel untersucht und ein ideal plastisches Materialverhalten der Grundkörper vorausgesetzt.

### 1.2.3 Numerische und Semi-analytische Methoden

Für allgemeine Kontaktprobleme mit komplexen oder endlichen Geometrien, bei denen die Halbraumannahme nicht mehr gelten (Körperabmäße in gleicher Größenordnung wie die Kontaktzone) oder Probleme in der eine Nichtlinearität des Materials (wie z.B. die Plastizität oder die Inhomogenität) eine große Rolle spielt, ist der Einsatz von numerischen Methoden wie beispielsweise die Finite Elemente Methode (FEM) erforderlich. Dafür existieren viele kommerzielle Softwareprogramme wie z.B. Abaqus, Ansys, Marc, Nastran. Die FEM ist aktuell die am weitesten angewendete Methode, um Kontaktprobleme aller Arten unter Berücksichtigung möglichst vieler physikalischer Effekte zu lösen. Jedoch ergibt sich bei dieser Methode, bei einer extrem feinen Diskretisierung insbesondere der Zonen mit hohen Spannungsgradienten, ein exponentieller Anstieg der Berechnungszeiten. Um die hohen Rechenzeiten bei FEM zu reduzieren wurde die Randelementmethode (REM) entwickelt. Diese Methode ist der FEM sehr ähnlich, mit dem Unterschied, dass zum Lösen des Kontaktproblems allein eine Diskretisierung der Oberflächenränder der Kontaktkörper benötigt wird. Die Semi-analytischen Methoden (SAM), die in dieser Arbeit implementiert wurden, gehören zu der Randelementmethode. In SAM werden häufig analytische Lösungen in iterativen Algorithmen eingesetzt. Für komplexe Probleme für die keine explizite analytischen Lösungen gefunden werden können, wird häufig eine Diskretisierung vorgenommen und die Lösung als Superposition bekannter fundamentaler Lösungen dargestellt. Im Folgenden wird ein Überblick zu der Entwicklung der SAM in der Kontaktmechanik gegeben.

Obwohl die ersten semi analytischen Modelle von BENTALL und JOHNSON [BeJo67] und PAUL und HASHEMI [PaHa81] entwickelt wurden, ist KALKER der Erste, der in [Kalk90] mittels eines NEWTON-RAPHSON Algorithmus der SAM einen Formalismus gegeben hat. Weitere Methoden wurden eingesetzt wie z.B. das GAUSS-SEIDEL Algorithmus durch JAEGER [Jaeg05].

In der zweiten Phase der Entwicklung der SAM wurde von vielen Forschern die Berechnungszeit optimiert. Zu diesem Optimierungsschritt zählt die Verwendung der Fast FOURIER Transformation (FFT) Methode [PoKe00] anstelle des verwendeten Multigridverfahren [LuLo91]. Der Einsatz der FFT-Methode in semi-analytischen Modellen zur Lösung wiederkehrender Faltungsoperationen brachte eine enorme Verkürzung der Rechenzeit. Die Kombination FFT-Methode mit einem effizienten Algorithmus wie der Konjugierten

Gradientenmethode (CGM: conjugate gradient method in englisch) ermöglichte den Einsatz der SAM bei Kontaktproblemen mit sehr fein diskretisierten Oberflächen [PoKe99].

Die ersten semi-analytischen Modelle beschränkten sich auf homogene und elastische Kontaktkörper. Drei Haupterweiterungen wurden über die Jahre gemacht. Die erste betrifft die Berücksichtigung von beschichteten Kontaktkörpern mit konstanten Schichtdicken [PeBh02], [CaBh05]. Als zweite Haupterweiterung gilt die Berücksichtigung des plastischen Materialverhaltens. Chiu entwickelte in den Arbeiten [Chiu77; Chiu78] analytische Lösungen für die Eigenspannungen, die von einem gleichmäßig gedehnten Würfel in einem Halbraum erzeugt werden. Dank dieser Lösung wurde von JACQ [Jacq01] ein Algorithmus zur Berücksichtigung der Plastizität im semi-analytischen Modell entwickelt. Die Effizienz und Berechnungszeit dieses Modells wurde durch die großen Fortschritte in der Plastizitätsberechnung mittels des von SIMO und TAYLOR [SiHu00] vorgeschlagenen return mapping Algorithmus stark optimiert. Die dritte maßgebliche Erweiterung in der semi-analytischen Modellierung ist die Berücksichtigung von Einschlüssen oder Inhomogenität in den Kontaktkörpern. Ein solches Modell, wie in [Lero13] vorgeschlagen, ermöglicht die Untersuchung der Einflüsse von Defekten im Werkstoff bei einem Kontaktproblem.

### 1.3 Ziel der Arbeit

Die Semi-analytischen Methoden, basierend auf der Halbraum-Theorie, haben in den letzten Jahren in der Kontaktmechanik viel an Bedeutung gewonnen. Vor allem aufgrund ihrer relativ kleinen Rechenzeiten bei hoher Auflösung. In der vorliegenden Arbeit wird ein bereits am Institut existierendes semi-analytisches Kontaktmodell für den Normalkontakt mit linear elastischen Kontaktpaarungen erweitert. Diese Erweiterung soll eine Anwendung des entwickelten Kontaktmodells auf verschiedene Problemen wie beispielsweise in Radialwellendichtringen (RWDR) und Wälzlager- Bereichen ermöglichen.

Dabei sollen für die Anwendung in der Dichtungstechnik im Modell relevante Einflussfaktoren wie die Strukturdeformation der Dichtlippen Membran in Form von Biegung und die Festkörperreibung in der Werkstoffpaarung Elastomer-Stahl berücksichtigt werden. Im Wälzlagerbereich ist es besonders wichtig, die Eigenspannungen im Material zu berücksichtigen, da diese einen großen Einfluss auf die Lebensdauer der einzelnen Wälzlagerkomponenten haben. In Wälzlagerstählen liegen im Gefüge immer Materialinhomogenitäten vor, die zu Eigenspannungen führen. Neben dieser ersten Kategorie von Eigenspannungen zählen auch die, die im Material bei der Fertigung der einzelnen Lagerkomponenten (z. B. aufgrund der Plastifizierung, thermische Effekt, etc.) und während des Betriebs aufgrund der Belastung (hauptsächlich durch die Plastifizierung) entstehen. Eine Berücksichtigung der durch die Materialinhomogenitäten verursachte Eigenspannungen soll in dieser Ar-

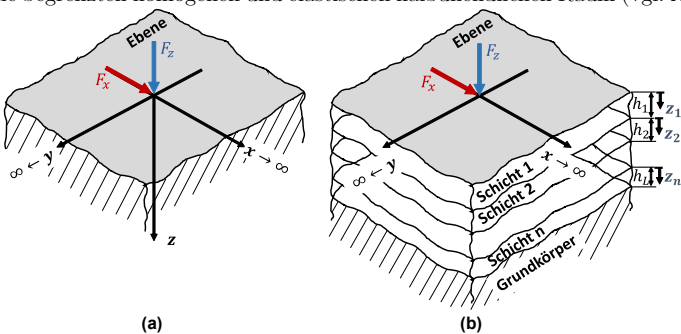
beit mithilfe der Materialhomogenisierungsmethode durch die "EIM: Equivalente Inclusion Methode "nach ESHELBY erfolgen. Zur Berücksichtigung der belastungsinduzierten Eigenspannungen soll ein elasto-plastisches Materialmodell im Kontaktmodell implementiert werden. Der fertigungsbedingte Eigenspannungsanteil wird in dieser Arbeit aufgrund der hohen Anzahl an komplexen und zusammenhängenden Einflussfaktoren nicht modelliert. Bei der Modellvalidierung wird dieser Anteil zunächst mittels Superpositionsprinzip aus den gemessenen Eigenspannungswerten entfernt.

## 2 Grundlage der Halbraummodellierung

Semi-analytische Halbraummodelle gewinnen in der Kontaktmechanik zwar immer mehr an Bedeutung, jedoch ist die Halbraummodellierung im Gegensatz zu anderen Methoden wie beispielsweise die der FEM für viele unbekannt. Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel die allgemeinen Grundlagen der Halbraumtheorie erläutert, bevor es in Kapitel 3 mit der Implementierung des Kontaktmodells weitergeht.

### 2.1 Linear elastisches Halbraummodell

Ein Halbraum beschreibt in der Kontinuumsmechanik einen, in einer Raumrichtung durch eine Ebene begrenzten homogenen und elastischen halbinendlichen Raum (vgl. Abb. 2.1).



**Abb. 2.1:** Homogener (a) und beschichteter (b) Halbraum unter Normal- (BOUSSINESQ Problem) und tangential (CERRUTI Problem) Einzellast

Äußere Kräfte können allein über diese Ebene auf den Halbraum einwirken. Die Anwendung der Halbraumtheorie zur Lösung der Kontaktprobleme setzt grundsätzlich folgende Annahmen voraus:

- Beispiel kleine Kontaktabmessungen (beschrieben durch die charakteristische Länge des Kontaktgebiets) im Vergleich zu den Körpermaßen
- Ein linear-elastisches Verhalten der Kontaktkörper
- Kein Einfluss der Strukturverformung auf das Kontaktproblem

Die bereits aufgezählten Annahmen werden häufig zur sogenannten Halbraumhypothese [Will20] zusammengefasst. In vielen Kontaktproblemen sind sie jedoch nicht komplett gül-

tig. Dies ist beispielsweise der Fall im RWDR-Welle Kontakt, bei Wälzlagern und Kontaktproblemen mit Materialinhomogenität, wie in dieser Arbeit behandelt. Beim RWDR-Welle Kontakt zeigt zum einen die Dichtlippe ein nicht linear viskoelastisches Materialverhalten und zum anderen hat die Strukturdeformation der Dichtlippenmembran in Form einer Biegung einen großen Einfluss auf die Kontaktsituation. Im Wälzlager hat der plastische Anteil im Materialverhalten bei hoher Last einen Lebensdauer steigernden Effekt und soll deswegen, um eine exakte Lebensdauerabschätzung machen zu können, im Kontaktmodell berücksichtigt werden. Diese zwei beschriebenen Sonderfälle und ihre Berücksichtigung im semi-analytischen Kontaktmodell werden im Weiteren behandelt.

In diesem Abschnitt wird zunächst das Konzept des Halbraums im mechanischen Sinne kurz erklärt und die Grundgleichungen der linearen Elastizität wiederholt (siehe Abschnitt 2.1.1). Die Lösung der linear elastischen Gleichungen auf dem Halbraum werden durch die PAPKOVICH-NEUBER Potentialen dargestellt. Diese Potentiale werden im Abschnitt 2.1.2 in ihrer allgemeinen Form vorgestellt. Wichtige Spezialfälle der PAPKOVICH-NEUBER Potentiale stellen die, in den Abschnitten 2.1.3 beschriebenen, BOUSSINESQ [Bous85]- und CERRUTI [Cerr82]-Lösungen jeweils für eine normale und einen tangentialen Einzelkraft auf der Halbraumoberfläche (siehe Abbildung 2.1) dar. Auf diese Lösungen basieren, in den meisten semi-analytischen Halbraum-Kontaktmodellen, die Bestimmung der Oberflächenverschiebungen und Spannungen.

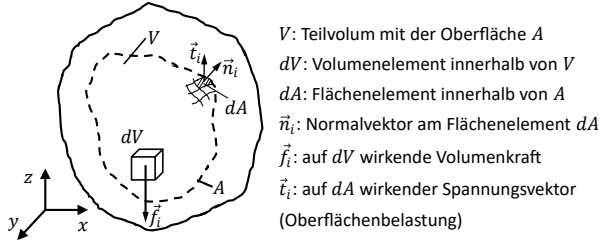
### 2.1.1 Grundgleichung der linearen Elastizität

Im Folgenden sollen die wichtigsten Gleichungen (Gleichgewichtsbedingung, Kinematik, Elastizitätsgesetz) der linearen statischen Elastizitätstheorie zusammengefasst werden. Diese Gleichungen werden aufgrund der damit beschriebenen Feldgrößen  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  (Verschiebung, Verzerrung und Spannungen) auch Feldgleichungen genannt [BeGr02]. Zur Erläuterung der Feldgleichungen soll der in Abbildung 2.2 dargestellte Kontinuumskörper dienen. Auf ein beliebiges, aus diesem Körper geschnittenes, endliches Teilvolumen  $V$  mit der Oberfläche  $A$  wirkt eine Volumenkraft  $f_i$  und eine Oberflächenbelastung (Spannungsvektor)  $t_i$ . Für jedes solches Teilvolumen können unter der Voraussetzung einer infinitesimalen Verzerrung und eines isotropen linear elastischen Materialverhaltens folgende Feldgleichungen aufgestellt werden [GHW18]:

$$\text{Gleichgewichtsbedingung:} \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{Kinematik:} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

$$\text{Elastizitätsgesetz:} \quad \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.3)$$



**Abb. 2.2:** Kontinuumskörper zur Herleitung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie

Mithilfe der CHAUCHY Formel  $\vec{t}_i = \sigma_{ij} \cdot \vec{n}_j$  wobei  $\vec{n}_j$  den Normalvektor am Flächenelement  $dA$  darstellt. Die Beziehungen (2.1, 2.2, und 2.3) liefern insgesamt genau 15 Gleichungen für die 15 unbekanntenen Feldgrößen  $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ . Damit ist das Problem statisch bestimmt und benötigt für eine eindeutige Lösung allein die Randbedingungen. Diese können als Spannungs- oder Verschiebungsrandbedingung angegeben sein. Zur einfachen Lösung werden in verschiedenen Fällen die Grundgleichungen nach den Verschiebungen oder Spannungen aufgelöst. Wird als erste die kinematische Beziehung (2.2) in das Elastizitätsgesetz (2.3) eingesetzt, ergibt sich für die Spannungen:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

Die Gleichung (2.4) in der Gleichgewichtsbedingung (2.1) eingesetzt, liefert dann:

$$(\lambda + G)u_{k,ki} + Gu_{i,kk} + f_i = 0 \quad (2.5)$$

Die resultierende Verschiebungsdifferentialgleichung 2. Ordnung (2.5) wird als NAVIERSche oder LAMÉsche Gleichung genannt und reduziert das gesamte Elastizitätsproblem auf drei Gleichungen für die drei Raumverschiebungen.

### 2.1.2 Potentiallösungen für homogenen und beschichteten Halbraum

Zur Lösung der Gleichung (2.5) werden im Allgemeinen in der Kontinuumsmechanik Lösungsansätze, die auf gewisse Hilfsfunktionen zurückführen sind, eingesetzt. Eine solche Lösung wurde von PETER FEDROVICH PAPKOVICH und HEINZ NEUBER mithilfe der Potentialtheorie erarbeitet. Die PAKOVICH-NEUBER Potentiale stellen das Verschiebungsfeld  $u$  in (2.5) mit Hilfsfunktionen dar, die sich selbst als Kombination aus skalaren  $\varphi$  und vektoriellen harmonischen Potentialen  $\psi$  ergeben. Eine ausführliche Herleitung der Fundamentallösung aus den LAMÉ-NAVIER-Feldgleichungen mithilfe der Potentialtheorie wird in der Literatur [LaLi10], [Leid09] gegeben. Im Folgenden werden die Potentiallösungen für die allgemeinen Fälle eines Halbraums aus einem Grundkörper und mit einer oder mehrerer Beschichtungen auf dem Grundkörper vorgestellt. Für ein elastisches Problem

auf einem homogenen Körper (siehe Abb. 2.1 (a)) kann das Verschiebungsfeld auf diesen Körper durch folgende Beziehung beschrieben werden [Hau14; BeGr02]:

$$\vec{u} = \vec{\psi} - \frac{1}{4(1-\nu)} \text{grad}(\varphi + \vec{r} \cdot \vec{\psi}) \quad (2.6)$$

Wobei  $\vec{r} = [x, y, z]^T$  der Ortsvektor ist.

Durch Einsetzen dieses Lösungsansatzes in (2.4) ergibt sich für das Spannungsfeld:

$$\vec{\sigma} = \frac{\nu E}{2(1-\nu^2)} \text{div} \vec{\psi} \delta + \frac{E}{2(1+\nu)} (\text{grad} \vec{\psi} + (\text{grad} \vec{\psi})^T) - \frac{E}{4(1-\nu^2)} \text{grad}(\text{grad}(\varphi + \vec{r} \cdot \vec{\psi})) \quad (2.7)$$

Die Gleichungen (2.6, 2.7) stellen jeweils eine allgemeine Lösung der Verschiebungs- und Spannungsfelder auf einen homogenen isotropen linearen elastischen Halbraum dar. Besteht jedoch der Körper, wie in Abb. 2.1 (b) abgebildet, aus einem Grundkörper mit einer oder mehreren Schichten, so lassen sich die Verschiebungen und Spannungen auf den einzelnen Schichten und auf dem Grundkörper wie folgt ausdrücken [WWLZ15]:

$$u_i^k = \frac{1}{2\mu_k} (\varphi_{,i}^k + x\psi_{1,i}^k + z_k\psi_{3,i}^k - (3-4\nu_k)\psi_i^k) \quad (2.8)$$

$$\sigma_{ij}^k = \varphi_{,ij}^k - 2\nu_k(\psi_{1,1}^k + \psi_{3,3}^k)\delta_{ij} - (1-2\nu_k)(\psi_{i,j}^k + \psi_{j,i}^k) + x\psi_{1,ij}^k + z_k\psi_{3,ij}^k \quad (2.9)$$

In den Gleichungen (2.8, 2.9) nehmen die Indice  $i, j$  die Werte 1, 2 und 3 entsprechend der Achskoordinate  $x, y$  und  $z$  an, und der Index  $k$  bezeichnet die jeweilige Schicht.

Die Beziehungen (2.6, 2.7, 2.8 und 2.9) stellen alle mit den noch unbestimmten Potentialen  $\varphi, \psi$  allgemeine Lösungsansätze für elastische Probleme dar. Über die Definition der Problem-Randbedingungen lassen sich geeignete Potentiale zu dem betroffenen Fall bestimmen. Im nächsten Teilabschnitt werden zu den zwei speziellen Fällen der BOUSSINESQ und CERRUTI Probleme die zugehörigen Potentiale und die daraus resultierenden Verschiebungs- und Spannungsfelder vorgestellt. Dabei wird bei der Beschreibung der Fokus auf die von den gesuchten Potentialen einzuhaltenden Randbedingungen gelegt.

### 2.1.3 BOUSSINESQ- und CERRUTI Lösungen für einen homogenen Halbraum

Im BOUSSINESQ-Problem, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, handelt es sich um eine auf der Halbraumoberfläche im Koordinatenursprung angreifende normale Einzellast  $F_z$ . Gesucht werden die resultierenden Verschiebungen und Spannungen in einem beliebigen Punkt  $P$  im Abstand  $r(x, y, z)$  zum Lastangriffspunkt. Von den Potentialfunktionen müssen folgende Randbedingungen [Hau14]:

$$\sigma_{zz}(x, y, 0) = -F_z \delta(x, y); \quad \sigma_{zy}(x, y, 0) = 0; \quad \sigma_{zx}(x, y, 0) = 0 \quad (2.10)$$



mit:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

erfüllt werden. Unter Berücksichtigung dieser Bedingungen lassen sich folgende Potentiale für das BOUSSINESQ-Problem aufstellen:

$$\varphi = \frac{F_z}{\pi G} (1 - 2\nu) \ln(r + z); \quad \vec{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1-\nu)F_z}{\pi Gr} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Das Einsetzen dieser Potentiale in (2.6) liefert jeweils für die Verschiebungen [BeGr02]:

$$u_x = \frac{F_z x}{4\pi Gr} \left[ \frac{z}{r^2} - \frac{1-2\nu}{r+z} \right]; \quad u_y = \frac{F_z y}{4\pi Gr} \left[ \frac{z}{r^2} - \frac{1-2\nu}{r+z} \right]; \quad u_z = \frac{F_z}{4\pi Gr} \left[ 2(1-\nu) + \frac{z^2}{r+z} \right]; \quad (2.13)$$

und Spannungen [BeGr02]:

$$\sigma_{11} = -\frac{F_z}{2\pi} \left[ \frac{3x^2 z}{r^5} - (1-2\nu) \left( \frac{z}{r^3} + \frac{x^2}{r^3(r+z)} - \frac{1}{r(r+z)} + \frac{x^2}{r^2(r+z)^2} \right) \right] \quad (2.14)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{F_z}{2\pi} \left[ \frac{3y^2 z}{r^5} - (1-2\nu) \left( \frac{z}{r^3} + \frac{y^2}{r^3(r+z)} - \frac{1}{r(r+z)} + \frac{y^2}{r^2(r+z)^2} \right) \right] \quad (2.15)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{F_z}{2\pi} \frac{3z^3}{r^5} \quad (2.16)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{F_z}{2\pi} \left[ \frac{3xyz}{r^5} - (1-2\nu) \left( \frac{xy}{r^3(r+z)} + \frac{xy}{r^2(r+z)^2} \right) \right] \quad (2.17)$$

$$\sigma_{23} = -\frac{F_z}{2\pi} \frac{3yz^3}{r^5} \quad (2.18)$$

$$\sigma_{31} = -\frac{F_z}{2\pi} \frac{3xz^3}{r^5} \quad (2.19)$$

Analog zu der bereits beschriebenen BOUSSINESQ-Lösung existiert für das Problem einer auf einen homogenen Halbraum angreifenden tangentialen Einzellast, die CERRUTI-Lösung, die im Folgenden präsentiert wird. Es gelten für eine in x-Richtung ausgerichtete Einzellast  $F_x$  an der Oberfläche des Halbraums folgende Randbedingungen:

$$\sigma_{zz}(x,y,0) = 0; \quad \sigma_{zy}(x,y,0) = 0; \quad \sigma_{zx}(x,y,0) = -F_x \delta(x,y); \quad (2.20)$$

Die Verschiebungen und Spannungen im Halbraum lassen sich jeweils mit [BeGr02]:

$$u_x = \frac{F_x}{4\pi G} \left[ \frac{1}{r} + \frac{x^2}{r^3} + (1-2\nu) \left( \frac{1}{r+z} - \frac{x^2}{r(r+z)^2} \right) \right] \quad (2.21)$$

$$u_y = \frac{F_x}{4\pi G} \left[ \frac{xy}{r^3} - (1-2\nu) \frac{xy}{r(r+z)^2} \right] \quad (2.22)$$

$$u_z = \frac{F_x}{4\pi Gr} \left[ \frac{xz}{r^3} + (1-2\nu) \frac{x}{r(r+z)} \right] \quad (2.23)$$

und

$$\sigma_{11} = -\frac{F_x}{2\pi} \left[ \frac{3x^2}{r^5} - (1-2\nu) \left( \frac{x}{r^3} - \frac{3x}{r(r+z)^2} + \frac{x^3}{r^3(r+z)^2} + \frac{2x^3}{r^2(r+z)^3} \right) \right] \quad (2.24)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{F_x}{2\pi} \left[ \frac{3xy^2}{r^5} - (1-2\nu) \left( \frac{x}{r^3} - \frac{x}{r(r+z)^2} + \frac{xy^3}{r^3(r+z)^2} + \frac{2xy^3}{r^2(r+z)^3} \right) \right] \quad (2.25)$$

$$\sigma_{33} = -\frac{F_x}{2\pi} \frac{3xz^2}{r^5} \quad (2.26)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{F_x}{2\pi} \left[ \frac{3x^2y}{r^5} - (1-2\nu) \left( -\frac{y}{r(r+z)^2} + \frac{x^2y}{r^3(r+z)^2} + \frac{2x^2y}{r^2(r+z)^3} \right) \right] \quad (2.27)$$

$$\sigma_{23} = -\frac{F_x}{2\pi} \frac{3yz}{r^5} \quad (2.28)$$

$$\sigma_{31} = -\frac{F_x}{2\pi} \frac{3x^2z}{r^5} \quad (2.29)$$

beschreiben.

Die Gleichungen (2.13, 2.21-2.23) und (2.14 - 2.19, 2.24 - 2.29) jeweils durch die Normalkraft  $F_z$  und Tangentialkraft  $F_x$  geteilt, ergeben sich auf den rechten Seiten die im Zusammenhang mit der Halbraum-Kontaktmodellierung, sogenannte Einflussfunktionen der Verschiebung und Spannungen auf einem homogenen Halbraum.

### 2.1.4 BOUSSINESQ- und Cerruti Lösungen für einen Halbraum mit Schicht

Die Bestimmung der Einflussfunktionen für einen Halbraum mit Schicht mithilfe der PAPKOVICH-NEUBER Potentiale gemäß (2.8 - 2.9) stellt im Vergleich zum Fall des homogenen Halbraums mehr Komplexität dar. Aufgrund der Vielzahl der zu erfüllenden Randbedingungen kann keine explizite Form zu den Potentialen aufgestellt werden. Die Lösung erfolgt über die FOURIER-Transformation der PAPKOVICH-NEUBER Potentiale  $\varphi^k, \psi_1^k, \psi_3^k$  in (2.8 - 2.9) wie folgt:

$$\tilde{\varphi}^k = A^k \exp(-\alpha z_k) + \bar{A}^k \exp(\alpha z_k) \quad (2.30)$$

$$\tilde{\psi}_1^k = B^k \exp(-\alpha z_k) + \bar{B}^k \exp(\alpha z_k) \quad (2.31)$$

$$\tilde{\psi}_3^k = C^k \exp(-\alpha z_k) + \bar{C}^k \exp(\alpha z_k) \quad (2.32)$$

Das Symbol  $\tilde{(-)}$  weist auf die FOURIER-Transformation hin. Die Variable  $\alpha = \sqrt{m^2 + n^2}$ , mit  $m$  und  $n$  als die im Frequenzbereich transformierten Koordinaten  $x$  und  $y$ . Die Gleichungen 2.30, 2.31 und 2.32 in (2.8 - 2.9) eingesetzt, ergibt beispielsweise für die Verschie-

bungskomponente 1 (in Koordinatenrichtung  $x$ ) folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 u_1^k = \frac{1}{2G_k} & \left( \left[ A^k e^{-\alpha z_k} + \bar{A}^k e^{\alpha z_k} \right] - 4(1 - \nu_k) \left[ B^k e^{-\alpha z_k} + \bar{B}^k e^{\alpha z_k} \right] \right. \\
 & + m^2 \alpha^{-1} z_k \left[ B^k e^{-\alpha z_k} - \bar{B}^k e^{\alpha z_k} \right] + im z_k \left[ C^k e^{-\alpha z_k} + \bar{C}^k e^{\alpha z_k} \right] \\
 & \left. - m \left[ B_{,m}^k e^{-\alpha z_k} + \bar{B}_{,m}^k e^{\alpha z_k} \right] \right) \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Für die Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten  $A^k, \bar{A}^k, B^k, \bar{B}^k, C^k, \bar{C}^k$  in (2.33) werden Randbedingungen an der Oberfläche, Grenzfläche und im Grundkörper formuliert [YWW14; WYW15a; WYW15b].

## 2.2 Kontaktmodellierung

Die Lösung des Kontaktproblems besteht in einer iterativen Bestimmung der Kontaktverschiebung unter Berücksichtigung der vorher definierten Kontaktbedingungen. Die Oberflächenverschiebungen auf dem Halbraum ergeben sich aus den obigen grundlegenden Lösungen von BOUSSINESQ und CERRUTI (2.13 - 2.19) und (2.21 - 2.29). Jedoch stellen diese Lösungen für eine numerische Anwendung im Kontaktmodell zwei Nachteile dar. Zum einen ergibt sich im Ursprung ( $x = y = z = 0$ ) eine Singularität. Zum anderen gelten diese Gleichungen nur für den idealisierten Fall einer Punktlast. Bei der Kontaktmodellierung werden die Oberflächen der Kontaktpartner diskretisiert und die Normal- und Tangentialbelastungen in Flächenlast überführt. Dies bringt die Notwendigkeit einer für Flächenlasten geltende Lösung. In diesem Abschnitt wird zunächst der Übergang von den bereits präsentierten BOUSSINESQ und CERRUTI Lösungen für Punktlasten auf Lösungen für Flächenlasten erläutert. Als Nächstes werden die bei der Lösung des Kontaktproblems zu erfüllenden Kontaktbedingungen vorgestellt.

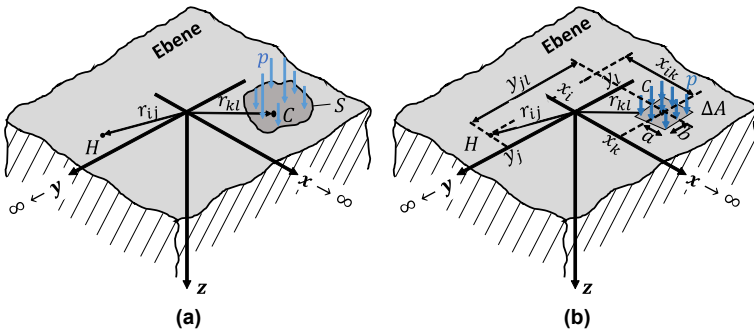
### 2.2.1 Kontaktdiskretisierung und Ableitung Einflusskoeffizienten

Der Einfachheit halber wird in der folgenden Betrachtung nur der normale Kontakt behandelt. Hier wird die normale Verschiebung durch die dritte Komponente des Verschiebungsfeldes (2.13) gegeben. Auf der Oberfläche ( $z = 0$ ) ergibt sich mit der Definition des Schubmoduls ( $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ):

$$u_z = \frac{F_z}{4\pi G r} \left[ 2(1 - \nu) - \frac{z^2}{r + z} \right]; \quad \rightarrow u_{z=0} = F_z \left[ \frac{(1 - \nu^2)}{\pi E r} \right] \quad (2.34)$$

Die Größe  $\frac{1-\nu^2}{\pi E r}$  in (2.34) beschreibt auf der Halbraumoberfläche den Einflusskoeffizienten einer normalen Einzelpunktlast  $F_z$  im Ursprungspunkt auf eine normale Verschiebung  $u_z$  in einem beliebigen Punkt  $H$  im Abstand  $r$  vom Ursprung.

Auf der Abbildung 2.3 (a) sei auf der Halbraumoberfläche ein Flächenbereich  $S$  mit normaler nicht konstanter Pressungsverteilung  $p$ . Betrachtet werden zwei allgemeine Punkte  $C$  und  $H$ , definiert jeweils durch ihre Ortsvektoren  $r_{ij}$  und  $r_{kl}$ . Der Punkt  $C$  befindet sich im Gegensatz zum Punkt  $H$  innerhalb der Fläche  $S$ . Die normale Verschiebung an einem Punkt  $H$  (außerhalb der Fläche  $S$ ) aufgrund der normalen Pressungsverteilung  $p_{kl}$  über die Fläche  $S$ , kann durch die folgende BOUSSINESQ-Integralbeziehung bestimmt werden [RoSa18]:



**Abb. 2.3:** (a): Allgemeiner Fall eines Halbraums unter einer beliebigen Pressungsverteilung  $p$  auf einen Bereich  $S$ , (b): Spezieller Fall eines Halbraums unter einer als konstant angenommenen Pressungsverteilung  $p$  auf einer rechteckigen Fläche  $\Delta A$

$$u_z(r_{ij}) = \frac{(1-\nu)}{2\pi G} \int_S \frac{p_{kl}(r_{kl})}{\|r_{ij} - r_{kl}\|} ds \quad (2.35)$$

Die Verschiebung (2.35) hängt sowohl von der Form der Fläche  $S$  als auch von der darauf wirkenden Druckverteilung  $p_{kl}$  ab und ermöglicht somit keine direkte allgemeine analytische Lösung. In der Literatur existieren jedoch für bestimmte Druckverteilungen und Flächenformen (beispielsweise Dreieck, Rechtecke, ...) analytische Lösungen dieser Gleichung. Eine solche Lösung wurde, wie in Abbildung 2.3 (b) dargestellt, von LOVE [Lov29] für eine konstante Flächenpressung  $p_{kl}$  auf einer Rechteck Fläche  $\Delta A_{kl} = 2a \times 2b$  vorgestellt. Auf diese Lösung wird im Folgenden eingegangen. Auf der Abbildung 2.3 (b) wird das Zentrum  $C$  der Rechteckfläche  $\Delta A_{kl}$  durch den Ortsvektor  $r_{kl}$  bestimmt und deren Abstände zu den vier Eckpunkten des Rechtecks jeweils mit  $a$  und  $b$  bemisst. Die Lösung der Verschiebung an einem Punkt  $H$  beschrieben durch die Koordinate  $x_i$  und  $x_j$ , aufgrund der über  $\Delta A_{kl}$  konstant vorliegenden Flächenpressung  $p_{kl}$  wird durch folgende

analytische Lösung gegeben [RoSa18]:

$$u_{ij}^{zz} = C_{ijkl}^{zz} p_{kl} \quad (2.36)$$

Dabei beschreibt  $C_{ijkl}^{zz}$  den Einflusskoeffizienten und lässt sich durch folgende analytische Formel bestimmen:

$$C_{ijkl}^{zz} = \frac{(1-\nu)}{2\pi G} \left( X_1 \cdot \ln \left[ \frac{Y_1 + \sqrt{Y_1^2 + X_1^2}}{Y_2 + \sqrt{Y_2^2 + X_2^2}} \right] + Y_1 \cdot \ln \left[ \frac{X_1 + \sqrt{Y_1^2 + X_1^2}}{X_2 + \sqrt{Y_2^2 + X_2^2}} \right] + X_2 \cdot \ln \left[ \frac{Y_2 + \sqrt{Y_2^2 + X_2^2}}{Y_1 + \sqrt{Y_1^2 + X_1^2}} \right] + Y_2 \cdot \ln \left[ \frac{X_2 + \sqrt{Y_2^2 + X_2^2}}{X_1 + \sqrt{Y_1^2 + X_1^2}} \right] \right) \quad (2.37)$$

Die Koeffizienten  $Y_1, Y_2, X_1$  und  $X_2$  werden aus den Abständen zwischen den Punkten  $H$  und  $C$  und der Abmaße der Rechtecke wie folgt bestimmt:

$$Y_1 = y_{jl} + b; \quad Y_2 = y_{jl} - b \quad X_1 = x_{ik} + a; \quad X_2 = x_{ik} - a; \quad (2.38)$$

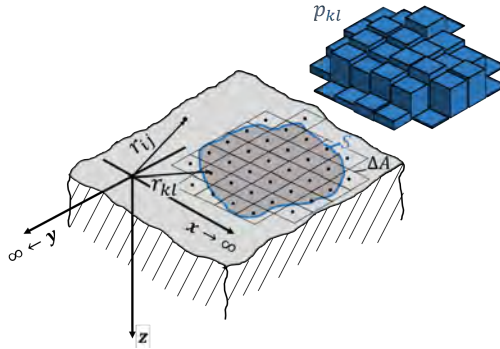
Die in der Abbildung 2.3 (b) und der Gleichung 2.36 verwendete Nomenklatur wurde so definiert, dass paarweise die tiefgestellten Indizes  $ij$  und  $kl$  jeweils die Position des Auswertungspunktes, an dem die Verschiebung gerade bestimmt wird und die Position vom Zentrum des Rechtecks auf dem die konstante angenommene Flächenpressung wirkt, bezeichnen. Der hochgestellte Indize  $zz$  jedoch zeigt für den ersten Buchstaben  $z$  die Richtung der bestimmten Oberflächenverschiebung und den zweiten die Richtung der Flächenlast.

Die Lösung (2.36) kann für eine ungleichmäßige Flächenpressung auf komplexere Flächenformen angewendet werden. Die dafür verwendete Methode wird in der Abbildung 2.4 veranschaulicht. Hier wird die Fläche  $S$  und die darauf wirkende Pressung mittels kleiner Rechtecke mit konstanter Druckverteilung approximiert. Die Kombination aus Rechteck  $\Delta A_{kl}$  mit der darauf wirkenden konstanten Flächenpressung  $p_{kl}$  wird im Folgenden als Druckelement bezeichnet.

Wird die Fläche  $S$  in  $n$  Rechtecke jeweils in Abständen  $r_{kl}$  vom Halbraumursprung diskretisiert, dann lässt sich die Verschiebung auf beliebige Punkte im Abstand  $r_{ij}$  durch die Superposition der Beiträge der einzelnen Druckelemente bestimmen:

$$U_{ij}^{zz} = \sum_{kl=1}^n C_{ijkl}^{zz} p_{kl} \quad (2.39)$$

Die Gleichung (2.39) stellt in Bezug auf die mathematische Programmierung eine Faltung zwischen den Einflusskoeffizienten  $C_{ijkl}^{zz}$  als Kernfunktion mit den normalen Flächenlasten  $p_{kl}$  dar. Diese Gleichung wird im Kontaktmodell mithilfe der Fourier-Transformation gelöst [WSZL20; SWZZ20].



**Abb. 2.4:** Diskretisierung einer beliebigen Flächenform und der darauf wirkenden Flächenpressung

Zunächst werden die als 2D-Matrix vorliegenden Einflusskoeffizienten und Normallasten im Frequenzbereich transformiert. Hier wird im Frequenzbereich die komplexe Faltungsoperation durch eine einfache Matrixmultiplikation ersetzt. Das Ergebnis dieser Multiplikation wird dann in den Raumbereich rücktransformiert. Die Beziehung (2.39) wird im Weiteren kompakt mit dem Operator  $\times$  als Faltungsprodukt wie folgt dargestellt:

$$U_{ij}^{zz} = C_{ijkl}^{zz} \times p_{kl} \quad (2.40)$$

Im Falle eines reibungsbehafteten Kontaktproblems wirken sowohl die normal  $p_{kl}$  (in  $z$ -Richtung) als auch tangentialen Flächenlasten  $q_{kl}^x, q_{kl}^y$  (jeweils in  $x$ - und  $y$ -Richtung) auf jedes diskrete Flächenelement. Diese Belastungen verursachen Verschiebungen in allen drei Raumrichtungen  $x, y, z$  an jedem Punkt  $ij$  der Halbraumsoberfläche. Die Gesamtverschiebung in  $z$ -Richtung an einem Punkt  $ij$  kann beispielsweise aus den einzelnen Beiträgen der Lasten ( $p_{kl}, q_{kl}^x, q_{kl}^y$ ) wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} U_{ij} &= U_{ij}^{zz} + U_{ij}^{zx} + U_{ij}^{zy} \\ &= C_{ijkl}^{zz} \times p_{kl} + C_{ijkl}^{zx} \times q_{kl}^x + C_{ijkl}^{zy} \times q_{kl}^y \end{aligned} \quad (2.41)$$

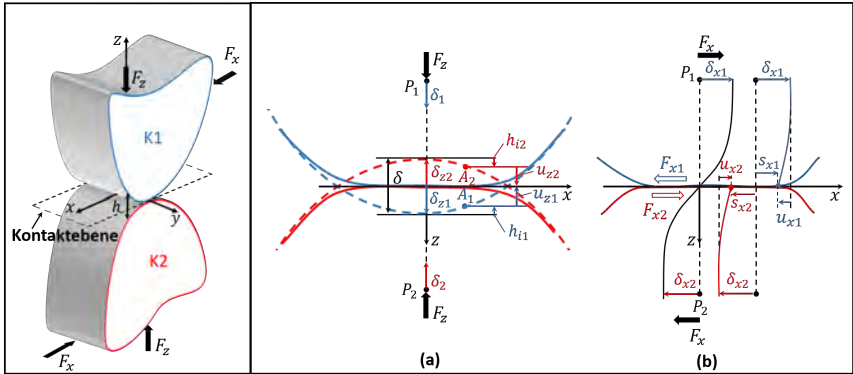
Die gesamten Verschiebungen im reibungsbehafteten Kontaktproblem werden durch folgende Beziehung beschrieben:

$$\begin{bmatrix} U_{ij}^x \\ U_{ij}^y \\ U_{ij}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ijkl}^{xx} & C_{ijkl}^{xy} & C_{ijkl}^{xz} \\ C_{ijkl}^{yx} & C_{ijkl}^{yy} & C_{ijkl}^{yz} \\ C_{ijkl}^{zx} & C_{ijkl}^{zy} & C_{ijkl}^{zz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_{kl}^x \\ q_{kl}^y \\ p_{kl}^z \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Die analytischen Ausdrücke der Einflusskoeffizienten in (2.42) können unter anderem der Literatur [ChWa08; Will08; SpAm12; Gall07] entnommen werden.

### 2.2.2 Normal- und tangentiale Kontaktbedingungen

Nach der Beschreibung der Einflusskoeffizienten zur Bestimmung der Verschiebungen und Spannungen auf einem Halbraum, wie es im letzten Abschnitt erfolgte, werden in diesem Abschnitt die Kontaktbedingungen vorgestellt. Zur Beschreibung der normalen und tangentialen Kontaktbedingungen wird das in Abbildung 2.5 schematisch dargestellte Kontaktproblem zwischen zwei elastischen Körpern ( $K1, K2$ ) unter normaler und tangentialer Kraft  $F_z, F_x$  verwendet.



**Abb. 2.5:** Reibungsbehaftetes Kontaktproblem, (a) normale Kontaktbedingung, (b) tangentiale Kontaktbedingung

Der Einfachheit halber werden die zwei Schnittansichten in Abbildung 2.5 (a), (b) verwendet. Zur einfachen Erkennung der Zugehörigkeit der geometrischen Größen sind die beiden Oberflächenprofile mit unterschiedlichen Farben (blau für  $K1$  und rot für  $K2$ ) dargestellt. Trotz der zweidimensionalen Darstellung, die nur zur Veranschaulichung dient, wird die folgende Beschreibung für den allgemeinen Fall eines dreidimensionalen Kontaktproblems vorgenommen. Um Unklarheiten zu vermeiden, wird bei dreidimensionalen Variablen Größen der Klammersausdruck  $(x, y)$  verwendet.

Wie in der Schnittdarstellung in Abbildung 2.5 (a) zu sehen ist, hat der normale Kontakt folgende Parameter [Gall07]:

1.  $F_z$  : Normalkraft und Normalreaktionskraft.
2.  $h_{i1}(x, y), h_{i2}(x, y)$  : Oberflächenprofilhöhen der Körper 1 und 2.
3.  $\delta_1, \delta_2$  : Körperverschiebung der Körper 1 und 2 in normalen Richtung.
4.  $P_1, P_2$  : Schwerpunktlagen der Körper 1 und 2.

Bei dreidimensionalem Normalkontakt gelten die folgenden Bedingungen [Gall07]:

- **Das Gleichgewicht.** Es bildet eine äquivalente Beziehung zwischen der von außen aufgebracht Normalkraft  $F_z$  und der zu bestimmenden Normalpressung  $p$  im Kontaktbereich  $\Gamma_c$ :

$$F_z = \int_{\Gamma_c} p(x, y) d\Gamma_c \quad (2.43)$$

- **Die Spaltgleichung.** Diese Gleichung beschreibt die Änderung des Kontaktspalts  $h(x, y)$  (Abstand zwischen den Kontaktoberflächen). Zur Erklärung der Spaltgleichung sind in Abbildung 2.5 (a), zwei Fälle dargestellt. Im ersten Fall werden die beiden Kontaktkörper,  $K1$  und  $K2$ , als starre Körper betrachtet. Daher bleiben ihre Oberflächenprofile unverformt (siehe gestrichelte Linien). Hier führen die Schwerpunkte unter der Kontaktkraft  $F_z$  die Körperverschiebungen  $\delta_{z1}, \delta_{z2}$  aus. Als Hilfsgeometrie wurden in den tiefsten Profilmittelpunkten Tangentlinien als Bezugslinien gebildet. Im zweiten Fall wurden die beiden Körper in einem deformierten Zustand dargestellt (siehe durchgezogene Linien). Im Ursprung ( $x = 0$ ) beschreiben die vertikalen Abstände vom Kontaktpunkt zu den Referenzlinien, die im ersten Fall erwähnten Starr-Körperverschiebungen  $\delta_{z1}, \delta_{z2}$ . Der Spalt an jedem Kontaktpunktpaar wird durch die Ausgangsprofilhöhe  $h_i(x, y)$  (Punktabstände zu den jeweiligen Referenzlinien im unverformten Zustand) und die Verschiebungen  $u_i(x, y)$  (Abstandsänderungen vom unverformten zum verformten Zustand) wie folgt beschrieben:

$$h(x, y) = (h_{i1}(x, y) + h_{i2}(x, y)) - (\delta_{z1} + \delta_{z2}) + (u_{z1}(x, y) + u_{z2}(x, y)) \quad (2.44)$$

- **Die Komplementaritätsbedingung.** Diese Bedingung entsteht aufgrund der Undurchdringlichkeit der Kontaktkörper. Sie verknüpft den Kontaktspalt  $h(x, y)$  in (2.44) und die Kontaktpressung  $p(x, y)$  in (2.43) wie folgt:

$$p(x, y) \cdot h(x, y) = \begin{cases} > 0; & p(x, y) = 0 \forall (x, y) \notin \Gamma_c \\ = 0; & p(x, y) > 0 \forall (x, y) \in \Gamma_c \end{cases} \quad (2.45)$$

Die Formulierung des tangentialen Kontakts, wie im Folgenden beschrieben, erfordert mehr Beachtung als der normale Kontakt. Hier wird die Kontaktregion  $\Gamma_c$  in zwei Bereiche aufgeteilt, einen Haftbereich  $\Gamma_{st}$  und einen Gleitbereich  $\Gamma_{sl}$ . Die tangentialen Kontaktbedingungen werden anhand der Schnittansicht in Abbildung 2.5 (b) beschrieben. Der tangentialen Kontakt hat folgende Parameter [Gall07]:

1.  $F_x$  : Tangentialkraft
2.  $F_{x1}, F_{x2}$  : Aktions-Reaktionskräfte auf Körper 1 und 2



3.  $u_{x1}(x, y), u_{x2}(x, y)$  : Oberflächenverschiebung der Körper 1 und 2
4.  $\delta_{x1}, \delta_{x2}$  : Körperverschiebung der Körper 1 und 2 in tangentiale Richtung
5.  $P_1, P_2$  : Schwerpunktslagen der Körper 1 und 2

In Abbildung 2.5 (b) wird eine tangentiale Kraft  $F_x$  in den Kontaktbereich ( $F_{x1}$  auf Körper 1 und  $F_{x2}$  auf Körper 2) eingeleitet und bewirkt ähnlich wie beim normalen Kontakt (siehe Abbildung 2.5) (a) auf die Körperschwerpunkte die Körperverschiebungen  $\delta_{x1}$  und  $\delta_{x2}$  in der tangentialen x-Richtung. Für jedes Kontaktpunktpaar im Haftbereich (Mitte der Kontaktzone)  $\Gamma_{st}$  sind die Körperverschiebungen des Schwerpunkts  $\delta_{x1}, \delta_{x2}$  gleich den Oberflächenverschiebungen  $u_{x1}(x, y), u_{x2}(x, y)$ . Somit bleibt das Kontaktpunktpaar nach der Verformung auf der gleichen x-Koordinate. Im Gleitbereich (an der Grenze der Kontaktzone)  $\Gamma_{sl}$ , hingegen führte die Differenz zwischen den Körperbewegungen  $\delta_{x1}, \delta_{x2}$  und den Oberflächenverschiebungen  $u_{x1}(x, y), u_{x2}(x, y)$  zu Gleitwegen  $s_{x1}(x, y), s_{x2}(x, y)$ .

Im Allgemeinen müssen bei dreidimensionalem tangentialem Kontaktproblem die folgenden Bedingungen angewendet werden [Gall07]:

- **Die Gleichgewichtsbedingung** in den tangentialen Richtungen:

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{\Gamma_c} q_x(x, y) d\Gamma_c \\ F_y &= \int_{\Gamma_c} q_y(x, y) d\Gamma_c \end{aligned} \quad (2.46)$$

- **Die Gleitgleichung** in dem Gleitbereich  $\Gamma_{sl}$ , die die Gleitwege aus der Oberflächenverschiebung  $u_x(x, y), u_y(x, y)$  und der Körperverschiebung  $\delta_x, \delta_y$  wie folgt ausdrückt:

$$S(x, y) = \begin{pmatrix} s_x(x, y) = u_x(x, y) - \delta_x \\ s_y(x, y) = u_y(x, y) - \delta_y \end{pmatrix}; \forall (x, y) \in \Gamma_{sl} \quad (2.47)$$

- **Das coulombsche Reibungsgesetz.** Sie beschränkt mithilfe des Reibungskoeffizient  $\mu$  und der Normalpressung  $p$  den Betrag der Schubspannung  $Q$  im haftenden Bereich  $\Gamma_{st}$  wie folgt:

$$\|Q(x, y)\| = \sqrt{q_x^2(x, y) + q_y^2(x, y)} \leq \mu * p(x, y); \forall (x, y) \in \Gamma_{st} \quad (2.48)$$

Werden die tangentialen Starrkörperbewegungen  $\delta_x, \delta_y$  in (2.47) um viele Größenordnungen höher als die Oberflächenverschiebungen  $u_x(x, y), u_y(x, y)$  geht das tangentiale Problem von einem Kontakt mit partiellem Gleiten in einen Kontakt mit vollem Gleiten über.

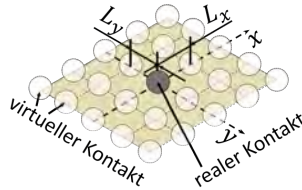
Ein solcher Fall findet im Kontakt Dichtlippe-Welle während des Betriebs statt. In diesem Fall wird die Gleitgleichung durch folgendes Energiegleichgewicht ersetzt:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} q_x(x, y) \cdot s_x(x, y) d\Gamma_c &= Ed_x \\ \int_{\Gamma_c} q_y(x, y) \cdot s_y(x, y) d\Gamma_c &= Ed_y \end{aligned} \quad (2.49)$$

Mittels (2.49) werden die Gleitwege  $s_x(x, y), s_y(x, y)$  aus den Reibenergien  $Ed_x, Ed_y$  bestimmt.

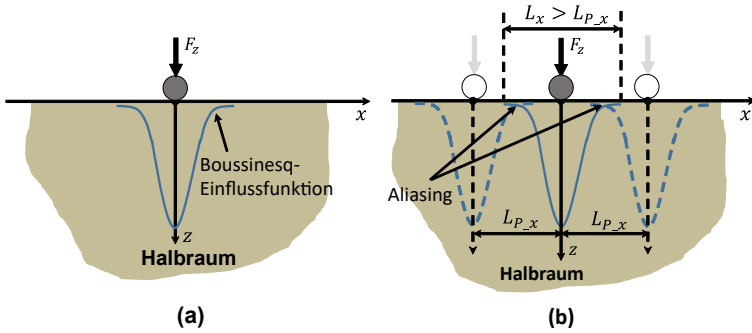
### 2.3 Fourier-Transformation im Halbraum-Kontaktmodell

Die lineare Faltungsoperationen treten an vielen Stellen der mathematischen Formulierung des Kontaktproblems (beispielsweise bei der Berechnung der Oberflächenverschiebungen mit (2.39)) auf. Aus diesem Grund ist von besonderem Interesse dafür eine effiziente Lösungstechnik zu wählen, um den numerischen Prozess der Kontaktsimulation zu beschleunigen. Zu diesem Zweck wird die schnelle FOURIER Transformation (FFT) eingesetzt.



**Abb. 2.6:** Reales Kontaktproblem und die aus der Periodizitätsannahme resultierenden virtuellen Kontaktprobleme

Jedoch setzt der Einsatz der FOURIER Transformation (FT) eine virtuelle Periodizität des Kontaktproblems voraus (siehe Abbildung 2.6). Aufgrund dieser Annahme treten bei kleiner oder ungenügend groß Berechnungsgebiet (Periodenlänge  $L_{P_x}, L_{P_y}$ ) im Vergleich zum physikalischen Gebiet (angenommener Kontaktgebiet)  $L_x, L_y$ , an den Rändern von Letzterem ein Aliasing Effekt auf. Die BOUSSINESQ und CERRUTI Funktionen auf denen die Lösung des Kontaktproblems basiert, zeigen sowohl lokal für jeden einzelnen Pressungspunkt als auch global für das Gesamtkontaktgebiet ein Abklingverhalten von dem Lastangriffspunkt hin zu dem Randgebiet (siehe Abbildung 2.7 (a)). Der Aliasing Effekt bei nicht ausreichend gewählter Periodenlänge ( $L_{P_x} < L_x$ ) drückt sich im Kontaktproblem, durch eine Überlappung der Lösung des realen Problems mit denen der benachbarten virtuellen Probleme (veranschaulicht in der Abbildung 2.7 (b)). Diese Überlappung führt zu Fehler in der Lösung des realen Kontaktproblems.



**Abb. 2.7:** Aliasing Effekt im Kontaktproblem, (a) Abklingverhalten der Boussinesq-Einflussfunktion, (b) Überlappungsproblem (Aliasing Effekt) am Rand des Berechnungsgebietes beim Lösen des Kontaktproblems mit FT

Durch eine ausreichende Erweiterung des Berechnungsgebietes  $L_{P_x}$  um ein  $x$ -faches der physikalischen Domäne  $L_x$  kann der Randeffekt gemindert werden. Die Arbeit von JU und FARRIS [JuFa96] zeigt eine bedeutsame Reduzierung der Aliasing Fehler bei einer fünffachen Gebietserweiterung. Die zur Beseitigung des Aliasing-Effekts notwendige Erweiterung des Bereichs geht jedoch auf Kosten der Berechnungseffizienz. LU et al. [LWL00] schlugen die sogenannte DC (diskrete convolution)-FFT Methode basierend auf dem Wrap-around und Zeropaading Verfahren vor. Damit lässt sich mit nur einer zweifachen Bereich-Erweiterung der Aliasing Fehler signifikant reduzieren. Auf die DC-FFT Methode wird im Abschnitt 3.6 detailliert eingegangen.

### 3 Numerische Umsetzung des Halbraumkontaktmodells

Dieses Kapitel widmet sich der numerischen Umsetzung des Halbraumkontaktmodells. Die Lösung des Kontaktproblems beginnt mit ihrer Formulierung als ein Minimierungsproblem mit Nebenbedingungen. Als Nebenbedingungen gelten die im Abschnitt 2.3 beschriebenen Kontaktbedingungen. Das aus dem Minimierungsproblem abgeleitete algebraische Gleichungssystem wird mit Hilfe der Konjugierten-Gradient-Methode (CGM: conjugate gradient method) gelöst. Im ersten Abschnitt 3.1 wird am Beispiel eines Normalkontaktproblems die Gewinnung der Gleichungssysteme erläutert. Das Verfahren der Konjugierte-Gradient als Gleichungslöser wird im zweiten Teil vorgestellt. Im dritten und vierten Teil werden zwei im Rahmen dieser Arbeit implementierte semi-analytische Kontaktalgorithmen vorgestellt. Diese Kontaktmodelle werden in dieser Arbeit später dazu verwendet, quasi-statische Montagevorgänge und Verschleiß am Maschinenelement-Radialwellendichtring zu simulieren.

Im Folgenden wird das Gleichungssystem eines normalen Kontaktproblems hergeleitet. Zur Veranschaulichung wird der in der Abbildung 3.1a dargestellte Kontakt zwischen einer elastischen Halbkugel und einer starren Ebene unter einer normalen Belastung  $F_z$  verwendet. Ein wichtiger Schritt vor der Lösung ist, wie bereits in Abschnitt 2.2 erwähnt, die Diskretisierung der Oberflächen. In der Abbildung 3.1b wird ein Berechnungsgebiet aus  $N_x \times N_y$  Flächenelementen (mit dem Abmaß  $dx, dy$  jeweils in die  $x$ - und  $y$ -Raumrichtungen) dargestellt. Aus der Differenz der diskretisierten Oberflächenprofilhöhen der Kontaktpartner wird in jedem Flächenelementzentrum ein Spaltwert  $h$  (siehe Abbildung 3.1a) bestimmt. Auf dem Berechnungsgebiet wird bei der Lösung des Kontaktproblems mittels der BOUSSINESQ-Lösung (2.39) die Normalverschiebung an einem beliebigen Punkt  $p_{ij}$  bestimmt.

Die Lösung des Kontaktproblems erfolgt in einem iterativen Prozess, der wie in der Abbildung 3.2 schematisch gezeigt wird, in drei Hauptschritten zusammengefasst werden kann. Auf diese Schritte wird im folgenden eingegangen.

- **Die Initialisierung.** Zu Beginn jedes Iterationsschrittes wird unter Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung die Pressungsverteilung auf dem Berechnungsgebiet initialisiert. Diese Initialisierung erfolgt am Anfang der Berechnung, wie auf der Abbildung 3.2 zu sehen ist, mittels der Gleichung (2.43). Hier wird aus der Normalkraft und der Elementgröße ein für alle Elemente konstanter Pressungswert (3.1) bestimmt. In den weiteren Berechnungsschritten werden als Startwerte die Werte

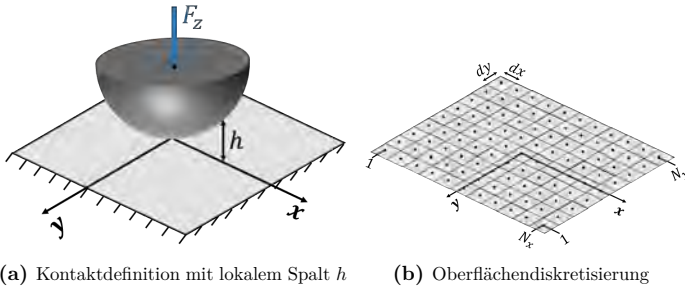


Abb. 3.1: Normalkontakt (elastische) Kugel - (starre)Platte

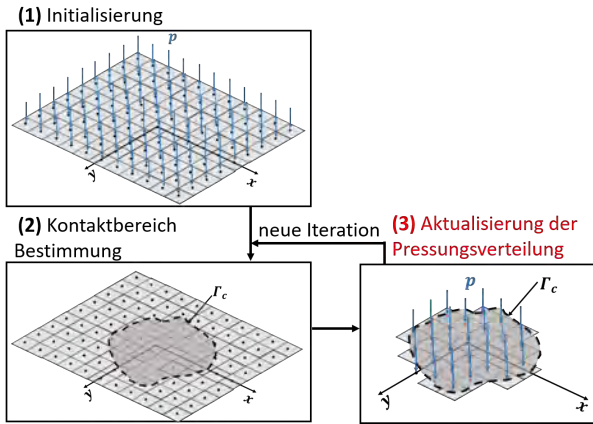


Abb. 3.2: Iteratives Lösungsschema eines normalen Kontaktproblems

aus dem vorherigen Iterationsschritt verwendet.

$$p = \frac{F_z}{N_x \cdot d_x \cdot N_y \cdot dy} \tag{3.1}$$

- Bestimmung des Kontaktbereichs.** Im zweiten Schritt wird der Kontaktbereich bestimmt. Dafür werden mit der Gleichung (2.40) die Oberflächenverschiebungen auf dem Berechnungsgebiet aufgrund der vorliegenden Druckverteilung bestimmt. Im Weiteren werden die berechneten Verschiebungswerte in die Spaltgleichung (2.44) eingesetzt. In einigen Diskretisierungspunkten ergeben sich negative Spaltwerte. Dies würde eine Durchdringung der Kontaktflächen bedeuten, welche physikalisch unmöglich ist. In solchen Punkten wird der Spalt auf null korrigiert

und als ein neuer Kontaktpunkt gezählt. Der somit entstandene Kontaktbereich  $\Gamma_c$  wird in der Abbildung 3.2 mit den in Rot markierten Kontaktpunkten dargestellt.

- **Aktualisierung der Pressungsverteilung.** Die Veränderung der Kontaktzone erzwingt eine Veränderung der Pressungsverteilung. Die Aktualisierung der Pressungsverteilung erfolgt im dritten Berechnungsschritt mittels des Variationsprinzips [Redd02]. Dieser Ansatz wurde zum ersten Mal von KALKER [Kalk77] vorgestellt und basiert auf einer Formulierung des Kontaktproblems als ein Minimierungsproblem. Zur Lösung des daraus abgeleiteten Gleichungssystems wird die im Abschnitt 3.2 beschriebene Methode der konjugierten Gradienten benutzt. Im Folgenden wird auf die Herleitung des Gleichungssystems für den eben beschriebenen Normalkontakt eingegangen. Die Gleichungen haben, wie gerade beschrieben, als Hauptziel für eine gegebene Startpressungsverteilung und eine aktuelle bestimmte Kontaktfläche die aktuelle Pressungsverteilung zu bestimmen (d.h. die Pressungsverteilung zu aktualisieren).

Aus den bereits beschriebenen drei Hauptschritten bei der Lösung des Normalkontaktproblems wird deutlich, dass die Hauptschwierigkeit in der Aktualisierung der Pressungsverteilung liegt. Diese Pressungsverteilung muss dabei auf dem Berechnungsgebiet, welches aus Punkten im Kontaktbereich  $\Gamma_c$  und außerhalb besteht, die in der Gleichung (2.45) aufgestellte Komplementaritätsbedingungen erfüllen:

$$\begin{cases} p(x,y) > 0; & h(x,y) = h_i(x,y) - u_z(x,y) - \delta_z = 0 \forall (x,y) \in \Gamma_c \\ p(x,y) = 0; & h(x,y) = h_i(x,y) - u_z(x,y) - \delta_z > 0 \forall (x,y) \notin \Gamma_c \end{cases} \quad (3.2)$$

Es wurde bewiesen [Tka18], dass die Lösung der Gleichung (3.2) durch die Minimierung der gesamten komplementären Energie  $\Pi_{kom}$  auf der Oberfläche gefunden werden kann. Hier wird die komplementäre Energie aus der Summe der Deformationsenergie auf der Oberfläche aufgrund der aufgebrachten externen Kräfte und Verschiebungen wie folgt ausgedrückt [Tkacl8]:

$$\Pi_{kom} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} p(x,y) \cdot u_z(x,y) d\Gamma_c + \int_{\Gamma_c} p(x,y) \cdot (h_i(x,y) - \delta_z) d\Gamma_c \quad (3.3)$$

### 3.1 Konjugierte-Gradient-Methode als Gleichungssystemlöser

Zur Lösung linearer Gleichungssysteme der Art (3.4) bieten sich im allgemein sowohl direkte als auch Iterative Verfahren an.

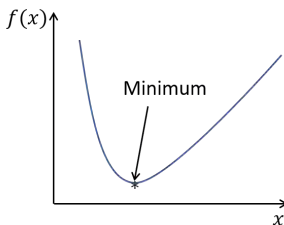
$$Ax = b \quad (3.4)$$

Der große Rechenaufwand bei direkten Verfahren, wie z.B. die GAUSS-Elimination Methode, macht solche Methoden für sehr große Gleichungssysteme, wie sie bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen auftreten, selbst mit leistungsstarken Rechnern häufig ungeeignet. Die Anzahl an Rechenoperationen stellt im Zusammenhang mit dem bei jeder Operation unvermeidlichen Rundungsfehler einen weiteren Nachteil der direkten Verfahren dar. Die Koeffizientenmatrix  $A$  wird bei den direkten Verfahren während der Rechnung verändert, was einen großen Speicherplatzbedarf mit sich bringt. Iterative Lösungsverfahren basieren, im Gegensatz zu direkten Lösungsverfahren, auf einer Approximation der gesuchten Lösung in jedem Iterationsschritt. Hier wird im Gegensatz zum direkten Verfahren im Lauf der Berechnung die Koeffizientenmatrix  $A$  nicht verändert, sondern jeweils ein neuer Näherungsvektor  $x$  sukzessiv bestimmt und dadurch weniger Rechenaufwand betrieben und Speicherplatz benötigt. Iterative Verfahren zeigen sich deutlich weniger für Rundungsfehler anfällig.

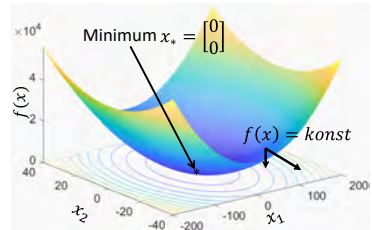
Die konjugierte-Gradient-Methode stellt als Gleichungslöser einen Meilenstein der in dieser Arbeit implementierten semi-analytischen Kontaktalgorithmen, beschrieben in den Abschnitten 3.3 und 3.4, dar. Sie wird in der meisten Literatur im Zusammenhang mit Optimierungsaufgaben erwähnt. Aus diesem Grund werden im folgenden Abschnitt zuerst mittels einfacher Beispiele Grundlagen der Optimierung vorgestellt.

#### Minimierungsproblem ohne Restriktionen:

In der Optimierungslehre wird die zu optimierende Funktion als Zielfunktion und die veränderliche Größe als Parameter oder Variable genannt. Das einfachste eindimensionale Optimierungsproblem ist das in der Abbildung 3.3 schematisch dargestellte Extremaprobem. Gesucht sei das Minimum einer Zielfunktion  $f(x)$ , welche von einer Variable  $x$  abhängt. Für solche Probleme mit analytisch beschreibbarer Funktion erfolgt die allgemeine Lösung über die zwei wichtigsten Bedingungen (3.5) und (3.6).



**Abb. 3.3:** 1D Minimierungsproblem



**Abb. 3.4:** 2D Minimierungsproblem

Diese Gleichungen geben jeweils eine notwendige und hinreichende Bedingung für einen Extrempunkt. Aus der ersten Bedingung (erste Ableitung zu null gesetzt) lassen sich Kandidaten für Extrema finden. Werden diese Kandidaten in der zweiten Bedingung

(zweite Ableitung) eingesetzt, dann kann bei einem streng positiven oder negativen Wert auf ein lokales Minimum oder Maximum gefolgert werden.

$$\text{Notwendige Bedingung:} \quad f'(x) = 0 \quad (3.5)$$

$$\text{Hinreichende Bedingung:} \quad f''(x) : \begin{cases} < 0, & \text{lokal Minimum} \\ > 0, & \text{lokal Maximum} \end{cases} \quad (3.6)$$

Die Lösung von mehrdimensionalen (mit mehreren Variablen) Optimierungsproblemen erfolgt ähnlich wie im gerade beschriebenen 1D Fall. Im Folgenden wird der allgemeine Lösungsweg anhand des folgenden 2D Optimierungsproblems mit quadratischer Zielfunktion [NoWr06] erläutert:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = x_1^2 + 10x_2^2 \quad (3.7)$$

Es ist für dieses Beispiel direkt ersichtlich, wie aus den Funktionswerten und Höhenlinien  $f(x) = \text{konst}$  in Abbildung 3.4 zu sehen ist, dass das Minimum dieser Zielfunktion an der Stelle  $x^* = [0,0]^T$  liegt. Im Allgemeinen wird die Existenz einer Lösung zu (3.7), ähnlich wie im 1D Fall, durch die notwendige und hinreichende Bedingung gegeben:

- **Die notwendige Bedingung** für ein lokales Minimum an dem Punkt  $x$  wird durch den Gradient  $\nabla f(x)$  wie folgt ausgedrückt:

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 20x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

- **Die hinreichende Bedingung** wird durch die HESSE-Matrix  $H(x)$  (Matrix der gemischten ersten Ableitungen) gegeben:

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Für eine solche quadratische Zielfunktion wie in (3.7), kann die notwendige Bedingung (3.8) im Zusammenhang mit der HESSE-Matrix aus (3.9) zu folgendem Gleichungssystem überführt werden:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 20x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow Ax = b \quad (3.11)$$

Mit  $A = H$  als die HESSE-Matrix. Mit Hilfe (3.11) lässt sich die Zielfunktion und somit auch das Optimierungsproblem (3.7) wie folgt:



$$f(x) = x_1^2 + 10x_2^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} x^T A x - x^T b \quad (3.13)$$

neu schreiben. Die Äquivalenz in (3.13) stellt den Beweis, dass für eine allgemeine quadratische Zielfunktion das Minimierungsproblem dieser Zielfunktion gleich mit dem Lösen eines Gleichungssystems ist. Das Gleichungssystem in (3.11) bzw. das Optimierungsproblem (3.14) wird im Weiteren mit dem konjugierten Gradient-Verfahren gelöst.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b \quad (3.14)$$

Die konjugierte Gradient Methode:

Voraussetzung für die Anwendung der konjugierten Gradient Methode ist die Symmetrie und positive Definitheit (spd) der HESSE-Matrix  $A$  [NoWr06]. Dabei lässt sich die positive Definitheit einer Matrix  $A$  durch folgende Bedingung überprüfen:

$$x^T A x > 0; \forall (x > 0) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.15)$$

Die Grundidee und Ansatz der Suchrichtungsmethode wird schematisch in der Abbildung 3.5 für ein 2D Optimierungsproblem dargestellt. Iterativ wird, ausgehend von einem aktuellen Suchpunkt  $x_k \in \mathbb{R}^2$  und einer aktuellen Suchrichtung  $d_k \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , entlang dieser Suchrichtung ein nächster Näherungslösungspunkt  $x_{k+1}$  gesucht:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha d_k \quad (3.16)$$

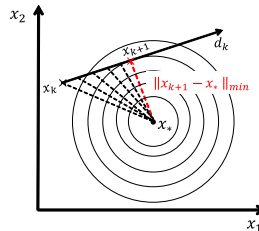


Abb. 3.5: Suchrichtungsmethode

sodass der Abstand dieses neuen Näherungslösungspunktes zum gesuchten Minimum  $x_*$  minimal wird, wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  die Schrittweite beschreibt. Eine optimale Schrittweite entlang

der aktuellen Suchrichtung  $d_k$  wird in dem Ansatz (3.16) durch die Minimierung folgender 1D Zielfunktion (aus (3.16) in (3.14)) bestimmt:

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= f(x + \alpha d) \\ &= \frac{1}{2}(x + \alpha d)^T A(x + \alpha d) + (x + \alpha d)^T b \\ &= \frac{1}{2}(x^T A x + x^T A \alpha d + \alpha d^T A x + \alpha^2 d^T A d) - (x^T b + \alpha d^T b)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Mit  $A$  symmetrisch  $\rightarrow x^T A d = d^T A x$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \frac{1}{2}x^T A x - x^T b + \alpha d^T (A x - b) + \frac{1}{2}\alpha^2 d^T A d \\ &= f(x) + \alpha d^T (A x - b) + \frac{1}{2}\alpha^2 d^T A d\end{aligned}\quad (3.18)$$

Die notwendige Bedingung für ein Minimum der Funktion lautet:

$$\varphi(\alpha)' = d^T (A x - b) + \alpha d^T A d = 0 \quad (3.19)$$

und ermöglicht die Bestimmung folgendes Ausdrucks der optimalen Schrittweite:

$$\alpha = \frac{-d^T (A x - b)}{\alpha d^T A d} \quad (3.20)$$

Die Gleichung (3.20) stellt für die iterative Lösung eines gegebenen Optimierungsproblems ( $Ax = b$ ) die Beziehung zwischen einer gewählten Suchrichtung und der sinnvollen Schrittweite in dieser Richtung dar. Jedoch stellt sich die Frage, wie eine optimale Suchrichtung zu wählen ist. Während die Wahl der Schrittweite einen großen Einfluss auf die Genauigkeit der Suchrichtungsmethode hat, beeinflusst, wie im Folgenden gezeigt wird, die Wahl der Suchrichtung das Konvergenzverhalten der Methode. Das erste Verfahren zur Ermittlung der Suchrichtung, die im Folgenden präsentiert wird, ist das Gradientenverfahren oder Verfahren des steilsten Abstiegs. Es ist bekannt, dass der Gradient einer Funktion in einem beliebigem Punkt zur Richtung des steilsten Anstiegs zeigt und der negative Gradient in Richtung des steilsten Abstiegs. Dieses Wissen wird für die Minimierung beim Gradientenverfahren genutzt. Als Suchrichtung wird die Richtung des steilsten Abstiegs, gegeben durch den negativen Gradienten  $\nabla f(x)$ , gewählt. Eine weitere Eigenschaft des Gradienten ist, wie auf der Abbildung 3.6 zu sehen ist, dass er immer senkrecht zur Höhenlinie steht. Diese zweite Eigenschaft führt bei Optimierungsproblemen mit schlecht konditionierter Matrix  $A$  zum sogenannten „Zickzackverhalten“ wie in Abbildung 3.7 dargestellt ist. Dieses ineffiziente Konvergenzverhalten kommt aus der Linearabhängigkeit der einzelnen Suchrichtungen im Laufe der Iterationen.

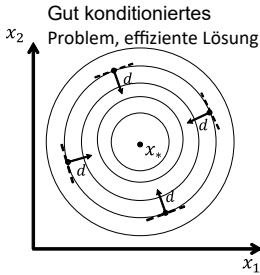


Abb. 3.6: gut konditioniertes Problem

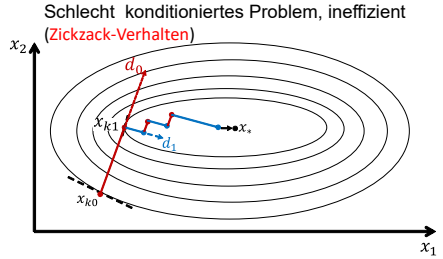


Abb. 3.7: Zickzackverhalten bei schlechter Konditionierung

Um das schlechte Konvergenzverhalten des Gradientenverfahrens zu verbessern, nutzt das alternative Konjugierte Gradientenverfahren einen Korrekturterm  $\beta$  zur Orthogonalisierung der Suchrichtungen zueinander. Zur Bestimmung der neuen Suchrichtungen werden beim Konjugierte Gradientenverfahren Informationen vom vorherigen Schritt genutzt:

$$d_0 = -\nabla f(x_0) \quad (3.21)$$

$$d_k = -\nabla f(x_k) + \beta_k d_{k-1} \quad (3.22)$$

Als Startsuchrichtung wird gemäß (3.21) direkt der steilste Abstieg  $-\nabla f(x_0)$  gewählt, während bei den weiteren Schritten gemäß (3.22) zuerst die vorherige Suchrichtung  $d_{k-1}$  mit einem Term  $\beta_k$  korrigiert und zu dem Abstieg  $-\nabla f(x_k)$  addiert wird. Der Korrekturfaktor  $\beta_k$  lässt sich durch folgende Beziehung:

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2} \quad (3.23)$$

bestimmen. Mittels dieser Korrektur erfolgt eine Orthogonalisierung zwischen der neuen  $d_k$  und alten  $d_{k-1}$  Suchrichtung in der durch die Matrix  $A$  definierten Metrik, sodass folgendes Skalarprodukt gilt:

$$\langle d_k, d_{k-1} \rangle_A = d_k^T A d_{k-1} = 0 \quad (3.24)$$

Aufgrund der  $A$ -Orthogonalitätsbedingung in (3.24) zwischen den einzelnen Suchrichtungen, werden diese Suchrichtungen auch als konjugierte Richtungen bezeichnet.

Im Folgenden wird die Iterationsvorschrift beim konjugiertes Gradientenverfahren zusammengefasst. Zu Beginn wird, ausgehend von einer Startlösung  $x_0$  eine Startsuchrichtung  $d_0$  bestimmt. Dieser Suchrichtung entspricht auch das Residuum  $r_0$  für die Startlösung.

$$d_0 := \nabla f(x_0) := r_0 = b - A x_0 \quad (3.25)$$

Ausgehend von diesen Startwerten in (3.25) wird bei jeder Iteration die Schrittweite  $\alpha_k$ , die Lösung  $x_k$ , das Residuum  $r_k$  und Suchrichtung  $d_k$  mit den bereits hergeleiteten Gleichungen, wie in dem unteren Ablauf (siehe Abb. 3.8) gezeigt wird, aktualisiert.

---

<b>CGM algorithm</b>	
1: <b>procedure</b> CGM( $A, b, x_0$ )	
2: $d_0 := \nabla f(x_0) := x_0 = b - Ax_0$	> Initialisierung
3: <b>for</b> $k=1:n$ <b>do</b>	
4: $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{r_k^T A d_k}$ ;	> Schrittweite
5: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ ;	> neuer Suchpunkt / Näherungslösung
6: $r_{k+1} = r_k - \alpha_k d_k$ ;	> neuer Residuum
7: $\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$ ;	> Orthogonalisierung der Suchrichtungen
8: $d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_{k+1} d_k$ ;	> neue Suchrichtung
9: <b>end for</b>	
10: <b>end procedure</b>	

**Abb. 3.8:** Berechnungsschritte des konjugierten Gradient Methode [NoWr06]

## 3.2 Normal-Kontaktalgorithmus nach POLONSKY und KEER

Seit den 70er, 80er Jahren wurden mehrere Kontaktalgorithmen entwickelt. Die ersten Methoden basierten auf der Beschreibung einer aktiven Menge (an denen der Kontakt als wirksam angenommen wird), die sich im Laufe des iterativen Berechnungsprozesses in Richtung des tatsächlich zu suchenden Kontaktbereichs entwickelt. Methoden zur Lösung von Kontaktgleichungen können in zwei Kategorien eingeteilt werden: direkte Matrix-Invertierungsmethoden und iterative Methoden. Die Entwicklung der Kontaktalgorithmen spiegelt die aufgetretenen Schwierigkeiten wider. Diese Entwicklung wird im Folgenden zusammengefasst [Gall07].

### Die Matrix-Invertierungsmethode:

Die Matrix-Invertierungsmethode erfordert eine große Speicherkapazität und hohe Berechnungszeiten. Algorithmen, die auf dieser Methode basieren, wie z. B. die von CONRY et al. [CoSe71] und KALKER et al. [KaRa72] vorgeschlagenen wurde, ermöglichten Anwendungen, die nur auf ein in jeweils 16 bzw. 84 Punkte diskretisiertes Gebiet beschränkt sind [Gall07].

### Die iterativen Methoden:

Aus Speicherplatzgründen erscheint es sinnvoller, iterative Verfahren anstelle der Matrix Invertierung zu verwenden. Obwohl die konjugierten Gradientenverfahren schneller sein sollen, wird das GAUSS-SEIDEL-Verfahren bis zur Arbeit von ALLWOOD [Allw05] verbreitet eingesetzt. In der Literatur [Allw05] wird ein auf dem konjugierten-Gradientenverfahren basierender Normalkontakt-Algorithmus vorgeschlagen und durch eine Ver-

gleichsstudie die erhebliche Verbesserung der Konvergenz-Geschwindigkeit gegenüber dem iterativen GAUSS-SEIDEL-Verfahren dargestellt.

Neuere Methoden, die derzeit verwendet werden, basieren auf der schnellen Berechnung der am Kontaktproblem auftretenden Matrixoperationen. Eine erste Methode, die von BRANDT und LUBRECHTS [BrLu90] initiiert wurde, ist das Mehrgitterverfahren. Sie wurde effektiv in Verbindung mit der konjugierten-Gradienten-Methode in dem von POLONSKY und KEER [PoKe99] vorgeschlagenen Algorithmus verwendet. Dieser Algorithmus wird, ohne Mehrgitterverfahren wie im Weiteren beschrieben, in dieser Arbeit implementiert. Eine zweite Methode ist die Verwendung der FFT. Dies wurde von JU und FARRIS [JuFa96] initiiert und in Algorithmen verwendet, wie sie von HU et al. [HBZ99], AI und SAWAMIPHAKADI [AiSa99] eingesetzt wurden. Die Verwendung von FOURIER-Transformationen im Kontaktproblem wird in Abschnitt 3.6 ausführlich behandelt. Für die Lösung der Matrixoperationen wird in dieser Arbeit anstelle des Mehrgitterverfahrens die FOURIER-Transformation verwendet [PoKe00].

Im Folgenden wird der in Abbildung 3.9 schematisierte Kontaktalgorithmus bei Vorgabe der Kraft erläutert. Der besseren Verständlichkeit halber wird der in [Gall07] eingeführte LAGRANGE-Formalismus bevorzugt. Wie bereits im Abschnitt 2.2 erläutert, lässt sich der Normalkontakt durch folgende Gleichungen (Spaltgleichung, Oberflächenverschiebungen, Gleichgewichtsgleichung):

$$g_{ij} = h_{ij} + u_{ij}^z - \delta_z \quad (3.26)$$

$$u_{ij}^z = \sum_{N_x} \sum_{N_y} C_{ijkl}^z p_{kl} \quad (3.27)$$

$$\sum_{(i,j) \in \Gamma_c} p_{ij} = F_z / \Gamma_c \quad (3.28)$$

beschreiben. Die Gleichungen (3.26 - 3.28) werden in Indizesform für ein in  $N_x \times N_y$ -Punkten diskretisiertes Gebiet angegeben. Dieses Gleichungssystem muss folgende Nebenbedingungen einhalten:

$$g_{ij} = 0, p_{ij} > 0; (i,j) \in \Gamma_c \quad (3.29)$$

$$g_{ij} > 0, p_{ij} = 0; (i,j) \notin \Gamma_c \quad (3.30)$$

Als LAGRANGE-Multiplikator  $\lambda_{ij}$  für das Minimierungsproblem wird der lokale Spalt  $g_{ij}$  definiert. Der Normalkontakt-Algorithmus kann in folgende Schritte zusammengefasst werden:

1. Die Kontaktpressungsmatrix  $p_{ij}$  soll unter Berücksichtigung des Kraftgleichgewichts initialisiert werden. Das gesamte Berechnungsgebiet oder die potenzielle Kontaktfläche  $\Gamma_p$  wird als im Kontakt  $\Gamma_c \equiv \Gamma_p$  und  $\lambda_{ij} = 0$  angenommen. Die Hilfsvariablen  $\zeta$

und  $G_{old}$  werden definiert und initialisiert, indem  $\zeta = 0$  und  $G_{old} = 1$  gesetzt werden. Der Fehler wird auf den gewünschten Wert gesetzt und der iterative Prozess kann beginnen.

2. Die Oberflächenverschiebung  $u_{ij}^z$  wird mittels der DC-FFT (siehe Abschnitt 3.6) berechnet.
3. Der Spalt zwischen den beiden Körpern auf der aktuellen Kontaktfläche wird berechnet:

$$g_{ij} = h_{ij} + u_{ij}^z \quad (i,j) \in \Gamma_c \quad (3.31)$$

Dies ist das Residuum des zu lösenden linearen Systems und muss nach 3.26 mit der Starrkörperbewegung  $\delta_z$  korrigiert werden. Die Starrkörperbewegung  $\delta_z$  wird durch den Mittelwert des bereits bestimmten Spaltes (3.31) approximiert:

$$\delta_z = \frac{1}{N_c} \sum_{(i,j) \in \Gamma_c} g_{ij} \quad (3.32)$$

$N_c$  sei die Anzahl der bereits im Kontakt vorliegenden Punkte. Es folgt dann die Aktualisierung des Spaltes

$$g_{ij} = g_{ij} - \delta_z, \quad (i,j) \in \Gamma_c \quad (3.33)$$

4. Die Abstiegsrichtung  $d$  wird dann im Rahmen des konjugierten Gradienten aus dem Residuum und der vorherigen Abstiegsrichtung berechnet (Schritt 8 in der Abb. 3.8)

$$d_{ij} = -g_{ij} + \zeta \frac{G_{new}}{G_{old}} d_{ij} \quad (i,j) \in \Gamma_c \quad (3.34)$$

$$d_{ij} = 0 \quad (i,j) \notin \Gamma_c \quad (3.35)$$

Mit:

$$G_{new} = \sum_{(i,j) \in \Gamma_c} g_{ij}^2 \quad (3.36)$$

Der in (3.36) berechnete  $G_{new}$  wird in  $G_{old}$  gespeichert und die Variable  $\zeta$  mit dem Wert 1 reinitialisiert.

5. Die DC-FFT Methode wird auf die Abstiegsrichtung  $d_{ij}$  angewendet:

$$r_{ij}^p = \sum_{N_x} \sum_{N_y} C_{ijkl}^z d_{kl} \quad (3.37)$$

Dann wird der Abstiegsschritt  $\alpha$  berechnet (Schritt 4 des konjugierten Gradienten)

$$\alpha = \frac{\sum_{(i,j) \in \Gamma_c} g_{ij}^2}{\sum_{(i,j) \in \Gamma_c} d_{ij} r_{ij}^p} \quad (3.38)$$

6. Die Pressungen werden aktualisiert (Schritt 5 des konjugierten Gradienten)

$$p_{ij} = p_{ij} + \alpha d_{ij} \quad (i,j) \in \Gamma_c \quad (3.39)$$

7. Die Komplementaritätsbedingungen werden erzwungen

$$\text{Wenn: } p_{ij} < 0, \quad (i,j) \in \Gamma_c, \quad \text{dann } p_{ij} \leftarrow 0, \quad \Gamma_c \leftarrow \Gamma_c / (i,j) \quad (3.40)$$

$$\text{Wenn: } g_{ij} < 0, \quad (i,j) \notin \Gamma_c, \quad \text{dann } p_{ij} \leftarrow -\alpha g_{ij}, \quad \zeta \leftarrow 0, \quad \Gamma_c \leftarrow \Gamma_c \cup (i,j) \quad (3.41)$$

Die Variable  $\zeta$  wird zur neuen Initialisierung des konjugierten Gradienten verwendet. Dies erfolgt für  $\zeta \leftarrow 0$ . Wenn bei der aktuellen Iteration in einem Punkt ein negativer Spaltwert entsteht, wird dieser Punkt in die potenzielle Kontaktzone  $\Gamma_c$  bewegt und der Gradient wird bei der nächsten Iteration zurückgesetzt. Außerdem wird der Nullwert des Drucks an dieser Stelle von  $-\alpha g_{ij}$  nachjustiert.

8. Bei Bedarf wird die Gleichgewichtsgleichung erzwungen. Das folgende Konvergenzkriterium wird getestet

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sum_{(i,j) \in \Gamma_p} (p_{ij} - p_{old})}{\sum_{(i,j) \in \Gamma_p} p_{ij}} \quad (3.42)$$

Zum Schluss werden die Kontaktpressungen gespeichert,  $p_{old} \leftarrow p_{ij}$

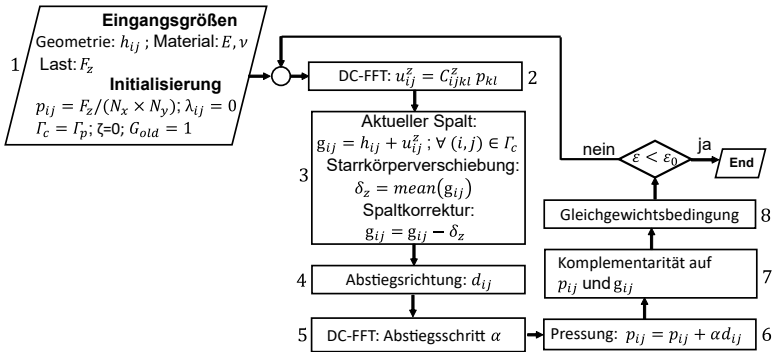


Abb. 3.9: Normal Kontaktalgorithmus nach POLONSKY und KEER [PoKe99]

### 3.3 Tangential Kontaktalgorithmus

Die Lösung des Tangentialkontaktproblems ist aufgrund der größeren Anzahl an Unbekannten schwieriger als im Falle des Normalkontakts. In der Literatur werden Kontaktal-

gorithmen vorgeschlagen, beispielsweise [Will08; WWWZ10; Gall07; Full11; GND10]. In dieser Arbeit fiel die Wahl auf die in [Gall07; Full11; GND10] vorgestellte Methode. Für diese Wahl sprechen zwei Gründe. Der erste Grund ist die Verwendung des LAGRANGE-Formalismus, der das Verständnis des Kontaktproblems aus mathematischer Sicht erleichtert. Der zweite Grund ist die Verwendung einer allgemeinen Methode zur Abschätzung der starren Verformungen  $\delta_x, \delta_y$  in (2.47), die durch tangentialen Kräfte verursacht werden. Diese Methode ermöglicht im Vergleich zu der beispielsweise in [WWWZ10] verwendete JOHNSON Formel [John03] für die HERTZ'schen Kontakte, eine breitere Anwendung auf Kontakte mit rauen Oberflächen.

Die Hauptschritte des tangentialen Kontaktalgorithmus [Gall07] (siehe Ablaufschema in Abbildung 3.10) werden im Folgenden beschrieben. Für eine ausführliche Beschreibung der Grundlage des LAGRANGE-Formalismus, auf dem dieser Algorithmus basiert, wird auf die Literatur [Gall07] verwiesen. Als LAGRANGE Multiplikatoren  $\lambda_{ij}$  für das tangential Problem wird der Betrag der lokalen Gleitwege  $s_x, s_y$  definiert. Der Algorithmus kann in folgenden zehn Schritten zusammengefasst werden:

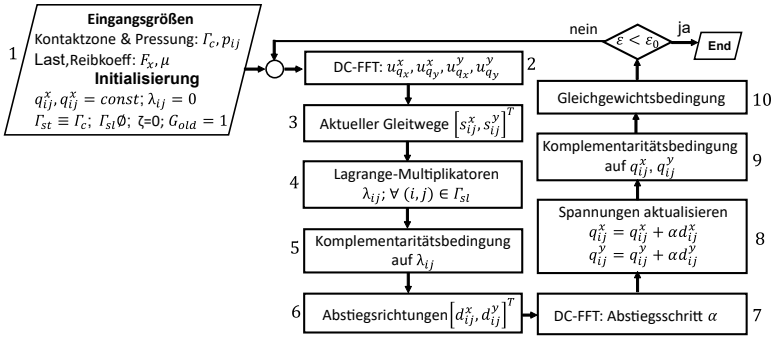


Abb. 3.10: Tangential-Kontaktalgorithmus nach [Gall07]

1. Als erstes werden die Eingangsgrößen des tangentialen Problems definiert. Dazu gehören neben der Tangentiallast  $F_x$  und dem Reibungskoeffizient  $\mu$  die vorher im Normalkontaktalgorithmus bestimmte aktuelle Kontaktfläche  $\Gamma_c$  und Normalkontakt-  
 pression  $p_{ij}$ . Die Schubspannungsmatrizen  $q_{ij}^x, q_{ij}^y$  werden unter Berücksichtigung  
 des tangentialen Kraftgleichgewichts initialisiert. Zunächst werden zwei Schubspan-  
 nungswerte aus dem Verhältnis der äußeren Tangentialkräfte  $F_x, F_y$  zur Gesamt-  
 fläche der Kontaktzone berechnet. Diese Werte werden in jedem Kontaktpunkt als  
 initiale Schubspannung in der x- bzw. y-Richtung definiert. Die gesamte Kontakt-  
 fläche wird als haftend angenommen  $\Gamma_{st} \equiv \Gamma_c, \Gamma_{st} = \emptyset$ . Die Hilfsvariablen  $\zeta$  und  $G_{old}$   
 werden jeweils mit 0 und 1 initialisiert und  $\lambda_{ij}$  als 0 definiert. Der Fehler wird auf  
 den gewünschten Wert gesetzt und der iterative Prozess kann beginnen.



2. Die Oberflächenverschiebung in x-Richtung ( $u_{q_x}^x + u_{q_y}^x$ ) und y-richtung ( $u_{q_x}^y + u_{q_y}^y$ ) wird mittels der DC-FFT (siehe Abschnitt 3.6) berechnet und die Starrkörperverschiebungen  $\delta_x, \delta_y$  aus [Gall07] abgeschätzt.

3. Die Gleitwege  $(s_{ij}^x, s_{ij}^y)^T$  werden mittels (2.47) bestimmt:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} s_{ij}^x \\ s_{ij}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_{q_x}^x + u_{q_y}^x) - \delta_x \\ (u_{q_x}^y + u_{q_y}^y) - \delta_y \end{bmatrix}; \quad (i, j) \in \Gamma_c \quad (3.43)$$

4. Die Lagrange-Multiplikatoren werden aus der Norm der Gleitwege in der aktuellen Gleitzone  $\Gamma_{sl}$  berechnet:

$$\lambda_{ij} = - \left\| \begin{bmatrix} s_{ij}^x \\ s_{ij}^y \end{bmatrix} \right\| \cdot \text{sign}(s_{ij}^x \cdot (u_{q_x}^x + u_{q_y}^x) + s_{ij}^y \cdot (u_{q_x}^y + u_{q_y}^y)); \quad (i, j) \in \Gamma_{sl} \quad (3.44)$$

Mit  $\text{sign}()$  als Vorzeichenfunktion (liefert das Vorzeichen des Funktionsargument)

5. Die Komplementaritätsbedingungen an den Lagrange Multiplikatoren werden erzwungen:

$$\text{wenn: } \lambda_{ij} < 0, (i, j) \notin \Gamma_{sl} \quad \text{dann} \quad \zeta \leftarrow 0, \Gamma_{sl} \cup (i, j) \quad (3.45)$$

6. Die Abstiegsrichtung  $d_{ij}$  wird dann im Rahmen des konjugierten Gradienten aus dem Residuum und der vorherigen Abstiegsrichtung berechnet:

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} d_{ij}^x \\ d_{ij}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ij}^x \\ s_{ij}^y \end{bmatrix} + \zeta \frac{G}{G_{old}} \begin{bmatrix} d_{ij}^x \\ d_{ij}^y \end{bmatrix}; \quad (i, j) \in \Gamma_{st} \quad (3.46)$$

$$d_{ij} = \begin{bmatrix} d_{ij}^x \\ d_{ij}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ij}^x + \lambda_{ij} \frac{q_{ij}^x}{\mu p_{ij}} \\ s_{ij}^y + \lambda_{ij} \frac{q_{ij}^y}{\mu p_{ij}} \end{bmatrix} + \zeta \frac{G}{G_{old}} \begin{bmatrix} d_{ij}^x \\ d_{ij}^y \end{bmatrix}; \quad (i, j) \in \Gamma_{sl} \quad (3.47)$$

Mit:

$$G = \sum_{(i, j)} \left( s_{ij}^x + \lambda_{ij} \frac{q_{ij}^x}{\mu p_{ij}} \right)^2 + \left( s_{ij}^y + \lambda_{ij} \frac{q_{ij}^y}{\mu p_{ij}} \right)^2; \quad (i, j) \in \Gamma_c \quad (3.48)$$

Der Wert von  $G$  wird in die Variable  $G_{old}$  gespeichert und  $\zeta$  wird zu 1 reinitialisiert

7. Die DC-FFT Methode wird auf die Abstiegsrichtung  $d_{ij}$  angewendet:

$$r_{ij} = \begin{bmatrix} r_{ij}^x \\ r_{ij}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{kl} C_{ij}^x C_{ij}^x C_{ij}^x x \cdot d_{kl}^x + \sum_{kl} C_{ij}^x C_{ij}^x C_{ij}^y y \cdot d_{kl}^y \\ \sum_{kl} C_{ij}^y C_{ij}^y C_{ij}^x x \cdot d_{kl}^x + \sum_{kl} C_{ij}^y C_{ij}^y C_{ij}^y y \cdot d_{kl}^y \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Dann wird der Abstiegschritt  $\alpha$  berechnet:

$$\alpha = \frac{\sum_{(i, j)} \left( s_{ij}^x + \lambda_{ij} \frac{q_{ij}^x}{\mu p_{ij}} \right)^2 + \left( s_{ij}^y + \lambda_{ij} \frac{q_{ij}^y}{\mu p_{ij}} \right)^2}{d_{ij}^x \cdot r_{ij}^x + d_{ij}^y \cdot r_{ij}^y}; \quad (i, j) \in \Gamma_c \quad (3.50)$$

8. Die Schubspannungen werden aktualisiert:

$$\begin{bmatrix} q_{ij}^x \\ q_{ij}^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{ij}^x \\ q_{ij}^y \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} q_{ij}^x \\ q_{ij}^y \end{bmatrix}; \quad (i,j) \in \Gamma_c \quad (3.51)$$

9. Die Komplementaritätsbedingungen für die Schubspannungen werden überprüft:

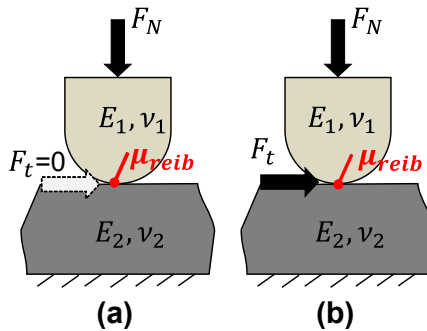
$$\text{wenn: } \lambda_{ij} < 0, (i,j) \notin \Gamma_{sl} \quad \text{dann} \quad \zeta = 0, \Gamma_{sl} \leftarrow \Gamma_{sl} \cup (i,j) \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} q_{ij}^x \\ q_{ij}^y \end{bmatrix} = \frac{\mu p_{ij}}{\sqrt{(q_{ij}^x)^2 + (q_{ij}^y)^2}} \begin{bmatrix} q_{ij}^x \\ q_{ij}^y \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

10. Bei Bedarf wird die Gleichgewichtsgleichung erzwungen. Der folgende Konvergenzfehler wird getestet:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{(i,j)} \sqrt{(q_{ij}^x - q_{old}^x)^2 + (q_{ij}^y - q_{old}^y)^2}}{\sqrt{(q_{ij}^x)^2 + (q_{ij}^y)^2}}; \quad (i,j) \in \Gamma_c \quad (3.54)$$

Mithilfe des Kontaktalgorithmus in Abbildung 3.10 lassen sich Kontaktprobleme mit partiellem Gleiten, wie in Abbildung 3.11 schematisch dargestellt, lösen.

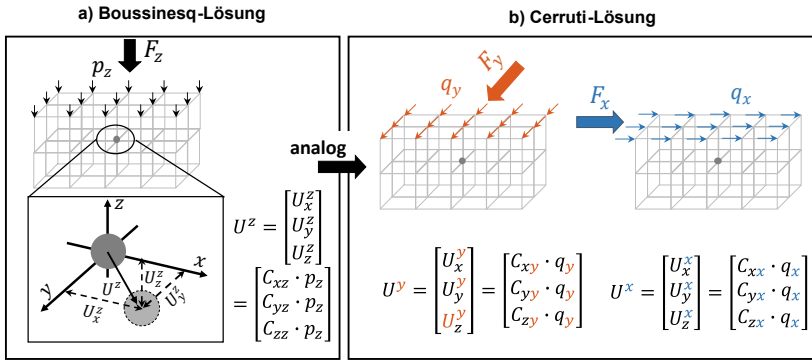


**Abb. 3.11:** Punktcontact mit partiellem Gleiten, (a) ohne Tangentialkraft und (b) mit Tangentialkraft

In Abbildung 3.11 werden zwei Körper mittels der Normalkraft  $F_N$  in Kontakt gebracht. Für beide Kontaktfälle ist in der tangentialen Richtung ein Reibungskoeffizient  $\mu_{reib}$  definiert. In dem in Abbildung 3.11 (b) abgebildeten Kontakt wird im Vergleich zu 3.11 (a) zusätzlich zur Definition eines Reibungskoeffizienten eine Tangentialkraft  $F_t$  aufgebracht.

Die Definition eines Reibungskoeffizienten resultiert aus einer Aufteilung des Kontaktgebiets in zwei Zonen, mit Haft- und Gleitbedingung. Eine zusätzliche Tangentialkraft im Kontakt sorgt für eine Verkleinerung der Haftzone zugunsten der Gleitzone. Wie auf der Abb. 3.12 veranschaulicht wird, lassen sich aus den BOUSSINESQ und CERRUTI Lösungen, Einflusskoeffiziente ( $C_{xz}, C_{xy}, \dots, C_{zx}$ ) zur Bestimmung der Verschiebungen in allen drei Raumrichtungen  $x, y, z$  bestimmen. Diese Verschiebungen werden durch eine Normalkraft  $F_z$  bzw. Pressung  $p_z$  oder Tangentialkräfte  $F_x, F_y$  bzw. Schubspannungen  $q_x, q_y$  verursacht. Die gesamten Verschiebungen lassen sich wie in (2.42) beschreiben:

$$\begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_x^x + U_x^y + U_x^z \\ U_y^x + U_y^y + U_y^z \\ U_z^x + U_z^y + U_z^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (3.55)$$



**Abb. 3.12:** Verschiebungsanteile auf dem Halbraum beim Normalkontakt: a) Boussinesq-Lösung und Tangentialkontakt: b) Cerruti-Lösung, mittels Einflusskoeffizienten

Folgende drei Kopplungsgraden zwischen normalen und tangentialen Problemen können unterschieden werden [Full11]:

$$\text{Kopplungsgrad 2 (voll gekoppelt)} : C_{ij} \neq 0; \forall (i,j) = x,y,z \quad (3.56)$$

$$\text{Kopplungsgrad 1 (partial gekoppelt)} : C_{xz} = C_{zx} = 0; C_{yz} = C_{zy} = 0; \quad (3.57)$$

$$\text{Kopplungsgrad 0 (entkoppelt)} : C_{xz} = C_{zx} = 0; C_{yz} = C_{zy} = 0; C_{xy} = C_{yx} = 0; \quad (3.58)$$

Diese Kopplungsgrade ergeben sich beispielsweise aus der Ähnlichkeit der elastischen Materialparameter der Kontaktkörper. Um dies zu veranschaulichen, werden beispielsweise

in (3.59, 3.60, 3.61) die Einflusskoeffizienten der Normalkraft  $F_z$  aus [Full11] angegeben:

$$C_{xz} = -\left(\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{2\pi E_1}\right) + \left(\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{2\pi E_2}\right) \left(2x \tan^{-1}\left(\frac{r-y}{x}\right) - y \ln(r)\right) \quad (3.59)$$

$$C_{yz} = -\left(\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{2\pi E_1}\right) + \left(\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{2\pi E_2}\right) \left(2y \tan^{-1}\left(\frac{r-x}{y}\right) - x \ln(r)\right) \quad (3.60)$$

$$C_{zz} = -\left(\frac{(1-\nu_1^2)}{2\pi E_1}\right) - \left(\frac{(1-\nu_2^2)}{2\pi E_2}\right) \left(y \ln(r-x) + x \ln(r-y)\right) \quad (3.61)$$

Es kann festgestellt werden, dass für die Grenzfälle mit unterschiedlichen  $E_1 \neq E_2; \nu_1 \neq \nu_2$  und identischen ( $E_1 = E_2; \nu_1 = \nu_2$ ) Materialparametern sich jeweils der Kopplungsgrad 2 und 1 ergibt. Im implementierten Modell wird von einem Kopplungsgrad 2 ausgegangen.

### 3.4 DC-FFT Methode in der Kontaktsimulation

In diesem Abschnitt soll die Implementierung der DC-FFT Methode zur Lösung der diskreten Faltung / discret convolution (DC) im Kontaktmodell erläutert werden. Als Erstes wird kurz auf die Grundlage der Faltungstheorie und FOURIER Transformation eingegangen. Hier werden nur relevante Aspekte präsentiert, für detaillierte Erklärungen wird auf die zum Thema FOURIER Transformation umfangreiche Literatur [Bovi09] hingewiesen.

#### 3.4.1 Kontinuierliches Faltungstheorem und die Fourier-Transformation

Gegeben seien zwei kontinuierliche Funktionen  $f(x, y), h(x, y)$  im 2D Raum  $(x, y)$ . Die lineare Faltung  $g(x, y)$  dieser beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) * h(x, y) \\ &= h(x, y) * f(x, y) \\ &= h(x, y) * f(x, y) \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x - \tau, y - \eta) h(\tau, \eta) d\tau d\eta \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} f(x - \tau, y - \eta) h(\tau, \eta) \end{aligned} \quad (3.62)$$

drückt das Ergebnis des Durchlaufs jedes Wertes von  $f(x, y)$  durch die Funktion  $h(x, y)$  aus. Es resultiert an jeder Stelle  $g(x, y)$ , ein durch die Funktion  $h(x, y)$  gebildeter gewichteter

Mittelwert der umgebenden Funktionswerte von  $f(x, y)$ . Die kontinuierliche FOURIER-Transformation der beiden Funktionen wird wie folgt:

$$\tilde{F}(\omega_x, \omega_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(\omega_x x + \omega_y y)} \quad (3.63)$$

$$\tilde{H}(\omega_x, \omega_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-j2\pi(\omega_x x + \omega_y y)} \quad (3.64)$$

definiert mit  $\omega_x, \omega_y$  als die zu der jeweiligen Raumrichtung  $x, y$  zugehörigen Frequenzen. Das kontinuierliche Faltungstheorem (3.65) besagt, dass die Anwendung der FT auf beiden Seiten der Gleichung (3.62) diese letztere lineare Faltungsoperation im Raumbereich in eine einfache Multiplikation im Frequenzbereich überführt.

$$\tilde{G}(\omega_x, \omega_y) = \tilde{F}(\omega_x, \omega_y) \tilde{H}(\omega_x, \omega_y) \quad (3.65)$$

Diese wichtige Eigenschaft erlaubt es, aufwändige Faltungsoperationen im Raumbereich einfacher (durch elementweise Multiplikation) im Frequenzbereich zu lösen.

### 3.4.2 Diskretes Faltungstheorem und Fourier-Transformation

Bis jetzt wurden die Funktionen  $f, h$  als kontinuierlich angenommen. Jetzt soll die Betrachtung auf den praktischen Fall von diskreten Problemen beschränkt werden. Hier lassen sich die Funktionen  $f, h$  als Matrizen mit der endlichen Dimension Länge  $N_x \times N_y$  mit  $[f^*(x, y), h^*(x, y), 0 \leq x \leq N_x - 1, 0 \leq y \leq N_y - 1]$  ausdrücken. Ein solches diskretes Problem stellt beispielsweise das diskretisierte Kontaktproblem mit der Pressung und Einflusskoeffizientenmatrix jeweils als  $f^*$  und  $h^*$  dar. Die diskrete FOURIER-Transformation (DFT) dieser zwei Matrizen ergibt einen ähnlichen Ausdruck wie (3.63, 3.64):

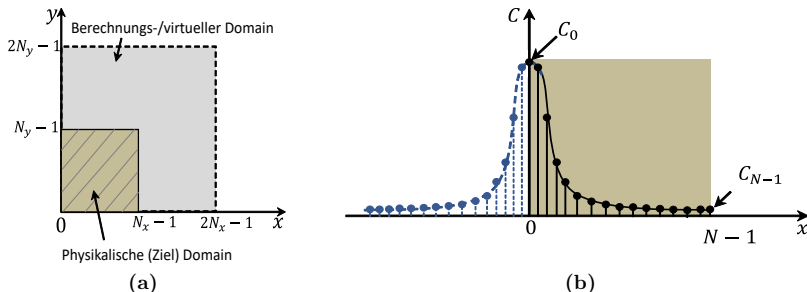
$$\tilde{F}^*(\omega_x, \omega_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f^*(x, y) e^{-j2\pi(\omega_x x + \omega_y y)} \quad (3.66)$$

$$\tilde{H}^*(\omega_x, \omega_y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} h^*(x, y) e^{-j2\pi(\omega_x x + \omega_y y)} \quad (3.67)$$

Die DFT einer Matrix lässt sich mit dem FFT-Algorithmus sehr effizient berechnen. Für diskrete Probleme gilt das bereits erwähnte kontinuierliche Faltungstheorem nicht, d.h. das Produkt von zwei diskret FOURIER-transformierten (mittels DFT) Funktionen  $\tilde{F}^*, \tilde{H}^*$  invers FOURIER transformiert (mittels IDFT) führt nicht zum gleichen Ergebnis wie die lineare Faltung der beiden diskreten Funktionen  $f^*, h^*$  [Bovi09]. Für solche diskreten Fälle wird eine andere Form der Faltung, die zyklische/zirkulare Faltung, definiert.

Jetzt sollen die bereits erwähnten zwei Faltungsarten (kontinuierlich und diskret) und ihre Zusammenhänge zu der FT zusammengefasst werden. Es sollte nun deutlich hervorgehoben werden, dass das Kontinuierliche Faltungstheorem (3.65) von der FOURIER

Transformation (3.63, 3.64) bzw. ihre Inverse (IFT) begleitet wird, um die lineare Faltung (3.62) auszuwerten, während das diskrete Faltungstheorem von der diskreten Fourier-Transformation (DFT) bzw. ihre Inverse (IDFT) abhängt und wird durch die zyklische Faltung berechnet.



**Abb. 3.13:** a) Definition des virtuellen Berechnungsbereichs durch Verdoppelung des Zieldomains. b) Berechnung der Einflusskoeffizientenmatrix in der physikalischen Domain.

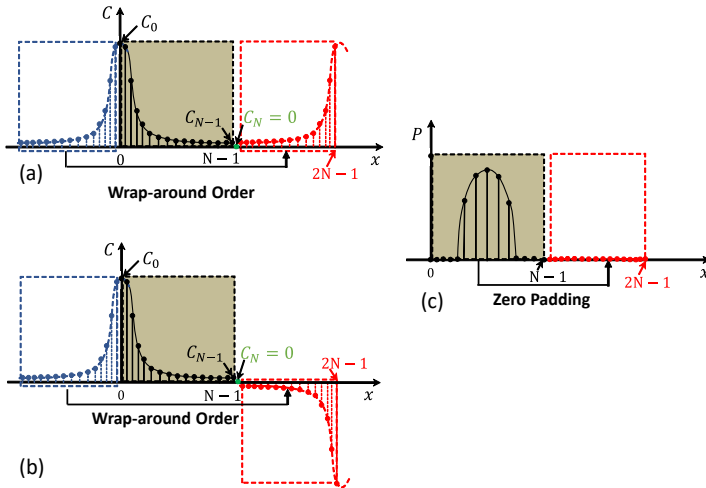
Die Methode der Zero-Padding und Wrap-around, die im Folgenden beschrieben wird, soll die lineare Faltung (bei der Modellierung) korrekt in die zyklische Faltung (nach der Diskretisierung) überführen. Dabei wird die zuvor diagonale Einflusskoeffizientenmatrix  $C$  durch den Wrap-around Vorgang zu einer zyklischen Matrix transformiert. Der Lösungsprozess erfordert eine virtuelle Domäne (Berechnungsgebiet) die durch eine Verdoppelung der Zieldomäne (physikalische Domain) wie in Abbildung 3.13a gezeigt gewonnen wird. Der allgemeine Ablauf der DC-FFT Methode umfasst folgende Schritte [LWL00]:

1. Berechnung der Einflusskoeffizienten-Matrix  $[C]_{N_x \times N_y}$  mittels (2.37) für  $0 \leq x \leq N_x - 1$  und  $0 \leq y \leq N_y - 1$  (Siehe Abbildung 3.13b)).
2. Erweiterung der Einflusskoeffizienten-Matrix aus dem 1. Schritt (Siehe Abbildung 3.14 (a)).  $[C]_{N_x \times N_y}$  zur  $[C]_{2N_x \times 2N_y}$  in die virtuelle Domäne mittels der Zero-padding und Wrap-around order. Die Zero-padding bei der Einflusskoeffizient Matrix betrifft nur die Werte bei  $N_x$  (d.h.  $C_{N_x} = 0$ ). Die Koeffizienten von  $N_x+1$  bis  $2N_x-1$  ergeben sich aus den Koeffizienten  $0$  bis  $N_x-1$ , sind aber in umgekehrter Richtung angeordnet, wobei für letzteren eventuell ein negatives Vorzeichen (siehe Abbildung 3.14 (b)) entsprechend der Parität (gerade oder ungerade) der Einflusskoeffizienten Funktion [Jerb16] vorgesehen wird. Die Parität einer eindimensionalen Funktion  $f(x)$  (mit

dem Argument  $x$ ) wird durch folgende Bedingung überprüft:

$$f(-x) = f(x) \quad (3.68)$$

Dadurch, dass die Einflusskoeffizienten mehrdimensionale Funktionen sind, muss diese Bedingung (3.68) in allen Richtungen geprüft werden. Zur Erläuterung werden im Folgenden die Einflussfunktionen der Oberflächenverformungen durch eine Normalkraft verwendet, die in den Gleichungen (3.59-3.61) angegeben sind. Für die Einflussfunktion  $C_{zz}$  liegt keine Parität in der  $x$ - und  $y$ -Richtung vor (d.h.  $C_{zz}(-x, y) \neq C_{zz}(x, y)$ ; und  $C_{zz}(x, -y) \neq C_{zz}(x, y)$ ). Für die Einflusskoeffizienten  $C_{xz}$ ,  $C_{yz}$  gilt jeweils  $C_{xz}(-x, y) = C_{xz}(x, y)$  (d.h. gerade in  $x$ -Richtung) und  $C_{yz}(x, -y) = C_{yz}(x, y)$  (d.h. gerade in  $y$ -Richtung).



**Abb. 3.14:** Erweiterung der Einflusskoeffizientenmatrix mittels Zero-Paading (nur im Punkt  $(N_x, N_y)$ ) und Wrap-around Order (a) für gerade Einflussfunktionen (b) für ungerade Einflussfunktionen; (c) Erweiterung der Pressungsmatrix mit der Zero-Paading

3. Erweiterung der Pressungsmatrix  $[P]_{N_x \times N_y}$  zur  $[P]_{2N_x \times 2N_y}$  mittels Zero-Paading (Siehe Abbildung 3.14 (c)). Hier werden die Pressungswerte von  $N_x$  bis  $2N_x - 1$  zu Null gesetzt.
4. Anwendung der 2D FFT auf die zwei resultierenden Matrizen  $[\tilde{P}]_{N_x \times N_y}$  und  $[\tilde{C}]_{N_x \times N_y}$
5. Elementweise Multiplikation der Fourier-transformierten Matrizen  $\tilde{P} * \tilde{C}$
6. Anwendung der 2D IFFT auf das Ergebnis in Schritt 5.

7. Auswertung des Ergebnisses von Schritt 6 auf der physikalischen Domain  $[0 \dots N_x - 1, 0 \dots N_y - 1]$



## 4 Aufbau und Implementierung eines 3D Halbraummodells mit Plastifizierung

In diesem Kapitel wird auf das implementierte dreidimensionale plastische Halbraum-Kontaktmodell näher eingegangen.

Die ersten plastischen Halbraummodelle gehen auf die analytische Arbeit von HENCKY [Henc23] zurück. Hier konnte gezeigt werden, dass die lokale Flächenpressung bei rauen Oberflächen einen kritischen Wert nicht übersteigen kann. Dieses Ergebnis wurde durch die experimentelle Arbeit von BOWNDEN und TABOR [BoTa01] bestätigt und folgende Beziehung zwischen der kritischen Flächenpressung  $P_{krit}$  und der Fließspannung  $\sigma_F$  im Material bestimmt:

$$P_{krit} = 2,8 \sigma_F \quad (4.1)$$

Basierend auf der Gleichung (4.1) konnten vereinfachte plastische 2D Halbraummodelle entwickelt werden, bei denen die Kontaktpressung an der Oberfläche durch eine kritische Flächenpressung limitiert wird. Es bleibt jedoch mit diesen Modellen unmöglich, das Spannungs- und Dehnungsfeld im Material zu bestimmen. Ein weiteres häufig implementiertes 3D plastisches Halbraummodell wurde von JACQ [Jacq01] et al. [JNLG02] vorgeschlagen. Dieses Modell unterscheidet sich vom bereits erläuterten vereinfachten 2D Modell durch eine Volumendiskretisierung und somit durch die Möglichkeit Spannungs- und Dehnungsgrößen unterhalb der Oberfläche zu bestimmen. Dieses 3D Modell, wie in Abbildung 4.1 schematisiert, wurde in dieser Arbeit implementiert und wird im Weiteren vorgestellt.

Aufgrund der Nichtlinearität der plastischen Deformationen wurde von JACQ ein inkrementeller Ansatz (d.h. für kleine Belastungs- und Verformungsänderungen) gewählt. Dabei wird die Gesamtlast  $F$  in kleine Lastinkrementen  $dF$ , welche sukzessiv aufgebracht sind, geteilt. Zu Beginn der Kontaktsimulation wird ein Initialzustand charakterisiert, der durch die Last  $F$ , die Kontaktpressung  $p$ , die aktuelle Geometrie der Kontaktpartner  $h_i$ , die Startspannung  $\sigma_i$ , den Verfestigungszustand sowie die vorhandenen plastischen Dehnungen  $\varepsilon^p$ , definiert ist. Die Oberflächengeometrie der Kontaktpartner wird als Superposition einer undeformierten  $h_i^*$  und einer durch plastische Dehnungen verursachten Oberflächenverschiebung  $u_r$  beschrieben:

$$h_i = h_i^* + u_r \quad (4.2)$$

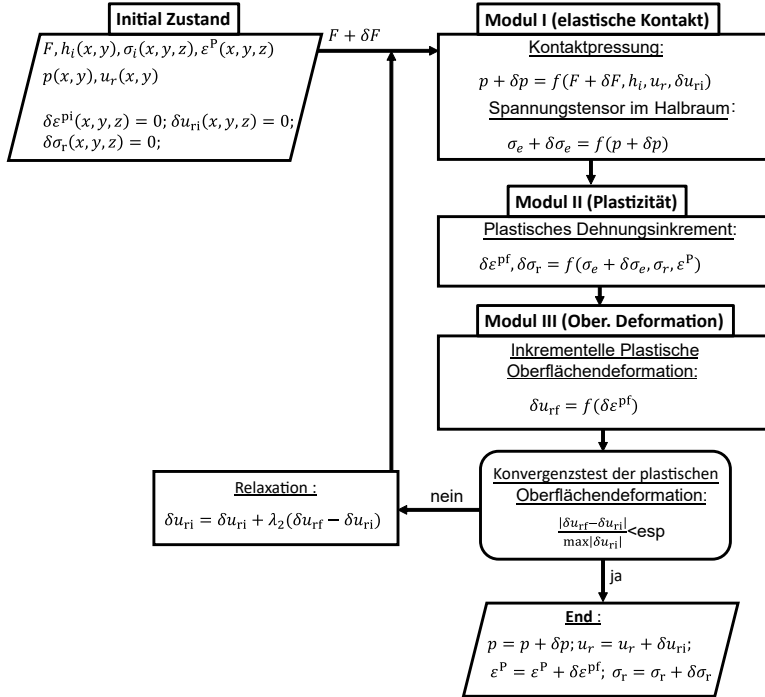


Abb. 4.1: Berechnungsablauf des plastischen Halbraummodells nach JACO

Die Startspannung  $\sigma_i$  beschreibt die elasto-plastische Gesamtspannung und setzt sich aus einem elastischen  $\sigma_e$  und plastischen  $\sigma_r$  Anteil wie folgt zusammen:

$$\sigma_i = \sigma_e + \sigma_r \quad (4.3)$$

In jeder Iteration soll für die folgende inkrementelle Lastaufbringung:

$$F = F + \delta F \quad (4.4)$$

die Veränderung der Kontaktpressung  $\delta p$ , der plastischen Oberflächendeformation  $\delta u_r$ , der plastischen Dehnung  $\delta \epsilon^P$  und Spannung  $\delta \sigma_r$  im Kontaktkörper bestimmt werden. Diese Unbekannten werden während der Iteration, durch verschiedene Routinen in drei Module zusammengefasst, bestimmt. Als erstes wird im Modul I die neue Kontaktpressung und die daraus resultierenden elastischen Spannungen im Halbraum bestimmt. Weiterhin werden diese Spannungen im Modul II zur iterativen Bestimmung der plastischen Dehnungsinkremente (siehe Abschnitt 4.1) verwendet. Diese verursachen an der Halbraumoberfläche plastische Deformationen (siehe Abschnitt 4.3), mit der die Halbraumoberfläche vor der

nächsten Iteration aktualisiert wird. Die Bestimmung der aus den plastischen Dehnungsincrementen hervorgerufenen inkrementellen plastischen Oberflächendeformation geschieht im Modul III. Die bereits kurzgefassten Hauptmodule des JACQ-Kontaktalgorithmus werden im Folgenden ausführlicher erläutert.

- **Modul I.**

In diesem Modul wird eine elastische Kontaktsimulation durchgeführt und die neue Flächenpressung ( $p + \delta p$ ) bestimmt. Diese Lösung wird von folgenden Größen bestimmt:

- $F + \delta F$ : Aktuelle Last.
- $h_i = h_i^* + u_r$ : Die vorherige Geometrie, mit  $h_i^*$  als die neue undeformierte Geometrie und  $u_r$  als die bei der vorherigen Last  $F$  resultierende gesamte plastische Oberflächendeformation.
- $\delta u_{ri}$ : Die gesuchte inkrementelle plastische Oberflächendeformation

Mittels Einflusskoeffizienten [Full11] (siehe Abschnitt 2.2.2) werden aus der bestimmten Flächenpressung elastische Spannungen im Halbraum berechnet. Diese elastisch berechneten Spannungen dienen im weiteren als Testspannungen bei der Bestimmung der plastischen Dehnungsincremente  $\delta \varepsilon^p$  im Halbraum (Modul II).

- **Modul II.**

Im zweiten Modul werden die plastischen Dehnungsincremente  $\delta \varepsilon^p$  im Halbraum bestimmt. Dafür wird das DRUCKER-PRAGER- Plastizitätsmodell [GHW18] eingesetzt. Im ersten von JACQ entwickelten Algorithmus [Jacq01; JNLG02] wird eine Konvergenz der plastischen Dehnungsincremente im Zusammenhang mit der inkrementellen plastischen Eigenspannung  $\delta \sigma_r$  gefordert. Dazu wurde der in Abbildung 4.2 schematisierte Ablauf vorgeschlagen. In Abbildung 4.2 werden zur Klarheit in einer Iteration die Anfangs- und Endzustände jeweils mit den Indizes i und f gekennzeichnet. Im Anfangszustand beschreibt die Größe  $\delta \varepsilon^{pi}$  die plastischen Dehnungsincremente im Halbraum vor der Berücksichtigung der von ihnen verursachten inkrementellen Eigenspannungen  $\delta \sigma_r$ . Zur Bestimmung dieser Eigenspannung im Halbraum wird das im Abschnitt 4.2.1 beschriebene Superpositionsprinzip verwendet. Bei der Bestimmung der plastischen Dehnungsincremente im Endzustand  $\delta \varepsilon^{pf}$  wird als Testspannung die Summe aus der in elastischer Kontaktsimulation bestimmten Spannung  $\sigma_e$  mit der gerade aus plastischen Dehnungsincrementen bestimmten Eigenspannung  $\delta \sigma_r$  verwendet. Die Enden plastischer Dehnungsincremente  $\delta \varepsilon^{pf}$  werden solange iteriert bis ein durch den maximalen relativen Fehler definiertes Konvergenzkriterium

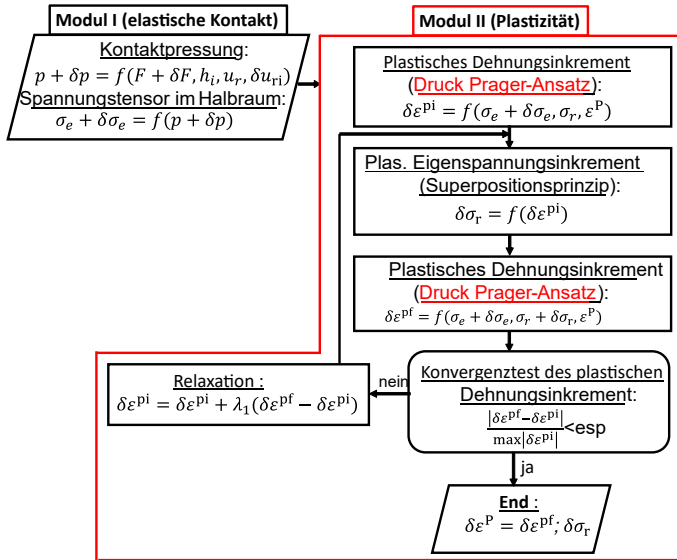


Abb. 4.2: Lösungsschema zur iterativen Bestimmung der plastischen Dehnungsinkrementen

erreicht ist. Dabei werden, um eine gute Konvergenz zu erreichen, in jeder Iteration die plastischen Dehnungsinkremente relaxiert.

- **Modul III.**

Im dritten Modul werden die im Modul II iterativ berechneten plastischen Dehnungsinkremente dazu verwendet, die inkrementellen plastischen Oberflächendeformation  $\delta u_{r,f}$  zu bestimmen. In der Tat führen die im Halbraum existierenden plastischen Volumenelemente zur plastischen Deformation der Halbraumoberfläche. Diese wird wie im Abschnitt 4.3.1 beschrieben mittels Einflusskoeffizienten bestimmt. Ähnlich wie bei den plastischen Dehnungsinkrementen wird bei jeder Iteration eine Oberflächen Relaxation (mit  $\lambda_2$  als Relaxationsfaktor) durchgeführt. Hier beschreiben  $\delta u_{ri}$  und  $\delta u_{r,f}$  die plastische Oberflächendeformation jeweils vor (d.h. vor der Bestimmung des plastischen Dehnungsinkrements) und nach (d.h. nach der Bestimmung des plastischen Dehnungsinkrements) der Iteration. Die Konvergenz der Oberflächendeformation ist gleichbedeutend mit dem Ende der Kontaktsimulation für das aktuelle Lastinkrement.

Die Bestimmung im Modul II der Eigenspannungen stellt den größten Rechenaufwand des gesamten plastischen Halbraummodells dar. Mit zunehmender Iterationsanzahl bis

zur Konvergenz des plastischen Dehnungsinkrements kann sich aufgrund der bei jeder Iteration mit zu bestimmenden Eigenspannungen eine große Gesamtrechenzeit ergeben. Zwei Ansätze wurden in [Haue14] und [NBB06] entwickelt, um die Rechenzeit beim Jacq-Algorithmus zu verbessern. Diese Ansätze werden im Folgenden kurz beschrieben. In [Haue14] wird vor jeder Iteration eine elastische Kontaktsimulation mit der aufgrund des bereits bestimmten plastischen Dehnungsinkrements verursachten plastischen Oberflächendeformation durchgeführt. Das Ziel dieser Berechnungen soll zur Homogenisierung des plastischen Dehnungsfeldes im Halbraum dienen und somit das Konvergenzverhalten verbessern. Die aus der plastischen Dehnungsinkrements resultierende plastische Oberflächendeformation sorgt während der Kontaktsimulation zu einer besseren Verteilung der Kontaktpressung, welche sich auf die Spannungen im Halbraum weiter auswirkt.

In der Arbeit [NBB06], wird ein effizienter Algorithmus zur Bestimmung der plastischen Dehnungsinkremente im Halbraum vorgestellt. Mit dem hier vorgeschlagenen Ansatz entfallen die sonst bei der iterativen Bestimmung der plastischen Dehnungsinkremente mitberechneten Eigenspannungen. Das wesentliche Konvergenzkriterium der plastischen Dehnungsinkremente ist das Zurückführen aller Spannungen im Halbraum auf der Fließfläche. Dieses Kriterium wird verwendet und die plastischen Dehnungsinkremente werden mit dem FE-Ansatz aus Abschnit 4.1 iterativ so lange bestimmt, bis die Spannungen in allen plastischen deformierten Volumelementen auf der Fließfläche liegen. Aus der nicht Berücksichtigung der plastischen Eigenspannungen bei diesem Ansatz ergibt sich eine große Rechenzeitverkürzung. Dieser zweite Ansatz wurde in dieser Arbeit verfolgt. In den zwei weiteren Teilabschnitten 4.1 und 4.2 werden jeweils die Bestimmung der plastischen Dehnungen und Eigenspannungen (im Modul II) im Halbraum behandelt. Die Berechnung der daraus resultierenden plastischen Oberflächenveränderung wird im Abschnitt 4.3.3 anhand eines Beispiels verdeutlicht.

## 4.1 Bestimmung der plastischen Dehnungen

In diesem Abschnitt soll auf die Modellierung des plastischen Materialverhaltens für den Einsatz im Halbraum Kontaktmodell eingegangen werden. Im praktischen Sinn geht es hier um die Bestimmung des plastischen Dehnungsinkrements  $\delta\varepsilon^{pl}$ . Dafür wurde in [NBB06], basierend auf der in der FE häufig eingesetzten Prädiktor-Korrektor Methode, ein robuster für beliebige Verfestigungskurven verwendbarer Algorithmus für Halbraum Kontaktprobleme entwickelt. Der Verständlichkeit halber werden zuerst die wichtigsten Grundlagen der kontinuumsmechanischen Beschreibung des plastischen Materialverhaltens [SiHu00; Wrig01] wiederholt.

Um ein vollständiges plastisches Materialgesetz zu formulieren, werden folgende Teile

benötigt:

- Die Fließfunktion / Fließbedingung
- Die Fließregel
- Das Verfestigungsgesetz
- Die Konsistenzbedingung

Die eben aufgezählten Bausteine der plastischen Materialmodellierung werden im Weiteren erläutert.

### Fließfunktion:

Die allgemeine Fließfunktion kann im Spannungsraum wie folgt angesetzt werden:

$$F_f = F_f(\sigma, \gamma, \hat{\gamma}) \quad (4.5)$$

Mit  $\sigma$ ,  $\gamma$ ,  $\hat{\gamma}$  jeweils als der effektiven Spannung, der inneren isotropen Verfestigungsvariable und der innere kinematische Verfestigungsvariable.

Die Werte der Fließfunktion sollen mit Hilfe einer Fließbedingung ( 4.6 - 4.8) eine Entscheidung ermöglichen, ob im Werkstoff unter einem bestimmten Spannungszustand reine elastische oder auch plastische Verzerrungen entstehen.

$$F_f(\sigma, \gamma, \hat{\gamma}) < 0 \rightarrow \quad \text{elastisches Verhalten} \quad (4.6)$$

$$F_f(\sigma, \gamma, \hat{\gamma}) = 0 \rightarrow \quad \text{plastisches Verhalten} \quad (4.7)$$

$$F_f(\sigma, \gamma, \hat{\gamma}) > 0 \rightarrow \quad \text{unzulässiger Fall} \quad (4.8)$$

Die Fließfunktion lässt sich häufig vereinfacht in einen reinen rechnerischen Spannungsanteil, der die effektive Spannung in Form einer Vergleichsspannung  $f(\sigma)$  darstellt, und einen experimentellen Spannungsanteil aus dem sogenannten Verfestigungsgesetz  $\kappa(\gamma, \hat{\gamma})$ , wie folgt aufspalten:

$$F_f(\sigma; \gamma, \hat{\gamma}) = f(\sigma) - \kappa(\gamma, \hat{\gamma}) \quad (4.9)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Betrachtung nur auf die isotrope von Mises-Plastizität eingeschränkt. Im isotropen Fall hängt das Verfestigungsgesetz  $\kappa(\gamma)$  von einer einzigen Variablen  $\gamma$ , die die effektive plastische Dehnung beschreibt, ab. In der Mises-Plastizität wird als Vergleichsspannung  $f(\sigma)$  die von Mises-Spannung  $\sigma_v$  verwendet. Somit lautet die im weiterem betrachtete isotrope von Mises-Fließfunktion wie folgt:

$$F_f(s, \gamma) = \sigma_v(s) - \kappa(\gamma) \quad (4.10)$$

Mit  $s$ ,  $\sigma_v(s)$ ,  $\kappa(\gamma)$  jeweils als dem deviatorischen Anteil des Spannungstensors, der von Mises-Vergleichsspannung und der isotropen Verfestigungsfunktion

### Fließregel:

Die Fließregel stellt eine mathematische Formulierung der zeitlichen Evolution der plastischen Dehnung dar. Nach der Arbeit von DRUCKER [GHW18] wird sie im Allgemeinen aus der Fließfunktion (4.10) wie folgt ausgedrückt:

$$d\varepsilon^{pl} = \varepsilon^{pl} = \dot{\gamma} \frac{\partial F_f(s, \gamma)}{\partial s} \quad (4.11)$$

Wobei der erste Term  $\dot{\gamma}$  die effektive plastische Dehnungsrate und der zweite  $\frac{\partial F_f(s, \gamma)}{\partial s}$  die Fließrichtung beschreibt. Die Fließregel (4.11) und das Verfestigungsgesetz (4.10) hängen beide von der noch unbekanntenen effektiven plastischen Dehnung  $\gamma$  ab. Dies wird aus der Konsistenzbedingung bestimmt. Die Konsistenzbedingung selbst wird aus den folgenden KARUSH-KUHN-TUCKER -(KKT) Bedingungen

$$\text{KKT 1:} \quad F_f(s, \gamma) \leq 0 \quad (4.12)$$

$$\text{KKT 2:} \quad \gamma \geq 0 \quad (4.13)$$

$$\text{KKT 3:} \quad F_f(s, \gamma) \cdot \gamma \quad (4.14)$$

abgeleitet. Die erste KKT-Bedingung gibt die Fließbedingung wieder. Damit wird keine Überschreitung der Vergleichsspannungen von der Fließgrenze erlaubt. Die zweite fordert, dass die effektive plastische Dehnung  $\gamma$  strikt positive oder null Werte annehmen darf. Die dritte KKT Bedingung wird auch Komplementaritätsbedingung genannt und fasst die zwei ersten wie folgt zusammen:

$$F_f(s, \gamma) < 0 \rightarrow \gamma = 0; \quad \text{elastischer Zustand} \quad (4.15)$$

$$F_f(s, \gamma) = 0 \rightarrow \gamma > 0; \quad \text{plastischer Zustand} \quad (4.16)$$

### Verfestigungsgesetz:

Das Verfestigungsgesetz beschreibt den Einfluss der Werkstoffverfestigungen auf die Fließbedingung. Das experimentell ermittelte Werkstoffverfestigungsverhalten wird je nach Exaktheitsgrad mit einfachen linearen bis komplexen nichtlinearen Verfestigungsfunktionen  $\kappa(\gamma)$  approximiert. In der vorliegenden Arbeit wird zur Beschreibung der Werkstoffverfestigung der Swift-Ansatz verwendet.

$$\kappa(\gamma) = B_{sw}(C_{sw} + \gamma)^{n_{sw}} \quad (4.17)$$

Mit  $B_{sw}$ ,  $C_{sw}$  und  $n_{sw}$  jeweils als dem Verfestigungskoeffizient, der Dehngrenze (wird bei Werkstoffen mit nicht ausgeprägte Streckgrenze als Ersatzstreckgrenze definiert) und dem Verfestigungsexponent.

**Konsistenzbedingung:**

Die Ableitung der dritten KKT-Bedingung mittels der Produktregel ergibt:

$$\dot{\gamma}F_f + \gamma\dot{F}_f = 0 \quad (4.18)$$

und im plastischen Fall ( $F = 0; \gamma > 0$ ) ergibt sich die folgende Konsistenzbedingung:

$$\dot{\gamma}\dot{F}_f = 0 \rightarrow \dot{F}_f = 0 \quad (4.19)$$

Der Wert von  $\gamma$  wird aus (4.19) durch das Bilden des folgenden totalen Differentials der Fließbedingung:

$$\dot{F}_f(s, \gamma) = \frac{\partial F_f(s, \gamma)}{\partial s} : \dot{s} + \frac{\partial F_f(s, \gamma)}{\partial \gamma} \dot{\gamma} = 0 \quad (4.20)$$

bestimmt. Im Weiterem wird der Operator  $(:)$  in (4.20) für das FROBENIUS-Skalarprodukt (siehe (4.28)) verwendet.

Im Folgenden sollen im Detail die differentialen Ausdrücke in (4.20) angeschaut werden. Dafür werden zuerst einige Grundlagen zum Spannung- und Dehnungstensor und insbesondere zum deviatorischen Anteil, der hauptsächlich für die Gestaltänderung und somit die plastischen Verformungen verantwortlich ist, wiederholt. Spannungs- und Verzerrungstensoren  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  werden für praktische Anwendungen häufig in hydrostatische (für die reine Volumenänderung verantwortlich) und deviatorische (unter Bedingung der Volumenerhaltung, verantwortliche für die Gestaltänderung) Anteile aufgespalten. Wobei die deviatorischen Anteile  $s_{ij}, e_{ij}$  wie folgt:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{\delta_{ij}} \sigma_{kk} \quad (4.21)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{\delta_{ij}} \varepsilon_{kk} \quad (4.22)$$

ausgedrückt werden.

Unter der Voraussetzung kleiner Verzerrungen ist eine Zusammensetzung der Gesamtverzerrungen aus elastischen und plastischen Anteilen:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl} \quad (4.23)$$

zulässig. Der deviatorische Anteil des Spannungstensors lässt sich mit dem deviatorischen Verzerrungstensors  $e, e^{pl}$  als:

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - e_{ij}^{pl}) \quad (4.24)$$

darstellen. Bei der Mises Plastizität oder  $J_2$ -Plastizität, wie es in dieser Arbeit der Fall ist, hängt die von Mises Vergleichsspannung  $\sigma_v$  in der Fließfunktion (4.10) allein vom zweiten Invariant  $J_2$  des deviatorischen Spannungstensors  $s_{ij}$  wie folgt:

$$\sigma_v = \sqrt{3J_2} \quad (4.25)$$



ab. Für eine gegebene deviatorische Spannungsmatrix  $s_{ij}$  wird der zweite Invariant  $J_2$  wie folgt:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} : s_{ij} \quad (4.26)$$

bestimmt. Es ergibt sich für die von Mises Vergleichsspannung:

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}} \quad (4.27)$$

Oder mit:

$$\|s_{ij}\| = \sqrt{s_{ij} : s_{ij}} = \sqrt{s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + (s_{23}^2 + s_{32}^2) + (s_{13}^2 + s_{31}^2) + (s_{12}^2 + s_{21}^2)} \quad (4.28)$$

als die Frobenius-Norm des deviatorischen Spannungstensors.

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2}} \|s_{ij}\| \quad (4.29)$$

Mit (4.28) bekommt die Fließbedingung (4.10) bei der Mises Plastizität folgende Gestalt:

$$F_f(s, \gamma) = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}} - \kappa(\gamma) \quad (4.30)$$

Die Fließrichtung in (4.11) kann durch den deviatorischen Spannungstensor wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_f(s, \gamma)}{\partial s} &= \frac{\partial \left( \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}} \right)}{\partial s_{kl}} \frac{\partial \left( \sqrt{\frac{3}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + (s_{23}^2 + s_{32}^2) + (s_{13}^2 + s_{31}^2) + (s_{12}^2 + s_{21}^2))} \right)}{\partial s_{kl}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_{11}} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_{12}} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_{13}} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_{21}} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_{22}} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_{23}} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_{31}} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_{32}} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial s_{33}} \end{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + (s_{23}^2 + s_{32}^2) + (s_{13}^2 + s_{31}^2) + (s_{12}^2 + s_{21}^2))} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\frac{3}{2} s_{11}}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} & \frac{\frac{3}{2} s_{12}}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} & \frac{\frac{3}{2} s_{13}}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} \\ \frac{\frac{3}{2} s_{21}}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} & \frac{\frac{3}{2} s_{22}}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} & \frac{\frac{3}{2} s_{23}}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} \\ \frac{\frac{3}{2} s_{31}}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} & \frac{\frac{3}{2} s_{32}}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} & \frac{\frac{3}{2} s_{33}}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} \end{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} : s_{ij}}} \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} \\ &= \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_v} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Fließrichtung wird wie in (4.31) durch den normierten Spannungsdeviator angegeben und wird im weiterem wie folgt neu bezeichnet:

$$\tilde{s} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_v} \quad (4.32)$$

Es gilt:

$$\tilde{s} : \tilde{s} = \frac{3}{2} \quad (4.33)$$

und folgt aus (4.32) und (4.33):

$$\sigma_v = s : \tilde{s} \quad (4.34)$$

bzw. in Raten dargestellt:

$$\dot{\sigma}_v = \dot{s} : \tilde{s} \quad (4.35)$$

Die Beziehung (4.24) in (4.35) eingesetzt liefert:

$$\dot{\sigma}_v = 2G(\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^{pl}) \quad (4.36)$$

Mit (4.31) und (4.32) ergibt sich für die Fließregel (4.11):

$$\dot{e}^{pl} = \dot{\gamma} \tilde{s} \quad (4.37)$$

Für die plastische Vergleichsdehnungsrate folgt aus (4.33):

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{e}^{pl}}{\tilde{s}} = \sqrt{\frac{\dot{e}^{pl}}{\tilde{s}} : \frac{\dot{e}^{pl}}{\tilde{s}}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{e}^{pl} : \dot{e}^{pl}} \quad (4.38)$$

Analog zu (4.38) lässt sich aus dem deviatorischen Verzerrungstensors  $e$  die gesamte Vergleichsdehnungsrate  $\dot{\epsilon}_v$  wie folgt definieren:

$$\dot{\epsilon}_v = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{e} : \dot{e}} \quad (4.39)$$

Aus (4.39) folgt für den deviatorischen Verzerrungstensor:

$$\dot{e} = \dot{\epsilon}_v \eta \quad \text{mit:} \quad \eta : \eta = \frac{3}{2} \quad (4.40)$$

Die Ausdrücke (4.37) und (4.40) in (4.36) eingesetzt liefern:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_v &= 2G\dot{\epsilon}_v\eta : \tilde{s} - 2G\dot{\gamma}\tilde{s} : \tilde{s}; \quad \text{mit (4.33)} \\ &= 2G\dot{\epsilon}_v\eta : \tilde{s} - 3G\dot{\gamma}; \quad \text{wenn } \eta \text{ und } \tilde{s} \text{ kollinear sind gilt:} \\ &= 2G\dot{\epsilon}_v\frac{3}{2} : -3G\dot{\gamma} \\ &= 3G\dot{\epsilon}_v - 3G\dot{\gamma} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Aus (4.41) folgt die partielle Ableitung der Vergleichsspannung nach  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_v}{\partial \gamma} &= -3G \\ &\rightarrow \Delta \sigma_v = -3G \Delta \gamma \end{aligned} \quad (4.42)$$

Beruhend auf der gerade erläuterten Grundlage wurde in [NBB06] ein Algorithmus zur iterativen Bestimmung der plastischen Dehnungssinkremente vorgeschlagen. Der Berechnungsablauf besteht wie in Abbildung 4.3 schematisiert aus fünf Schritten, die im Folgenden beschrieben werden.

Im ersten Schritt, auch Prädiktorschritt genannt, wird eine rein elastische Testspannung bestimmt. Im Halbraum Kontaktmodell wird die aus der Normalkontakt simulierte Kontaktpressung verwendet, um mittels Einflussfunktionen die elastischen Spannungen im Körper zu ermitteln. Aus dem deviatorischen Spannungsanteil  $s^{(1)}$  wird eine Start-Vergleichsspannung  $\sigma_v^{(1)}$  nach (4.27) und die Fließrichtung  $\vec{s}^{(1)}$  nach (4.32) bestimmt. Der plastische Zustand aus dem vorherigen Schritt, beschrieben durch die effektive plastische Dehnung  $\gamma_a$  und die Verfestigungskurve,  $\kappa(\gamma_a)$  werden zur Initialisierung verwendet. Mit den Startwerten aus dem ersten Schritt wird als nächstes in zweiten Schritt die Fließfunktion nach (4.30) ausgewertet. Die Bestimmung des gesuchten plastischen Inkrements  $\Delta\gamma$  für den Korrektorschritt (Schritt 4) erfolgt über die Linearisierung der aktuellen Fließfunktion in dritten Schritt und die Verwendung des in (4.41) hergeleiteten plastischen Korrektor Inkrements. Im Korrektorschritt (Schritt 4) werden die neue Vergleichsspannung und effektive plastische Dehnung bestimmt. Anschließend wird mit den neuen berechneten Größen aus Schritt Vier in Schritt Fünf die Fließfunktion erneut ausgewertet. Falls die Fließbedingung (4.12) erfüllt wird, sind die neuen plastischen Größen bestimmt und das gesuchte plastische Dehnungssinkrement  $\Delta\varepsilon^{pl}$  kann aus dem in Schritt Drei bestimmten plastischen Inkrements  $\Delta\gamma$  mit Hilfe der Fließregel (4.37) abgeleitet werden, sonst beginnt eine neue Iteration mit dem dritten Schritt.

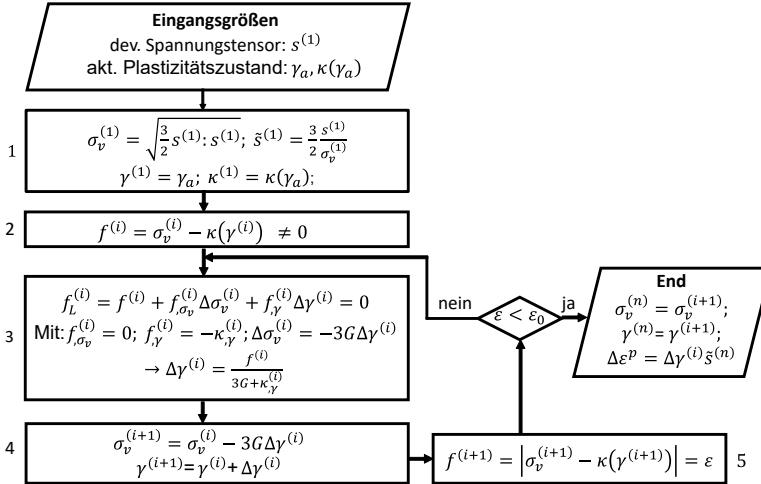
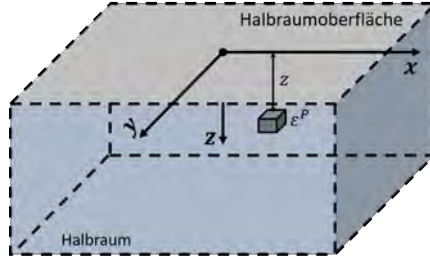


Abb. 4.3: Prädiktor-Korrektor-Lösungsschema zur Bestimmung des plastischen Inkrements

## 4.2 Eigenspannungsberechnung im Halbraummodell

Nach der Bestimmung der plastischen Dehnungen im Halbraum aus dem vorherigen Abschnitt soll in diesem Abschnitt die daraus im gesamten Kontinuumskörper resultierenden Eigenspannungen ermittelt werden. Zur Bestimmung der aus existierenden plastischen Eigendehnungen im Halbraum hervorgerufenen plastischen Eigenspannungen existieren zwei Methoden. Eine direkte Lösung durch die Verwendung von Galerkinvektoren wurde von LIU [LiWa05] vorgeschlagen. Dieser Ansatz wird aufgrund seiner hohen Komplexität selten implementiert. Ein weiterer häufiger (z.B. in [ZCKW09; Full11; WJZA13; KZLC14; ZJWY16]) verwendeter Ansatz wurde von CHIU [Chiu77; Chiu78] präsentiert. Hier wird die Lösung der plastischen Eigenspannungen im Halbraum durch eine Superposition einzelner Lösungen im Vollraum erzielt. Eine Lösung der Eigenspannung in einem Vollraum wird durch die Arbeit von ESHELBY ermöglicht. Die erste Arbeit von ESHELBY [Eshe57; Eshe59] befasst sich mit den Spannungsveränderungen in einem Vollraum aufgrund von Einschlüssen oder Inhomogenität. Die Grundleistung von ESHELBY und die Berücksichtigung der Einschlüsse im Kontaktmodell wird im Detail im Kapitel 5 präsentiert. Im Rahmen der Semi-analytischen Kontaktmodellierung werden häufig die Ergebnisse von ESHELBY zur Lösung der Plastizität verwendet. Hier werden die plastischen Volumenelemente im Halbraum als Einschlüsse betrachtet. Im Folgenden wird die Superpositionsmethode vorgestellt und anhand eines berechneten Beispiels deren Implementierung bei der vorliegenden Arbeit validiert.

Der Verständlichkeit halber wird zuerst auf die Randbedingungen bei der Bestimmung der Eigenspannungen eingegangen. Diese Randbedingungen müssen bei der Superpositionsmethode erfüllt werden. Unter Eigenspannungen lassen sich Spannungen im Material bei freier Oberflächenlast verstehen. Im Plastizitätsfall ergeben sich diese Eigenspannungen durch die plastischen Dehnungen im Material. In der Abbildung 4.4 wird ein Halbraum mit einem plastischen Volumenlement in der Tiefe  $z$  dargestellt. In diesem Volumenlement



**Abb. 4.4:** Halbraum mit plastisch gedehntem Volumenlement (Eigenspannungsproblem im Halbraum)

liegen folgende plastische Dehnungen vor:

$$\varepsilon_{kl}^P = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12}]^T \quad (4.43)$$

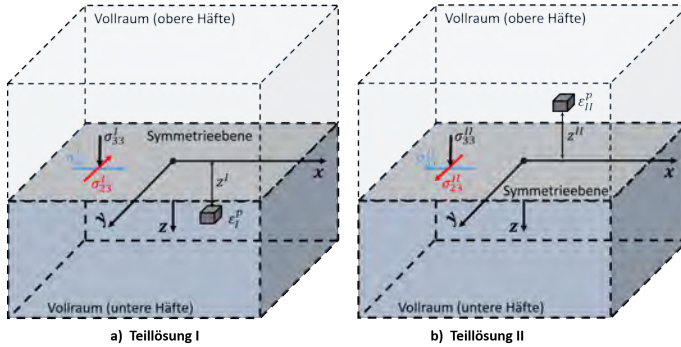
Gemäß der eben erwähnten Definition der Eigenspannung dürfen auf der Halbraumoberfläche keine Spannungen vorliegen. Diese Randbedingung wird durch folgende Gleichungen gegeben:

$$\sigma_{33} = 0; \sigma_{31} = 0; \sigma_{23} = 0; \quad (4.44)$$

In der Abbildung 4.4 fällt die Halbraumoberfläche mit dem Koordinatenursprung zusammen. Für dieses Eigenspannungsproblem existiert leider keine direkte Lösung. CHIU stellt eine Lösung durch die Superposition zweier auf Vollraum definierter Teillösungen mit einer auf dem Halbraum definierten Teillösung vor. In der weiteren Beschreibung werden diese Teillösungen und die damit zusammenhängenden Größen jeweils mit den Indices I, II und III bezeichnet. Der Vollraum besteht, wie in der Abbildung 4.5 dargestellt, aus zwei identischen Hälften, jeweils durch die positiv bzw. negative  $z$ -Koordinate und über eine Symmetrieebene ( $z = 0$ ) getrennt.

- **Teillösung I.**

In der Abbildung 4.5 links wird die erste Teillösung schematisiert. Hier befindet sich im Vollraum analog zum Halbraumproblem (siehe Abbildung 4.4) auf der Tiefe  $z$  ein



**Abb. 4.5:** Lösung des Eigenspannungsproblems im Halbraum, links) Teillösung I, rechts) Teillösung II

plastisches Volumenelement. Um Verwirrungen zu vermeiden, werden im Weiteren die plastischen Dehnungen im Vollraum in der Teillösung I mit dem Index I und Teillösung II mit Index II bezeichnet. Die plastische Dehnung in der Teillösung I ( $\varepsilon_{kl}^I$ ) wird identisch zu der im Halbraum ( $\varepsilon_{kl}^P$ ) definiert, jedoch verursacht sie im Gegensatz zum Halbraum auf dem gesamten Vollraum und somit auch an der Symmetrieebene ( $z = 0$ ) Spannungen. Es ergeben sich bei der Teillösung I an der Symmetrieebene folgende Spannungsrandbedingungen:

$$\sigma_{33}^I \neq 0; \sigma_{31}^I \neq 0; \sigma_{23}^I \neq 0; \quad (4.45)$$

Damit die Symmetrieebene in der Teillösung I spannungsfrei wird, werden zu dieser Teillösung I die zwei weiteren Teillösungen II und III, die im Folgenden diskutiert werden, addiert.

- **Teillösung II.**

Die in der Abbildung 4.5 rechts schematisch dargestellte Teillösung II dient dazu, die bei der Teillösung I an der Symmetrieebene ( $z = 0$ ) vorliegenden Schubspannungen zu annullieren. Dafür wird ein weiterer Vollraum mit einem in der negativen Z-Koordinate vorliegenden plastischen Volumenelement verwendet. Dieses Volumenelement wird in der Superpositionsmethode als Image-plastisches Volumenelement bezeichnet und stellt eine Spiegelung des plastischen Volumenelements im Teillösung I dar. Neben der Spiegelung werden folgende Vorzeichenwechsel vorgenommen:

$$\varepsilon_{kl}^{II} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad -\varepsilon_{23} \quad -\varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{12}]^T \quad (4.46)$$

Die in der Gleichung 4.46 eingesetzten negativen Vorzeichen bei den Dehnungskomponenten  $\varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$  sorgen an der Symmetrieebene für resultierende Schubspannungen

mit entgegengesetzten Vorzeichen zu denen aus Teillösung I. Somit ergibt sich aus der Addition der Teillösung I und II eine schubspannungsfreie Vollraumlösung an der Symmetrieebene. Jedoch bleibt hier im Vergleich zu der gesuchten Halbraumlösung die Normalspannung existent. Diese lässt sich mit Hilfe der Teillösung III annullieren. Bei der Teillösung II ergeben sich an der Symmetrieebene folgende Spannungsrandbedingungen:

$$\sigma_{33}^{II} \neq 0; \sigma_{31}^{II} = -\sigma_{31}^I; \sigma_{23}^{II} = -\sigma_{23}^I; \quad (4.47)$$

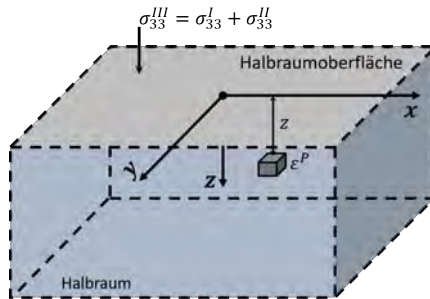
Bevor die Teillösung III beschrieben wird, soll zuerst eine kurze Zusammenfassung der zwei ersten Teillösungen I und II erstellt werden. Die Superposition dieser zwei Lösungen ergibt einen spannungsymmetrischen Vollraum mit schubspannungsfreier Symmetrieebene und ungleichnull-Normalpressung an der Symmetrieebene. Dies kann wiederum wie zwei identische Halbräume mit Normalpressungen betrachtet werden. Um diese Normalpressung verschwinden zu lassen und somit auf die gesuchte Halbraumlösung mit komplett spannungsfreier Oberfläche oder Symmetrieebene zu kommen, wird in der Teillösung III auf einen Halbraum die aus Teillösung I und II an der Symmetrieebene resultierende Normalpressung ausgeübt.

- **Teillösung III.**

Im Gegensatz zur Teillösung I und II wird, wie auf der Abbildung 4.6 zu sehen ist, die Teillösung III auf einem Halbraum konstruiert. Dabei werden die aus den Teillösungen I und II an der Symmetrieebene resultierenden Normalspannungen addiert:

$$\sigma_{33}^{III} = \sigma_{33}^I + \sigma_{33}^{II} \quad (4.48)$$

und als Oberflächenlast auf den Halbraum aufgebracht.

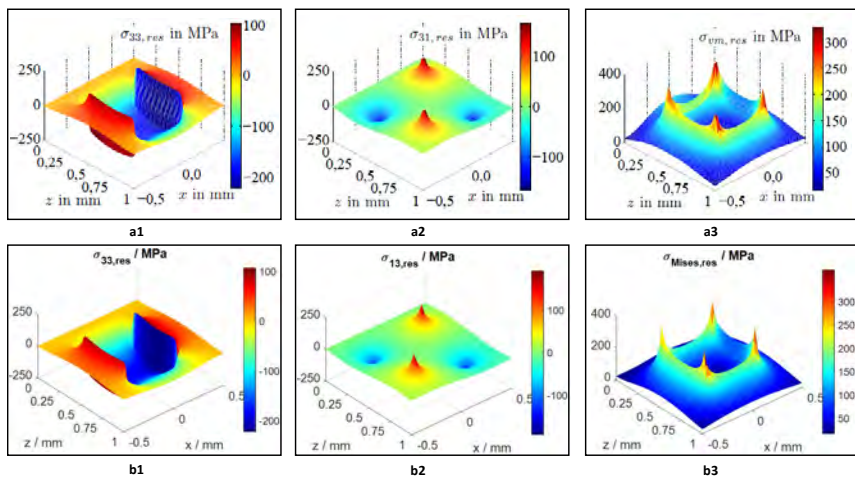


**Abb. 4.6:** Teillösung III des Eigenspannungsproblems im Halbraum

Unter der Voraussetzung, dass der in den Teillösungen I und II betrachtete Vollraum jeweils als zusammengesetzte obere (negative Z-Koordinaten) und untere (positive Z-Koordinaten) Halbraum-Hälfte betrachtet werden kann, ergibt sich die gesuchte Lösung aus der Superposition der Spannungen in den zwei unteren Halbraum-Hälften mit der resultierenden Spannung in Teillösung III.

#### 4.2.1 Beispielberechnung der Eigenspannung

Die implementierte Berechnungsroutine für Eigenspannungen im Halbraum wird im Folgenden anhand eines Beispielfalles aus der Literatur [Haue14] validiert. Dabei werden für einen im Halbraum ( $E = 205000$  MPa,  $\nu = 0,3$ ) auf die Koordinaten ( $x = 0, y = 0, z = 0,5$  mm) vorliegenden isotrop plastisch gedehnten Würfel mit dem Abmaß ( $dx = dy = dz = 0,5$  mm) und die Dehnungskomponenten  $\varepsilon^p = [0,001 \ 0,001 \ 0,001 \ 0 \ 0 \ 0]$  die resultierenden Eigenspannungen bestimmt.



**Abb. 4.7:** Vergleich der berechneten Eigenspannungen in einen Halbraum (b1, b2 und b3) mit Ergebnissen aus [Haue14] (a1, a2 und a3) am Beispiel der Eigenspannungskomponenten  $\sigma_{33,res}$ ,  $\sigma_{13,res}$  und von Mises Vergleichsspannung  $\sigma_{Mises,res}$

In der Abbildung 4.7 wird der Vergleich am Beispiel der normalen Eigenspannungskomponente  $\sigma_{33,res}$  (a1, b1), Schubspannungskomponente  $\sigma_{13,res}$  (a2, b2) und der von Mises Vergleichsspannung  $\sigma_{Mises,res}$  (a3, b3) entlang der Tiefe  $z$  durchgeführt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den in [Haue14] veröffentlichten berechneten Eigenspan-



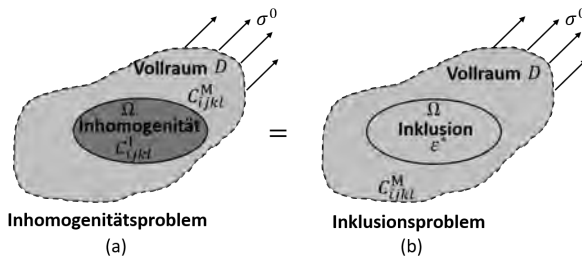
---

nungen (a1, a2 und a3) und der mit der in dieser Arbeit implementierten Routine (b1, b2, b3).

## 5 Materialheterogenität im Halbraum-Kontaktmodell

Rohstoffe, aus denen viele Maschinenelemente gefertigt werden, enthalten häufig schon bei ihrem Gewinnungsprozess Defekte in Form von Fehlstellen und oder Verunreinigungen (Fremdkörper oder Einschlüsse). Diese verursachen bei Kontakt im Bauteil hohe Spannungsgradienten, die die Lebensdauer vermindern können. In diesem Kapitel wird die Berücksichtigung der Materialheterogenität in Form von Einschlüssen beim Lösen der Kontaktprobleme mit dem Halbraummodell behandelt. Die Lösung, die hier vorgestellt wird, erfolgt durch einen Homogenisierungsschritt [Matt13] mithilfe der äquivalenten Inclusionsmethode (EIM: Equivalente Inclusionsmethod) nach ESHELBY [Eshe57; Eshe59], die im Weiteren beschrieben wird.

Die EIM stellt eine Lösung für das in Abbildung 5.1 (a) gezeigte Problem dar, nämlich eine Inhomogenität  $\Omega$ , die in einem Vollraum  $D$  eingeschlossen ist. Diese Lösung erfolgt durch eine Überführung des Inhomogenitätsproblems in das in Abbildung 5.1 (b) gezeigte äquivalente Inklusionsproblems, das zunächst von ESHELBY [MePo14; DHY01] gelöst wurde.



**Abb. 5.1:** Veranschaulichung der Äquivalenz zwischen dem (a) Inhomogenitätsproblem (mit unterschiedlichen Materialeigenschaften im Vergleich zur Matrix) und dem von ESHELBY formulierten (b) Einschlussproblem (identische Materialeigenschaften zur Matrix)

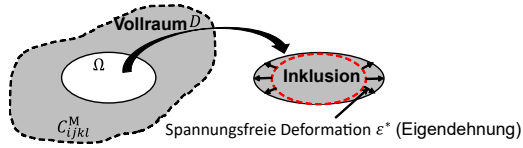
Zum besseren Verständnis wird in Abschnitt 5.1 zunächst die Lösung des Inklusionsproblems nach ESHELBY erläutert, im zweiten Abschnitt 5.2 wird dann dessen Anwendung im Rahmen der EIM vorgestellt. Schließlich wird die Implementierung der EIM und ihre Integration in den Kontaktalgorithmus erläutert und anhand einer Beispielrechnung validiert.

Die Lösung zu dem Inklusionsproblem stellte ESHELBY in einem Gedankenexperiment vor,

bei dem zwei linear elastische Probleme überlagert wurden. Dieses Gedankenexperiment umfasst vier Schritte, die im Folgenden ausführlich beschrieben werden [BaWe18]:

- **Freikörperbild des Einschlusses**

Im ersten Schritt wird der Einschluss aus der Matrix freigeschnitten. Dieser erfährt eine Volumenzunahme durch die zuvor vorhandene Eigendehnung  $\varepsilon^*$  (Siehe Abbildung 5.2). In der Abbildung 5.2 zeigt die rot gestrichelte Kontur die Ursprungsform des Einschlusses, wie noch in der Matrix eingeschlossen.



**Abb. 5.2:** Erster Lösungsschritt des von ESHELBY formulierten Einschlussproblems (Freikörperbild des Einschlusses)

Es resultiert am Ende dieses Schrittes in der Matrix und in dem Einschluss folgendes Feld:

$$\text{Matrix} \quad \varepsilon_{ij} = 0; \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (5.1)$$

$$\text{Einschluss} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon^*; \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (5.2)$$

- **Wiederherstellung der Geometrie des Einschlusses durch Aufbringen einer Flächenlast**

Im zweiten Schritt wird die ursprüngliche Geometrie des Einschlusses durch Aufbringen einer Flächenlast  $T$  wiederhergestellt, wie in Abbildung 5.3 dargestellt. Diese Oberflächenlast ruft in dem Einschluss eine elastische Dehnung  $\varepsilon^{el}$  hervor, die die Eigendehnung  $\varepsilon^*$  aufhebt [Meye14]. Es ergeben sich die folgenden Spannungen und Dehnungen:

$$\text{Matrix} \quad \varepsilon_{ij} = 0; \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{Einschluss} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon^{el} + \varepsilon^* = 0; \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}^M \varepsilon^{el} = -C_{ijkl}^M \varepsilon^* = -\sigma^* \quad (5.4)$$

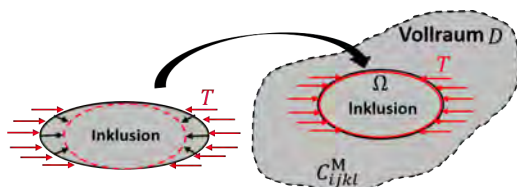
In (5.4) steht  $\sigma^*$  für die Eigenspannung, die durch die Eigendehnungen  $\varepsilon^*$  verursacht wird.



**Abb. 5.3:** Zweiter Lösungsschritt des Einschlussproblems (Aufhebung der Eigendehnung im Einschluss durch die elastischen Dehnungen, die durch die Flächenlast  $T$  erzeugt werden)

- **Reintegration des Einschlusses in die Matrix**

Nachdem der Einschluss in dem zweiten Schritt durch die Oberflächenlast  $T$  in die ursprüngliche Form gebracht wurde, fügte ESHELBY ihn im dritten Schritt wieder in die Matrix ein. Dieser Schritt wird in der Abbildung 5.4 durch die auf dem Oberflächenrand des Einschlusses noch vorhandene Oberflächenlast  $T$  gekennzeichnet und mit roten Pfeilen markiert .



**Abb. 5.4:** Dritter Lösungsschritt des von ESHELBY formulierten Einschlussproblems (Reintegration des Einschlusses in die Matrix)

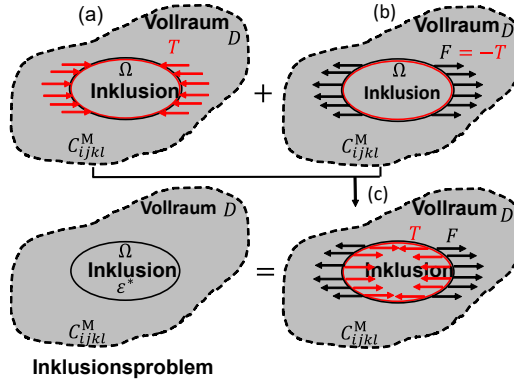
- **Entfernung der Oberflächenlast  $T$**

Um die gleiche Randbedingung wie im ursprünglichen Einschlussproblem aus Abbildung 5.1 wiederherzustellen, stellt sich ESHELBY im letzten Schritt eine zweite Last  $F$  vor, die betragsmäßig gleich groß aber entgegengesetzt zur ersten Flächenlast  $T$  ist. Diese zweite Last wird auf die Matrix an der Grenzfläche zwischen Matrix und dem Einschluss aufgebracht, wie in Abbildung 5.5 (b) gezeigt. Am Ende dieses vierten Schrittes ist die Äquivalenz zwischen dem Einschlussproblem und der von ESHELBY aus den Teillösungen (a) und (b) konstruierten Lösung (c) gegeben (siehe 5.5). In der Matrix und im Einschluss ergeben sich folgende Spannungen und Dehnungen:

$$\text{Matrix} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^c \quad (5.5)$$

$$\text{Einschluss} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^c; \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}^M (\varepsilon_{ij}^c - \varepsilon^*) \quad (5.6)$$

Die Dehnung  $\varepsilon_{ij}^c$  in (5.5) und (5.6) stellt eine zentrale Größe der ESHELBY Lösung dar. Sie beschreibt die resultierende Zwangsdehnung in der Matrix und Inklusion. Aus der Bestimmung dieser Zwangsdehnung folgen direkt die Lösung der Spannungen und Dehnungen in der Matrix und im Einschluss.



**Abb. 5.5:** Zusammenfassung der Eshelby-Lösungsmethode: Überlagerung der Teillösungen (a) und (b) zu einer Lösung (c), die dem Ursprungseinschlussproblem entspricht

Die eben beschriebene ESHELBY Lösung wurde von TOSHIO MURA [Mura98] unter Verwendung von GREEN'sche Funktionen [MoMu75] für eine im  $\Omega$  eingeschlossenen Einschluss durch die folgende Gleichungen zusammengefasst:

$$u_i(x) = -C_{klmn}^M \int_{\Omega} \varepsilon_{mn}^*(x') G_{ij,k}(x-x') \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = -\frac{1}{2} C_{klmn}^M \varepsilon_{mn}^*(x') \left[ G_{ik,lj}(x-x') + G_{jk,li}(x-x') \right] dx' \quad (5.8)$$

$$\sigma_{ij}(x) = -C_{ijkl}^M \left[ \int_{\Omega} C_{pqmn}^M \varepsilon_{mn}^*(x') G_{kp,ql}(x-x') dx' + \begin{cases} \varepsilon_{kl}^*(x'); x \in \Omega \\ 0; x \notin \Omega. \end{cases} \right] \quad (5.9)$$

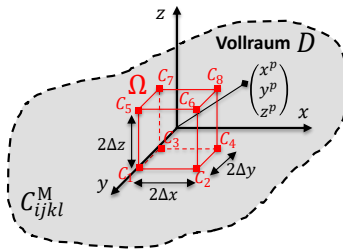
Mit  $G_{ik}$ : GREEN'sche Funktion

$x, x'$ : Positionsvektor des Auswertungspunktes und ein beliebiger Punkt innerhalb der Inklusion

Die mathematische Herleitung zu diesen Gleichungen kann der Literatur [MHP12; LeNé11; Full11] entnommen werden. Die Lösung der Zwangsdehnung (in 5.5 und 5.6) für alle Punkte innerhalb und außerhalb des Einschlusses wird oft kompakt wie folgt dargestellt:

$$\varepsilon_{ij}^c = S_{ijkl} \varepsilon_{kl}^* \quad (5.10)$$

$S_{ijkl}$  wird als ESHELBY Tensor genannt. Dieser Tensor wird unter der Annahme einer konstanten Eigendehnung  $\varepsilon_{kl}^*$  innerhalb des Einschlusses bestimmt und hängt von den Materialeigenschaften und der Geometrie der Einschlüsse ab. Der ESHELBY- Tensor wurde in vielen Veröffentlichungen für verschiedene Einschlussgeometrien untersucht. Die Arbeiten [Eshe57; Eshe59] konzentrierten sich auf ellipsoidale Einschlüsse. Hier wurde gezeigt, dass der Tensor für diesen Geometriertyp innerhalb des Einschlusses konstant bleibt. Auf eine detaillierte Beschreibung des ESHELBY Tensors für ellipsoidale Einschlüsse wird verzichtet und auf die Literatur [Full11; Lero13] verwiesen. Eine interessante Lösung ist der



**Abb. 5.6:** Hexaeder-Volumenelement als Einschluss im Vollraum

ESHELBY-Tensor für quaderförmige oder hexaedrale Einschlüsse. Diese Lösung wurde erstmals von LEE und JOHNSON [JEL80], und CHIU [Chiu77; Chiu78] eingeführt und wird im Folgenden aufgrund ihrer großen Relevanz für die vorliegende Arbeit näher erläutert. Betrachtet wird der im Vollraum  $D$  eingebettete hexaedrale Einschluss  $\Omega$  mit uniformer Eigendehnung  $\varepsilon_{ij}^*$  in Abbildung 5.6. Für den ESHELBY Tensor gilt folgender allgemeiner Ausdruck [Full11]:

$$S_{ijkl} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \Psi_{,kl ij} - 2\nu\delta_{kl}\Phi_{,ij} - (1-\nu) \left[ \Phi_{,kij}\delta_{il} + \Phi_{,ki}\delta_{jl} + \Phi_{,lj}\delta_{ik} + \Phi_{,li}\delta_{jk} \right] \right] \quad (5.11)$$

Mit  $\Psi(x), \Phi(x)$  als spezielle Potentialfunktionen. Für eine hexaedrale Einschluss wurden die Potentialfunktionen von MACMILLAN [MacM58] durch folgende Integrationsformel über die Eckpunkte ( $c_1, \dots, c_8$ ) des Hexaeders beschrieben:

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^8 D(c_n); \Psi(x) = \sum_{n=1}^8 E(c_n) \quad (5.12)$$

Mit

$$D(c_n) = y \log(R+z) + yz \log(R+x) + zx \log(R+y) - \frac{1}{2} \left[ x^2 \tan^{-1}\left(\frac{yz}{xR}\right) + y^2 \tan^{-1}\left(\frac{xy}{zR}\right) \right] \quad (5.13)$$

$$E(c_n) = \frac{1}{4}xyzR + \frac{1}{6} \left[ (R^2 - x^2)yz \log(R+x) + (R^2 - y^2)zx \log(R+y) + (R^2 - z^2)xy \log(R+z) \right] - \frac{1}{12} \left[ x^4 \tan^{-1}\left(\frac{yz}{xR}\right) + y^4 \tan^{-1}\left(\frac{zx}{yR}\right) + z^4 \tan^{-1}\left(\frac{xy}{zR}\right) \right] \quad (5.14)$$

Mit  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  und den Vektoren  $c_n = (x, y, z)$ :

$$\begin{bmatrix} c_1 = (x^P - \Delta x, y^P - \Delta y, z^P - \Delta z) & c_2 = (x^P + \Delta x, y^P - \Delta y, z^P - \Delta z) \\ c_3 = (x^P + \Delta x, y^P + \Delta y, z^P - \Delta z) & c_4 = (x^P - \Delta x, y^P + \Delta y, z^P - \Delta z) \\ c_5 = (x^P - \Delta x, y^P + \Delta y, z^P + \Delta z) & c_6 = (x^P - \Delta x, y^P - \Delta y, z^P + \Delta z) \\ c_7 = (x^P + \Delta x, y^P - \Delta y, z^P + \Delta z) & c_8 = (x^P + \Delta x, y^P + \Delta y, z^P + \Delta z) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

wird der Abstand von den acht Eckpunkten des Volumenelements zu einem beliebigen Punkt  $(x^p, y^p, z^p)$  im Vollraum beschrieben. Der bereits in (5.11) beschriebene ESHELBY-Tensor bietet eine allgemeine Lösung an. Beliebige Einschlussgeometrien werden als erste durch möglichst kleine Hexaeder diskretisiert und anschließend wird die gesamte Lösung durch Superposition der einzelnen Lösungen der Volumenelemente ermittelt. In der Realität können Einschlüsse je nach ihrem Entstehungsprozess unterschiedlich komplexe Geometrien aufweisen. Eine Klassifizierung von nicht-metallischen Einschlüssen in Stahl kann z.B. in der Norm [DINEN10247] gefunden werden.

## 5.1 Anwendung der Eshelby-Lösung in der äquivalenten Inklusionsmethode

Zu Beginn dieses Abschnitts soll zur Verdeutlichung noch einmal kurz auf das Inhomogenitätsproblem eingegangen werden, das mit dem EIM zu lösen ist. Es soll ein unendlich ausgedehntes (Vollraum) Matrixmaterial mit elastischer Materialkonstante  $C_{klmn}^M$  betrachtet werden, das einen perfekt an ihn begrenzten Teilbereich  $\Omega$  mit unterschiedlicher elastischer Materialkonstante (Inhomogenität) einschließt. Unter dem Einfluss einer äußeren Spannung  $\sigma^0$  (z.B. aus dem Kontakt) und der daraus resultierenden Dehnung  $\varepsilon^0$  führt das Vorhandensein der Inhomogenität  $\Omega$  zu einer Störung des elastischen Spannungs- und Dehnungsfeldes, im Weiteren als  $\sigma^{dis}$ ,  $\varepsilon^{dis}$  bezeichnet. Die EIM postuliert, dass die von einer Inhomogenität verursachte Störung der elastischen Felder, durch die resultierenden Eigenspannungen, Dehnungen und Verschiebungen im Fall eines Inklusionsproblems simuliert werden kann, wenn die Eigendehnung  $\varepsilon^*$  richtig gewählt wird. Diese Eigendehnung  $\varepsilon^*$  soll im Rahmen der EIM durch die im Folgenden beschriebene Kompatibilitätsgleichung sinnvoll bestimmt werden. Unter der Annahme eines linearen isotropen Materialverhaltens der Matrix und Inhomogenität ergibt sich nach dem Hooke'schen Gesetz folgendes:

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma^{dis} = C_{ijkl}^I (\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^{dis}); \quad \text{in } \Omega \quad (5.16)$$

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma^{dis} = C_{ijkl}^M (\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^{dis}); \quad \text{in } D - \Omega \quad (5.17)$$

Die EIM besteht darin, die Inhomogenität als einen Einschluss mit gleichen elastischen Eigenschaften darzustellen, der jedoch zusätzlich einer zu bestimmenden imaginären Eigendehnung  $\varepsilon^*$  unterliegt. Diese Äquivalenz wird durch die folgende Bedingung für das

$\Omega$ -Gebiet ausgedrückt, welches sich aus (5.17) und (5.4) ergibt:

$$C_{ijkl}^I(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^{dis}) = C_{ijkl}^M(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^{dis}) - \sigma^* \quad (5.18)$$

$$= C_{ijkl}^M(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^{dis}) - C_{ijkl}^M \varepsilon^* \quad (5.19)$$

$$= C_{ijkl}^M(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^{dis} - \varepsilon^*) \quad (5.20)$$

Mit  $\sigma^*$  als die aus der imaginären Eigendehnung  $\varepsilon^*$  resultierende Eigenspannung (5.4). Die Gleichung (5.18) stellt die Grundgleichung der EIM dar, aus der die Kompatibilitätsdehnung  $\varepsilon^*$  bestimmt wird dar. Für einen aus einem Hexaeder diskretisierten beliebig geformten Einschluss erfolgt die Bestimmung der Kompatibilitätsdehnungen für alle Volumenelemente durch das Lösen eines Gleichungssystems. Die in dieser Arbeit implementierte Lösungsmethode wird im nächsten Abschnitt 5.2 erläutert.

## 5.2 Implementierung der EIM und Integration im Kontaktalgorithmus

Die Gleichung (5.18) stellt ein lineares Gleichungssystem für einem in  $N$  Hexaederelementen diskretisierten Einschluss dar. Zur Lösung einfacher linearer Gleichungssysteme können Standardverfahren wie die GAUSS Methode angewendet werden. Im Fall dieser Gleichung existiert jedoch eine starke gegenseitige Beeinflussung der gesuchten äquivalenten Eigendehnung  $\varepsilon^*$  mit der ebenfalls unbekanntenen Dehnungsstörung  $\varepsilon^{dis}$  (verursacht durch die Inhomogenität). Zur Lösung dieses Gleichungssystems mit den beiden gekoppelten Größen  $\varepsilon^*, \varepsilon^{dis}$  wurde in [ZJWW15; ZJWW16] ein iteratives Verfahren vorgestellt, das im Folgenden beschrieben wird.

Zunächst wird aus (5.18) folgende Grundgleichung abgeleitet:

$$\varepsilon_{ij}^* = \Delta H_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^{dis}); \quad \text{in } \Omega \quad (5.21)$$

Mit  $\Delta H_{ijkl} = \frac{\Delta C_{mnlk}}{C_{ijkl}^M}$ , und  $\Delta C_{mnlk}$  als Steifigkeitsdifferenz zwischen der Matrix und der Inhomogenität.

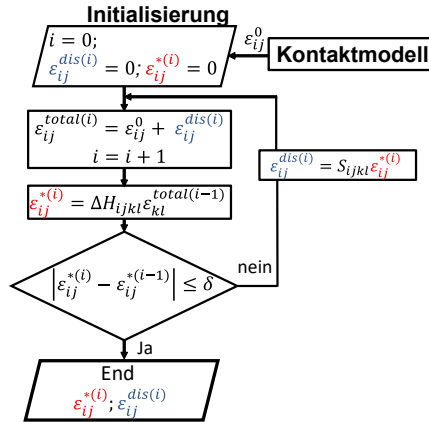
Zur Lösung dieser Gleichung wurde das in Abbildung 5.7 dargestellte iterative Schema vorgestellt [ZJWW15]. Zu Beginn des iterativen Prozesses ( $i = 0$ ) werden die unbekanntene Dehnungsstörung  $\varepsilon^{dis(i)}$  und Eigendehnung  $\varepsilon^{*(i)}$  mit Null initialisiert. Bei jedem Iterationsschritt wird aus der gesamten Dehnung:

$$\varepsilon_{ij}^{tot} = \varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^{dis} \quad (5.22)$$

und mittels (5.21) die aktuelle Kompatibilitätsdehnung  $\varepsilon^{*(i)}$  bestimmt und durch einen Vergleich gegenüber der vorherigen Größe  $\varepsilon^{*(i-1)}$  auf die Konvergenz überprüft. Im Fall



einer Konvergenz (ermittelt durch eine Fehlerschranke  $\delta$ ) wurden die richtigen Kompatibilitätsdehnungen  $\varepsilon^{*(i)}$  und Dehnungsstörungen  $\varepsilon^{dis(i)}$  bestimmt, andernfalls wird aus der aktuellen Kompatibilitätsdehnung  $\varepsilon^{*(i)}$  mit Hilfe (5.10) eine neue Dehnungsstörung  $\varepsilon^{dis(i)}$  bestimmt und eine neue Iteration gestartet.



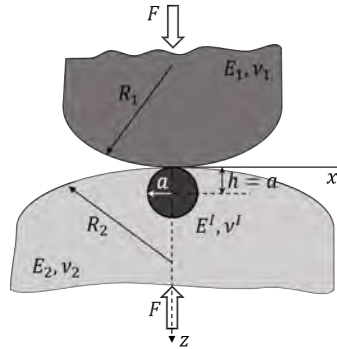
**Abb. 5.7:** Lösungsschema zur Bestimmung der äquivalenten Eigendehnung bei der Lösung des Kontaktproblems mit Materialinhomogenität nach [ZJWW16]

### 5.3 Verifikation der implementierten EIM im Halbraummodell

In dem hier gelösten Validierungsbeispiel (siehe Abb. 5.8) handelt es sich um einen punktförmigen Kontakt zwischen zwei identischen Kugeln, wobei einen in ihren Inneren einen sphärischen Einschluss beinhaltet. Untersucht wird für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse zwischen Einschluss und Grundkörper (Matrix) der Einfluss dieser Inhomogenität auf die Kontaktpressung und Spannungen im Körper. In der Tabelle 5.1 werden die wichtigsten Simulationsparameter zusammengefasst [Lero13].

In Abb. 5.9 wird der Einfluss auf die Kontaktpressung veranschaulicht. In 5.9 a) wird für den Fall mit einem Steifigkeitsverhältnis  $k = 4$  (siehe Tabelle 5.1) die simulierte Kontaktpressung gezeigt.

Die Ergebnisse in der hier dargestellten Schnittebene werden bei den vier untersuchten Steifigkeitsverhältnissen normiert und in der rechten Abbildung 5.9 b) verglichen. Zur Normierung wird die im homogenen Fall resultierende maximale Kontaktpressung nach HERTZ (siehe Tabelle 5.1) verwendet. Die Inhomogenität sorgt für eine lokale Veränderung der maximalen Kontaktpressung um den Faktor 0,7, 0,9, 1,11 und 1,17 jeweils für die Steifigkeitsverhältnisse 0,25, 0,5, 2 und 4.

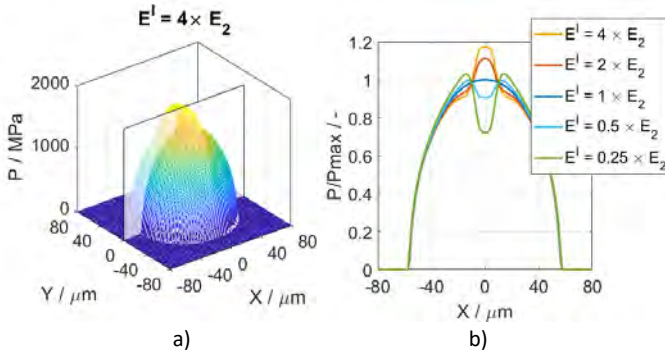


**Abb. 5.8:** Beispielsberechnung eines punktförmigen Kontakt mit sphärischer Inhomogenität

In Abb. 5.9 wird der Einfluss auf die Kontaktpressung veranschaulicht. In 5.9 a) wird für den Fall mit einem Steifigkeitsverhältnis  $k = 4$  (siehe Tabelle 5.1) die simulierte Kontaktpressung gezeigt.

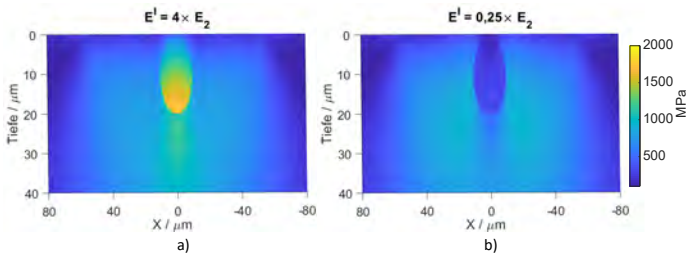
**Tab. 5.1:** Simulationsparameter der Beispielsberechnung eines punktförmigen Kontaktproblems mit sphärischer Inhomogenität

Parameter	Grundkörper	Inhomogenität
Radius	$R_1 = R_2 = 5,48 \text{ mm}$	$a = 10 \text{ }\mu\text{m}$
$E$ -Modul	$E_1 = E_2 = 210000 \text{ MPa}$	$E^I = kE_2 ; k = 0,25; 0,5; 1; 2; 4$
Poissonzahl	$\nu_1 = \nu_2 = 0,3$	$\nu^I = 0,3$
HERTZ'sche Größen		
Normalkraft	$F = 10 \text{ N}$	
Max. Pressung	$P_{max} = 150,95 \text{ MPa}$	
Kontaktradius	$a_0 = 56,3 \text{ }\mu\text{m}$	



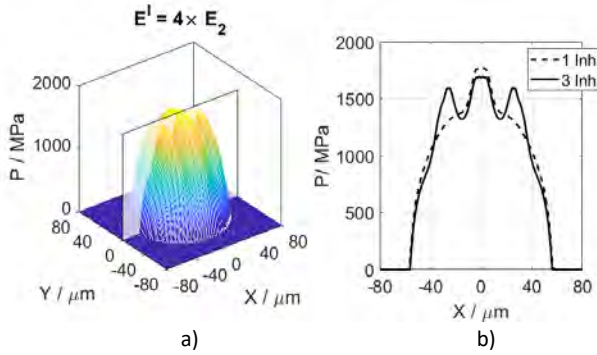
**Abb. 5.9:** Einfluss der Inhomogenität auf die Kontaktpressung, a) Kontaktpressung bei der Simulation mit Steifigkeitsverhältnis  $k = 4$ , b) Vergleich der normierten Kontaktpressungsverläufe bei den vier Steifigkeitsverhältnissen

Wie in der Abbildung 5.10 am Beispiel der Ergebnisse mit den Steifigkeitsverhältnissen 0,25 und 4 gezeigt ist, sorgt ein sehr steifer Einschluss (hier  $E^I = 4 E_2$ ) zu lokal konzentriert in dem Einschluss vorliegenden hohen Spannungen (max. 1770 MPa). Ein sehr weicher Einschluss (hier  $E^I = 0,25 E_2$ ) hingegen verursacht einen starken Abstieg der Spannungswerte innerhalb des Einschlusses. Hier werden die maximalen Spannungen (max. 943MPa) auf die Matrix (Grundkörper) gelenkt.



**Abb. 5.10:** Einfluss der Inhomogenität auf die Spannungen bei den Steifigkeitsverhältnissen a)  $k = 4$ , b)  $k = 0,25$  rechts jeweils für sehr steife und weiche Einschlüsse im Vergleich zum Grundkörper

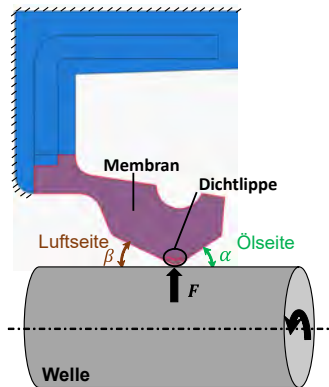
Ein weiterer Effekt wird in der Abbildung 5.11 (b) veranschaulicht, nämlich die mögliche Reduktion der maximalen Kontaktpressung durch mehrere Einschlüsse. In dem gezeigten Ergebnis wurden für das Steifigkeitsverhältnis 4 im Gegensatz zum Fall in Abbildung 5.9 zwei weitere identische Inhomogenitäten symmetrisch zur Kontaktmitte definiert. Es ergibt sich dadurch eine Reduzierung der maximalen Kontaktpressungen von 1775 MPa auf 1695 MPa.



**Abb. 5.11:** Einfluss der Inhomogenität auf die Spannungen bei den Steifigkeitsverhältnissen a)  $k = 4$ , b)  $k = 0,25$  rechts jeweils für sehr steife und weiche Einschlüsse im Vergleich zum Grundkörper

## 6 Anwendung in der Dichtungstechnik

Radialwellendichtringe (RWDR) sind wichtige Maschinenelemente, die im rotierenden und Öl geschmierten System eingesetzt werden. Ihre Hauptaufgabe ist zum einem Ölaustritt aus dem System zu vermeiden und zum anderen Schmutzpartikel dem Eintritt in das System zu verhindern. Wenn diese Funktion nicht erfüllt ist, kann Leckage auftreten und nach gewisser Betriebszeit hohen Schaden wie beispielsweise Getriebeausfall wegen Mangelschmierung verursachen. Die Dichtfunktion von RWDR entsteht über eine sehr kleine Berührbreite zwischen der Dichtlippe und der Welle.

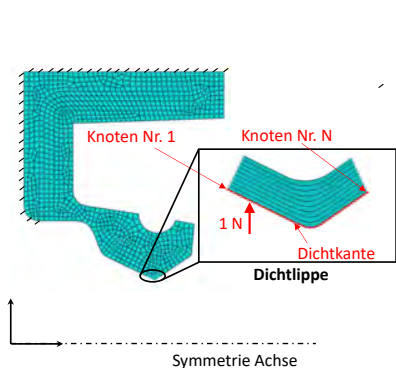


**Abb. 6.1:** Schnittdarstellung eines RWDR im Kontakt mit einer rotierenden Welle, Wurmfeder entfernt

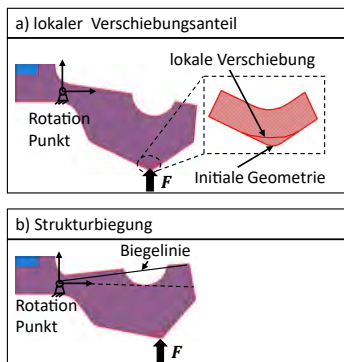
Im Rahmen des SFB-926 im Projekt C01 ("Morphologieeinfluss auf Wellenabdichtungen") wurde die SAM zur simulativen Untersuchung der Dichtfunktion der RWDR verwendet. Die Anwendung des Halbraum-Kontaktmodells auf den Dichtkontakt stößt auf zwei Schwierigkeiten. Diese sind das nichtlineare (viskoelastisch) Materialverhalten des Elastomer und der Einfluss der Strukturverformung (in Form einer Biegung) der Membran (siehe Abb. 6.1) auf den Kontakt. Es wurde von kleinen Verformungen der Dichtlippe ausgegangen und damit ein linear elastisches Materialverhalten angenommen. Für die Simulation wurde der Elastizitätsmodul aus einem Stufenzugversuch ermittelt [Jenn16]. Im Folgenden wird zunächst in Abschnitt 6.1 auf die angewendete Methode zur Berücksichtigung der Strukturverformung der Membran eingegangen, anschließend werden die Ergebnisse der Verschleißsimulation und Analyse der Dichtfunktion präsentiert.

## 6.1 Bestimmung des Strukturdeformationseinflusses mittels FEM

Um die Strukturverformung im Halbraummodell zu berücksichtigen, werden zunächst Einflussmatrizen durch Finite-Elemente-Analyse (FEA) ermittelt und zu den Einflusskoeffizienten (nach BOUSSINESQ) addiert. Diese Methode wurde bereits in [SaFl95] für das Dichtkontaktproblem und in [TGV10; Teix12] zur Untersuchung von Zahnradkontakten angewendet. Das in dieser Arbeit verwendete FE-Modell [FMS14] wurde in der kommerziellen Software Abaqus als 2D axial symmetrisches Modell aufgebaut (siehe Abb. 6.2).



**Abb. 6.2:** Finite-Elemente-Modell [FMS14] zur Bestimmung der Einflussmatrizen der Verformung aufgrund der Membranbiegung



**Abb. 6.3:** Superposition der Kontaktverschiebung an der Dichtlippe in zwei Anteile a) lokaler Verschiebungsanteil und b) globaler Verschiebungsanteil aus der Membranbiegung

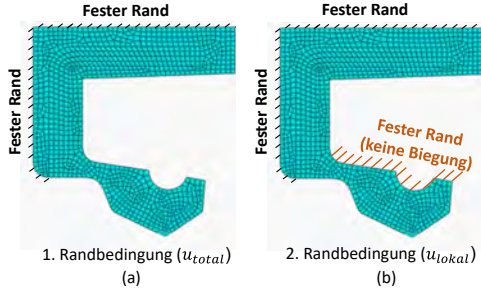
Unter der Annahme kleiner linear-elastischer Verformungen wurde das Superpositionsprinzip angewandt und die gesamte Kontaktverschiebung  $u_{total}$  aus einem lokalen Anteil  $u_{local}$  (ohne makroskopische Verlagerungen) und einem Anteil aus der strukturellen Biegung der Membran  $u_{struk}$  (ohne lokale Verformungen) zusammengesetzt (siehe Abb. 6.3). Die Verschiebungskomponente aufgrund der Strukturverformung lässt sich wie folgt bestimmen:

$$u_{struk} = u_{total} - u_{local} \quad (6.1)$$

Die Gleichung (6.1) wurde mit Hilfe von zwei Simulationsreihen mit unterschiedlichen Randbedingungen für  $u_{total}$  und  $u_{local}$  gelöst.

Diese Randbedingungen werden im Folgenden beschrieben. Die Bestimmung der Gesamtverschiebung  $u_{total}$  erfordert eine komplett freie Verschiebbarkeit der Membran. Dies wur-

de durch die in Abbildung 6.4 (a) dargestellte Randbedingung ermöglicht. Für die Bestimmung der lokalen Verschiebung  $u_{\text{local}}$  muss dagegen die Durchbiegung der Membran durch eine zusätzliche Randbedingung verhindert werden (siehe Abbildung 6.4 (b)).



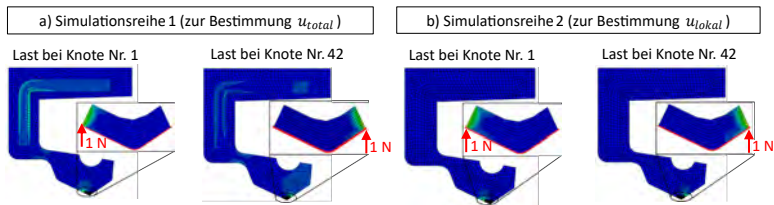
**Abb. 6.4:** Randbedingungen für die Bestimmung der Kontaktverschiebung, (a) der Gesamtverschiebung, (b) der lokalen Verschiebung

Die Dichtkante wurde in FE-Modell mit  $N = 42$  Knoten vernetzt (siehe Abbildung 6.2). In jede Simulationsreihe wurde eine Einheitslast sukzessiv an jedem einzelnen Knoten aufgebracht und die Verschiebungsantwort an allen  $N$  Knoten ermittelt. Eine ähnliche Nomenklatur wie im Halbraummodell wurde definiert:

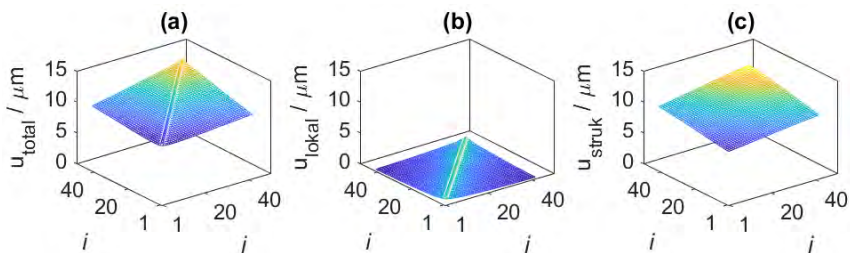
$$1 \leq i \leq N \quad \text{Index der Lastangriffsknoten} \quad (6.2)$$

$$1 \leq j \leq N \quad \text{Index der Auswertungsknoten der Verschiebung} \quad (6.3)$$

Beispielresultate aus den beiden Simulationsreihen für die Lastangriffspunkte am ersten bzw. letzten Knotenpunkt der Dichtkante sind in Abbildung 6.5 dargestellt. In der ersten Simulationsreihe verursacht die Einheitskraft aufgrund der vollen Beweglichkeit der Dichtmembran Spannungen über den gesamten Modellquerschnitt. Die Ergebnisse der zweiten Simulationsreihe zeigen dagegen eine lokale Konzentration der Spannungen (abgeleitet aus den Verschiebungen) auf die Dichtlippe.



**Abb. 6.5:** FE-Simulationsergebnisse für die beiden Simulationsreihen (zur Bestimmung der gesamten Verschiebung  $u_{total}$  und lokalen Verschiebungsanteil  $u_{lokal}$  an der Dichtlippe im Dichtkontakt) am Beispiel der Lastangriffspunkte am ersten und letzten Lastangriffspunkt



**Abb. 6.6:** Mittels eines FE-Modell bestimmten Verschiebungsanteile an der Dichtlippe (a) Gesamtverschiebungsfeld (b) lokales Verschiebungsfeld (c) aus (a) und (b) abgeleiteten Verschiebungsfelder bei der Strukturdeformation

Die in Abb. 6.6 (a), (b) dargestellten Verschiebungsfelder ergaben sich aus den zwei Simulationsreihen (unter den Randbedingungen in Abb. 6.4 (a), (b)) und mit Hilfe der Beziehung (6.1) wurde das gesuchte Verschiebungsfeld bei der Strukturdeformation abgeleitet (siehe Abb. 6.6 (c)). Dieses lässt sich mit der zuvor definierten Nomenklatur in (6.2) und (6.3) wie folgt ausdrücken:

$$u_j = K_{ji} \cdot F_i \quad (6.4)$$

Für die Anwendung derselben Steifigkeit auf beliebiger Netzfeinheit wurde wie in [TGV10; Teix12] beschrieben, eine Interpolation mittels Basisfunktionen, die aus Biegeeigenform ermittelt werden, eingesetzt.

Im ersten Schritt zur Gewinnung der Interpolationsfunktionen wird die Dichtmembran gemäß Abbildung 6.7 auf ein Biegebalkenmodell mit feiner vernetzten Dichtlippe reduziert. Für eine fein diskretisierte Dichtlippe mit  $N^*$  Kontaktpunkten ( $N^* \gg N = 42$ ) werden  $N$  polynomiale Biegeformfunktionen gemäß [TGV10; Teix12] wie folgt definiert:

$$f_k(x) = \left( \frac{x - l_{min}}{l_{max} - l_{min}} \right)^{k-1} \quad (6.5)$$

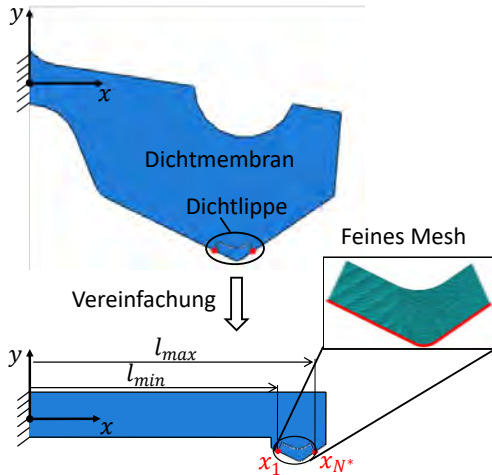


Mit:  $l_{max}$ : maximale Balkenlänge

$l_{min}$ : minimale Balkenlänge

$f_k$ :  $k$ . Biegeformfunktion

$x$ : Koordinaten im neuen (feinen) Berechnungsgebiet



**Abb. 6.7:** Balkenmodell der Dichtmembran mit fein vernetzter Dichtlippe zur Bestimmung der Interpolationsfunktionen

In Gleichung 6.5 stellt der Parameter  $x$  die Koordinaten der  $N^*$  Kontaktpunkte. Der Wertebereich liegt zwischen  $x_1$  und  $x_{N^*}$ , die jeweils die Koordinaten der ersten und letzten Kontaktpunkt sind (siehe Abbildung 6.7). Alle geometrischen Größen des Balkenmodells lassen sich aus dem FE-Modell bestimmen. Werden die  $x$  Werte im Zeilenvektor gespeichert, ergibt sich aus der Auswertung von (6.5) eine  $N \times N^*$  Matrix. Somit kann  $f$  als eine Transformationsmatrix beschrieben werden, welche eine Steifigkeitsmatrix  $K_{ji}^{grob}$  (bestimmt auf ein grobes Mesh mit  $N$  Punkte) zu einer anderen  $K_{ji}^{fein}$  (auf ein feines Mesh mit  $N^* \gg N$  Kontaktpunkten) wie folgt überführt:

$$K_{ji}^{fein} = f^T \cdot K_{ji}^{grob} \cdot f \quad (6.6)$$

Mit:

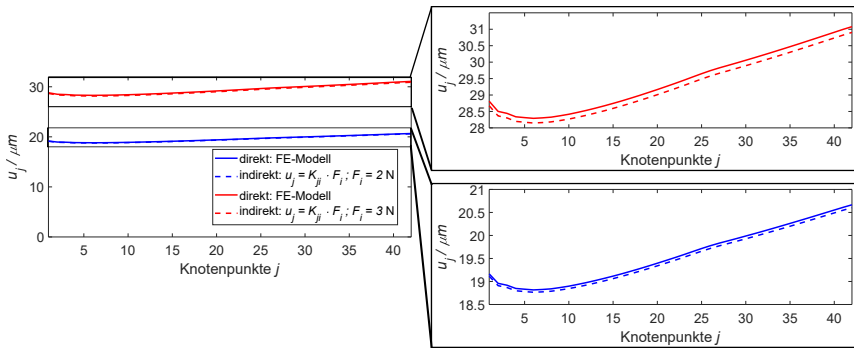
$K_{ji}^{fein}$ : Struktursteifigkeit auf dem feinen Mesh

$K_{ji}^{grob}$ : Struktursteifigkeit auf dem groben Mesh

$f$ : Biegeformfunktionsmatrix

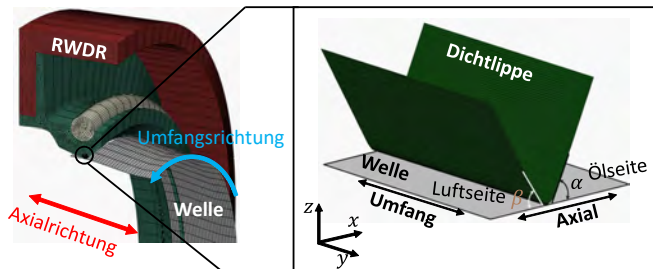
Zur Verifikation der Gleichung (6.4) wurden die direkt aus dem FE-Modell erhaltenen Knotenverschiebungen mit den indirekt mittels (6.4) abgeleiteten Knotenverschiebungen

für die beiden unterschiedlichen Lasten  $F_i = 2 \text{ N}$  und  $3 \text{ N}$  verglichen, wie in Abbildung 6.8 dargestellt. Eine gute Übereinstimmung lässt sich für die beiden Lasten feststellen.



**Abb. 6.8:** Verifikation der Methode zur Bestimmung Steifigkeitsmatrix aus FE-Modell, durch der Vergleich der Knotenverschiebungen: direkt aus dem FE-Modell bestimmt und indirekt mittels (6.4) aus der Steifigkeit berechnet. Vergleich am Beispiel der zwei lasten  $F_i = 2 \text{ N}$  und  $3 \text{ N}$  (jeweils blauen und roten Kurven) durchgeführt

Zur Validierung der Implementierung dieser Methode wurde der Normalkontakt zwischen Dichtlippe und Welle im Halbraummodell gelöst und das Ergebnis der Kontaktpressung gegenüber dem aus FE-Modell [FMS14] verglichen. Der Dichtkontakt wurde wie in Abb. 6.9 rechts dargestellt (identische Profilgeometrie über jeden Umfangabschnitt) modelliert. Beide Kontaktpartner, Dichtlippe und Welle, wurden in axialer Richtung geschnitten und am Umfang abgewickelt.



**Abb. 6.9:** 3D-Darstellung eines RWDR-Welle Dichtkontakts im FE-Modell (links) und dessen reduziertes Halbraummodell des Kontaktbereichs (rechts)

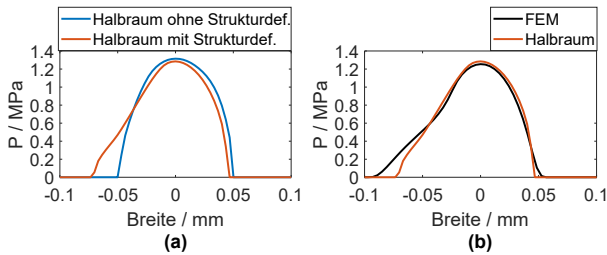
Die Simulationsparameter werden in der Tabelle 6.1 zusammengefasst. Der Elastizitätsmodul der Elastomer-Dichtlippe wird aus einem Stufenzugversuch [Jenn16] ermittelt. Die angegebene Radialkraft  $F_r$  wurde im neuen Zustand ohne Feder gemessen. Die auf dem

Berechnungsgebiet definierte Mikrokontaktkraft  $F_{mikro}$  wird aus der gemessenen Radialkraft durch das Verhältnis der gesamten Umfangslänge (bei einem Wellendurchmesser von 80 mm) zur Länge des Berechnungsgebiets in die Umfangsrichtung  $L_y$  abgeleitet.

**Tab. 6.1:** Simulationsparameter der Dichtlippe-Welle Kontakt

	Elastizitätsmodul / MPa	Poissonszahl / -	Berechnungsgebiet / mm	Normallast / N
$E_1$ (Dichtlippe)	4,42	$\nu_1$ 0,49	$L_x, L_y$ 0,85	$F_r$ 28,62
$E_2$ (Welle)	210000	$\nu_2$ 0,3	$dx, dy$ 0,0033	$F_{mikro}$ 0,0967

Die Strukturverformung der Membran in Form einer Biegung hat in der Tat einen großen Einfluss auf die Kontaktsituation zwischen der Dichtlippe und der Welle. Ihre Berücksichtigung in der Kontaktsimulation führt, wie der Vergleich in Abb. 6.10 (a) zeigt, zu einer Verringerung der maximalen Flächenpressung von 1,32 auf 1,28 MPa (ca. 3 Prozent) zugunsten der Kontaktbreite



**Abb. 6.10:** (a): Vergleich des im Halbraum simulierten Kontaktungsprofil ohne und mit Berücksichtigung der Strukturdeformation der Membran. (b): Vergleich der Halbraum und FE Ergebnisse zur Validierung der Implementierung der Strukturdeformation im Halbraummodell

Ein Anstieg der Kontaktbreite von 0,093 auf 0,117 mm (ca. 24 Prozent) ergibt sich im Simulationsfall mit dem Einfluss der Strukturverformung gegenüber dem Fall ohne Einfluss der Strukturverformung. Weiterhin zeigt dieser Vergleich eine resultierende asymmetrische Druckverteilung bei Berücksichtigung der Strukturverformung. Diese asymmetrische Druckverteilung ist eine wesentliche Voraussetzung für eine gut funktionierende Abdichtung [KaMü86].

Der Vergleich in Abb. 6.10 (b) zeigt eine gute Übereinstimmung zwischen Halbraum und FE-Modell. Die vorliegenden Abweichungen können als Ursachen die für das Halbraummodell verwendeten Linearisierung des Materialverhaltens und die abrupte Änderung der Kontaktbreite im FE-Modell aufgrund der Diskretisierung haben (Vergleich [Fröl16]).

## 6.2 Verschleißsimulation

Zur Verschleißberechnung existieren im aktuellen Stand viele Ansätze, die sich in zwei Hauptgruppen einteilen lassen [FMS14; Jenn16]. Die erste Gruppe ist die der klassischen Verschleißtheorien. Dazu gehört das aus der Kontaktmechanik basierte Verschleißgesetz nach ARCHARD [Arch53]. Nach dem ARCHARD-modell lässt sich das Verschleißvolumen wie folgt bestimmen:

$$V_{vol} = \alpha_A \cdot s_{weg} \frac{P}{H_{Mat}} \quad (6.7)$$

Mit  $\alpha_A, S_{weg}, P, H_{Mat}$ : Verschleißkoeffizient, Gleitweg, Normalpressung, Härte des weichen Kontaktpartners. Dieses Verschleißmodells bietet zwar den Vorteil, dass es einfach implementiert werden kann, hat aber den Nachteil, dass viele entscheidende Parameter wie beispielsweise der Reibungszustand unbeachtet bleiben. In der zweiten Gruppe der modernen Verschleißmodelle wird beispielsweise das Reibenergie basierte Verschleißmodell nach FLEISCHER [Flei85] eingeteilt. Dieses Verschleißmodell wurde in dieser Arbeit eingesetzt. Hier lautet die Verschleißgleichung:

$$V_{vol} = \alpha_F \cdot E_d = \frac{1}{e_r} \cdot E_d \quad (6.8)$$

Mit  $\alpha_A, e_r, E_d$ : Verschleißkoeffizient, Reibungsenergiegedichte, Reibarbeit. Der Verschleißkoeffizient wird aus dem Kehrwert der Reibungsenergiegedichte berechnet. Die Reibarbeit  $E_d$  in (6.8) kann ebenfalls experimentell bestimmt werden. Die Reibarbeit wurde in der Arbeit aus den im Versuch gemessenen Reibmomenten an der Welle bestimmt. Die experimentelle Bestimmung der Reibarbeit, die Aufbereitung der Daten sowie die Beschreibung des Simulationsablaufs werden im Anhang A ausführlich erläutert. Mit Hilfe von (2.49) werden die Gleitwege aus einer gegebenen Reibarbeit bestimmt. Die folgende lokale Verschleißformel wird aus den Gleichungen (2.49) und (6.8) abgeleitet [Gall07]:

$$\Delta h = \alpha_F \cdot E_d = \frac{1}{e_r} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Mit  $\Delta h$  als Verschleißinkrement (lokale Höhenänderung durch Verschleiß). Bei der Verschleißsimulation wurde die Geometrie der Dichtlippe nach jedem Iterationsschritt mittels (6.9) aktualisiert.

Für vier Kombinationen aus zwei Elastomer Werkstoffen (ACM: Polyacrylatkautschuk; FKM: Fluorkautschuk) und zwei Schmierstoffen (Mineralöl ohne Additive und PAO: synthetisches niedrig additiviertes Polyalphaolefin der Klasse SAE 0W20) wurde experimentell bei einem drehzahl- und temperaturgesteuerten Versuch das Reibmoment an der Welle und der Endverschleiß der Dichtlippe gemessen. Der Gleitweg für jeden dieser

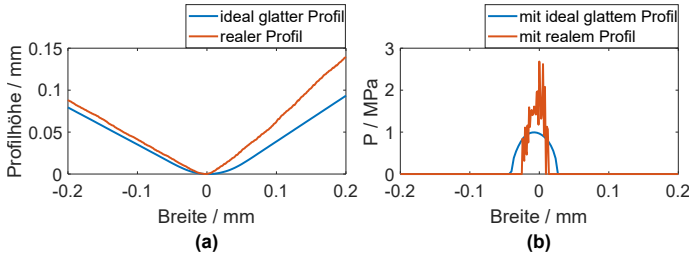
Versuche betrug 5.000 km. Die experimentellen Arbeiten basieren auf Dichtungen nach [DIN3760] A80 x 100 x 10. Die Welle ist aus 16MnCr6. Nach einem ersten Schritt des Schruppdrehens wurden sie auf 60 HRC einsatzgehärtet, mit einer Einsatzhärte tiefe von 0,8 mm und anschließend im Einstechverfahren nach [DIN3760] geschliffen, um eine drallfreie Oberflächenstruktur zu erreichen.

**Tab. 6.2:** Experimentelle ermittelte Eingangsgrößen zur Verschleißsimulation, Radialkraft ohne Feder [FHMS20]

Exp Nr.	Kombination	Radialkraft / N		$e_r$ / (Nmm/mm <sup>3</sup> )	$E_1$ / MPa
		Anfang	Ende		
1	ACM-Mineralöl	19,022	10,68	$5,3445 \times E10$	1,93
2	ACM-PAO	19,022	12,33	$4,9256 \times E10$	1,93
3	FKM-Mineralöl	12,723	9,58	$1,6791 \times E11$	4,42
4	FKM-PAO	12,723	9,27	$1,4806 \times E11$	4,42

In der Tabelle 6.2 werden experimentell ermittelte Eingangsgrößen für die Verschleißsimulation angegeben. Eine weitere wichtige Größe ist der Reibungskoeffizient. Ein geschwindigkeitsabhängiger Reibungskoeffizient wurde verwendet. Dieser wurde aus dem Verhältnis zwischen der experimentellen geschwindigkeitsabhängigen Tangentialkraft und der im Neuzustand zu Beginn des Experiments gemessenen Radialkraft (siehe Tabelle 6.2) ermittelt. Die Verwendung einer konstanten Radialkraft stellte eine Vereinfachung dar. In Wirklichkeit kam es während des Betriebs zu einem Rückgang der Radialkraft aufgrund von Verschleiß und temperaturabhängigen Materialveränderungen.

Im Folgenden werden die Simulationsergebnisse in zwei Abschnitte mit ideal glatter und rauer Dichtlippengeometrie präsentiert. Für die Simulation mit rauem Dichtlippenprofil wurde die reale Profilgeometrie der Dichtlippe an vier verschiedenen Umfangsstellen gemessen und das gemittelte Profil in dem Modell verwendet. Abbildung 6.11 (a) stellt das gemittelte raue Profil für die Dichtlippe aus FKM gegenüber dem ideal glatten Profil aus [FMS14] dar.

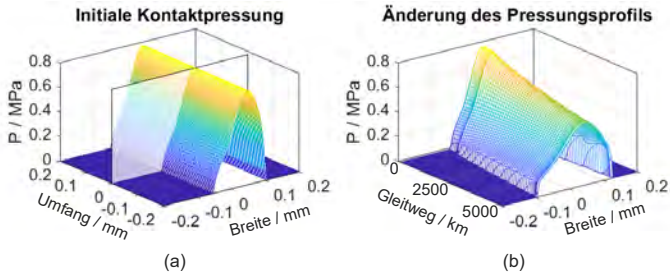


**Abb. 6.11:** (a): Ideal glattes (aus FE-Modell [FMS14]) und gemessenes FKM Dichtlippenprofil und (b): die resultierenden Kontaktpressung

In Abbildung 6.11 (b) werden die berechneten Kontaktpressungen mit idealer und rauer Geometrie gegenübergestellt. Der in Abbildung 6.11 (a) zu sehende Unterschied zwischen dem realen und idealen Dichtlippenprofil führt im Simulationsfall mit dem realen Profil zu deutlich kleinerer Berührbreite. Aus der Rauheit resultieren ebenfalls im Fall mit dem realen Profil, lokal hohe Pressungen.

### 6.2.1 Simulation mit ideal glatter Dichtlippe-Geometrie

In der Abbildung 6.12 (a) wird die Kontaktpressung für die Kombination ACM-Mineralöl im ersten Berechnungsschritt vor der Verschleißinkrementberechnung dargestellt. Die Abbildung 6.12 (b) hingegen zeigt die Kontaktpressungsprofile bei dem ausgewählten Schnitt im 6.12 (b) über dem Gleitweg. Zu Beginn im unverschlissenen Zustand liegt die maximale Kontaktpressung bei 0,77 MPa. Mit zunehmendem Gleitweg und Verschleiß findet eine Abflachung der Dichtlippen Geometrie statt. Dies führt zu einer Ausbreitung der Kontaktpressung und somit zur Abnahme der maximalen Kontaktpressung bis zum Wert 0,507 MPa nach 5.000 km Gleitweg. Die Ausbreitung der Kontaktpressung bringt eine Zunahme der Berührbreite von 0,154 mm auf 0,220 mm mit sich.

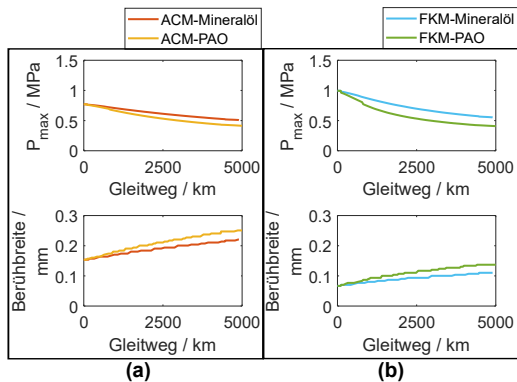


**Abb. 6.12:** Für die Kombination ACM-Minaralöl berechnete (a): initiale Kontaktpressung und (b): die simulierte Pressungsprofilsänderung durch Verschleiß mit zunehmendem Gleitweg

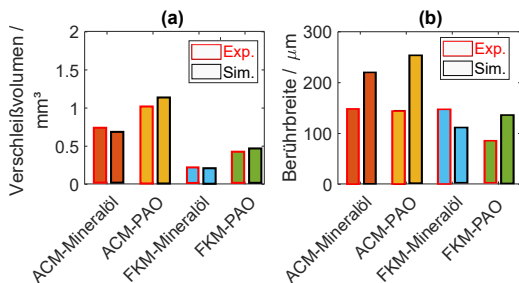
Die simulierte Veränderung der Kontaktpressung und Berührbreite für alle untersuchten Kombinationen wird in der Abbildung 6.13 zusammengefasst.

Es zeigt sich eine Tendenz zu stärkerem Verschleiß (erkennbar an der starken Abnahme des Kontaktdrucks bzw. Zunahme der Kontaktbreite) bei den Kombinationen mit dem Polyalphaolefin Schmiermittel. Dies korreliert mit den gemessenen höheren Reibmomentwerten. Die Ergebnisse der Verschleißsimulation in Abbildung 6.14 (a) zeigen gute Übereinstimmungen mit den experimentell ermittelten Verschleißvolumen für alle Elastomer-Schmierstoff-Kombinationen. Eine genaue Messung der Kontaktbreite ist aufgrund der extrem kleinen Abmessungen sehr schwierig. Dies könnte der Grund für die großen Abweichungen zwischen simulierten und experimentellen Werten in Abbildung 6.14 (b) sein.

Ein wesentlicher Vorteil der eingesetzten semi-analytischen Methode ist die kurze Berechnungszeit. Beispielsweise betragen die Berechnungszeiten für die Simulation der vier Kombinationen mit einem Berechnungsgebiet von  $255 \times 255$  Punkten 371, 658, 318 bzw. 870 Sekunden.



**Abb. 6.13:** Simulierte maximale Kontakt- und Berührungsparameter, Veränderung über den Gleitweg für die Kombinationen mit ACM (a) und FKM (b) Elastomerwerkstoff

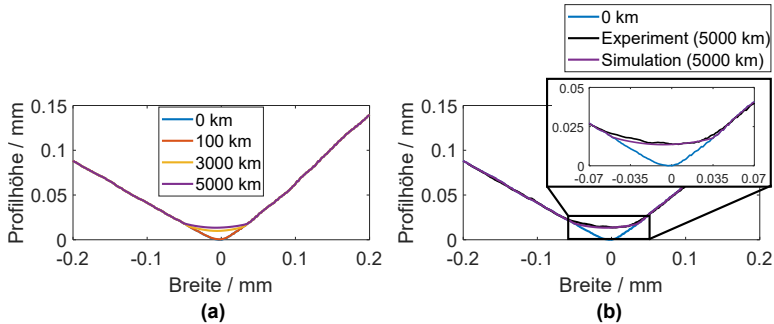


**Abb. 6.14:** Vergleich der experimentellen und simulierten (a) Verschleißvolumen, (b) Kontaktbreite für die untersuchten Kombinationen.

### 6.2.2 Simulation mit rauer (realer) Dichtlippen-Geometrie

Eine wichtige Vergleichsgröße ist die Profiländerung während des Verschleißes. Diese wurde für die Kombination FKM-Mineralöl nach 0 km, 100 km, 3.000 km und 5.000 km Gleitweg wie in Abbildung 6.15 (a) gezeigt, ermittelt. In der Abbildung 6.15 (b) wird das simulierte Dichtlippenprofil mit experimentellen Messungen verglichen. Eine gute Übereinstimmung der experimentellen und simulierten Profile lässt sich feststellen.





**Abb. 6.15:** (a): Simulierte Dichtlippenprofiländerungen nach 0 km, 100 km, 3.000 km und 5.000 km Gleitweg, für die Kombination FKM-Mineralöl. (b): Vergleich zwischen experimentellem und simuliertem Dichtlippenprofil nach 5.000 km Gleitweg

## 6.3 Dichtfähigkeitssimulation

Zur Analyse der Dichtfähigkeit von Radialwellendichtringen wurde das semi-analytische Modell verwendet, um den Montagevorgang der Dichtlippe auf die Welle für verschiedene Dichtlippenverschleißzustände zu simulieren und die Schubspannungen entlang der axialen Richtung im Dichtkontakt zu ermitteln. Es wird die Hypothese aufgestellt, dass die resultierenden Schubspannungen im Dichtkontakt in einer gewissen Weise die treibende Kraft verantwortlich für das Förderverhalten in Axialrichtung bilden, und somit Rückschluss auf die Dichtfähigkeit von RWDR geben können. Aus diesem Grund wurde das Arbeitsintegral der simulierten Schubspannungen gebildet und mit der Dichtfähigkeit korreliert. Diese Methode bietet einen neuen Ansatz zur Analyse des Dichtmechanismus, der auf der Simulation der Energiedifferenz im Dichtungskontakt beruht. Die Änderung des simulierten Arbeitsintegrals wurde mit der experimentell gemessenen Änderung des Rückförderwertes des Dichtungssystems in Beziehung gesetzt. Die Methode und Ergebnisse, in [FBTS22] ausführlich präsentiert, sollen im Folgenden zusammengefasst werden.

### 6.3.1 Dichtmechanismus

Die Dichtfunktion von RWDR beruht im statischen Fall einfach auf dem Anpressdruck der Elastomerdichtlippe an die Gegenauflfläche der Welle, indem kleine Mikrokanäle auf der Welle durch die Verformung des Elastomers geschlossen werden. Im dynamischen Fall hingegen wird der Dichtmechanismus komplexer. Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, dass eine Leckage durch das Vorhandensein einer aktiven Rückströmung des abzudichtenden Mediums verhindert wird [TMS20; Kamm86]. Die Existenz eines solchen

Förderstroms wurde von JAGGER [Jagg57] anhand von experimentellen Untersuchungen nachgewiesen. In seinen Experimenten wurden Reibmomentmessungen an einer trockenen Welle durchgeführt und hohe Reibwerte festgestellt. In den weiteren Versuchsschritten wurde die Welle angehalten und kleine Mengen Öl auf der Luftseite eingespritzt. Als die Welle wieder gedreht wurde, konnte eine Verringerung des Reibmoments festgestellt werden. Diese Verringerung war jedoch nur für kurze Zeit zu beobachten. Er postulierte, dass das gesamte Öl von der Luftseite durch den Dichtkontakt zur Ölseite befördert wurde, woraufhin die Reibungsmomentwerte aufgrund der teilweisen Mangelschmierung wieder anstiegen.

Zur Erklärung des eben beschriebenen Pumpeffekts haben Wissenschaftler verschiedene Hypothesen erarbeitet. Davon haben sich folgende vier durchgesetzt: die Verzerrungshypothese [KaMü86; Kamm86], die Seitenstromhypothese [Kamm86], die Wischkantenhypothese sowie die Hypothese eines nicht-newtonschen Schmierstoffverhaltens [OWV96]. Tatsächlich kann die Beschreibung des Dichtmechanismus wahrscheinlich nur durch eine Kombination der oben genannten Hypothesen erreicht werden. Eine Zusammenfassung der Dichtungsmechanismen findet sich bei BAART et al [BLP09].

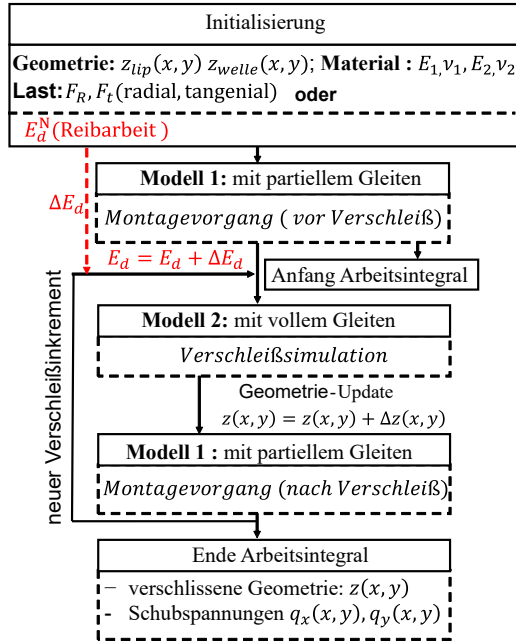
Vom besonderen Interesse für diese Arbeit ist die Verzerrungshypothese, die zunächst im Folgenden kurz erläutert wird. Weiterhin wird die Verknüpfung der Verzerrungshypothese zu der in dieser Arbeit vorgestellten Methode präsentiert.

Bei der von KAMMÜLLER [KaMü86; Kamm86] vorgeschlagenen Verzerrungshypothese wird die Dichtwirkung auf die Verzerrung kleiner mikroskopischer Rauheitsstrukturen, auch SCHALLAMACH-Wellen [Scha58] genannt, zurückgeführt, die sich auf der Dichtkante bilden. Sie sind zunächst axial ausgerichtet. Aufgrund der asymmetrischen Kontaktwinkel zur Ölseite  $\alpha$  und Luftseite  $\beta$  (siehe Abbildung 6.1) herrscht im Dichtkontakt eine asymmetrische Pressungsverteilung (siehe Abb. 6.10)). Entsprechend dieser Pressungsverteilung bauen sich bei der Rotation der Welle Schubspannungen, die eine elastische Verformung der zuvor in axialer Richtung ausgerichteten SCHALLAMACH-Wellen verursachen. Die somit entstandenen schrägen Strukturen begünstigen den Transport des Fluids zur Stelle maximaler Pressung. Aufgrund des höheren Pressungsgradienten zur Ölseite hin stellt sich ein Nettofluss in diese Richtung ein.

### 6.3.2 Simulationsmethode

Der gesamte Simulationsablauf wird in der Abbildung 6.16 dargestellt. Zu Beginn werden die Geometrie, die Materialparameter und die Belastungen in normaler (radialer) und tangentialer (umfangs- und axialer) Richtung initialisiert. Zur Lösung des tangentialen Kontaktproblems wird je nach Kontaktfall (partiell oder volles Gleiten) als Eingangs-

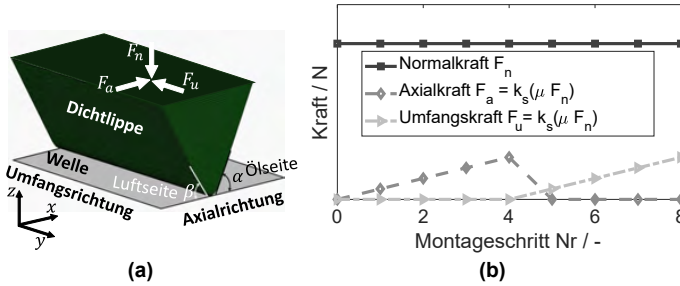
größe entweder eine Reibungskraft oder ein Reibungsenergiewert verwendet. Diese beiden Möglichkeiten führen zur Verwendung von zwei Kontaktmodellen, die im Folgenden beschrieben werden.



**Abb. 6.16:** Gesamter Simulationsablauf für die Analyse der Dichtfähigkeit von RWDR-Dichtsystemen

Im **Kontaktmodell 1** wird der quasi-statische Montagevorgang simuliert. Die Annahme eines quasi-statischen Vorgangs setzt voraus, dass der Vorgang so langsam erfolgt, dass im Dichtkontakt ständig ein partielles Gleiten vorliegt. Der im Abschnitt 3.3 beschriebene Kontaktalgorithmus für reibungsbehaftete Kontaktprobleme mit partiellem Gleiten wird hier angewendet. Der Montagevorgang wird simuliert, indem der Dichtkontakt mit einer konstanten Normalkraft belastet wird. In beiden Tangentialrichtungen wird die axiale Verschiebung und Verdrehung der Dichtlippe durch zwei Tangentialkräfte modelliert, wie in Abb. 6.17 (a) dargestellt. Die Kraftverläufe bei der Simulation des Montagevorgangs sind in Abb. 6.17 (b) dargestellt. Eine für den Berechnungsbereich repräsentative Normalkraft  $F_n$  wird aus der gemessenen Radialkraft  $F_r$  in Tabelle 6.1 ermittelt.

In Axial- und Umfangsrichtung sind die Kräfte nach dem COULOMBSchen Reibungsgesetz definiert. Das COULOMBSche Reibungsgesetz definiert die maximal übertragbare



**Abb. 6.17:** (a): Veranschaulichung der Kontaktsituation bei der Simulation des Montagevorgangs, (b) normalisierter Kräfteverlauf bei der Simulation des Montagevorgangs (axiale Verschiebung vom Schritt 1 bis 4 und Drehung ab Schritt 4)

Reibungskraft  $F_{tmax}$  für ein Kontaktproblem mit dem Reibungskoeffizienten  $\mu_s$  und der Normalkraft  $F_n$  wie folgt:

$$F_{tmax} = \mu_s \cdot F_n \quad (6.10)$$

In Axial- und Umfangsrichtung wird ein Faktor  $k_s$  (0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,9) verwendet, um einen linearen Anstieg der Tangentialkräfte bei jedem Montageschritt von 0 bis 4 (für die axiale Reibungskraft) und von 4 bis 8 (für die Reibungskraft in Umfangsrichtung bei Beginn der Wellendrehung) zu definieren, wie in Abb. 6.17 (b) dargestellt:

$$F_t = k_s \cdot (\mu_s \cdot F_n) \quad (6.11)$$

Ein solcher Faktor wurde in der Arbeit [ChWa08] eingeführt, um das Gleitverhalten bei Punktkontakt zu untersuchen. Die mittels (6.11) im Dichtungskontakt definierte Axialkraft  $F_a$  und Umfangskraft  $F_u$ , sollen einen stetigen Übergang von partiellem zu vollem Gleiten ermöglichen.

Der **Kontaktmodell 2** wird für die Verschleißsimulation an der Dichtlippe verwendet. Während des Verschleißes findet im Gegensatz zu dem in **Kontaktmodell 1** gelösten Montagevorgang ein volles Gleiten im Dichtkontakt statt. Hier erfolgt die Verschleißsimulation mit Hilfe des bereits im Abschnitt 6.2.2 eingesetzten Modells.

Nach der Initialisierung wird im **Kontaktmodell 1** ein erster Montagevorgang mit der unverschlissenen Dichtlippe simuliert. Die dabei ermittelten Schubspannungen werden zur Bestimmung des Anfangsarbeitsintegrals für die Dichtlippe im unverschlissenen Zustand verwendet. In jeder Iteration wird eine Verschleiß- und Montagesimulation nacheinander durchgeführt. Am Ende jeder Verschleißsimulation wird die Geometrie der Dichtlippe aktualisiert. Ein Montagevorgang wird mit der aktuell verschlissenen Dichtlippengeometrie neu simuliert. Aus den Schubspannungen nach dem neuen Montagevorgang wird die

Veränderung des Arbeitsintegrals ermittelt. In der Realität wird der Radialwellendicht-ring nicht, wie in dieser Arbeit simuliert, im verschlissenen Zustand aus- und wieder eingebaut. Dieser gewählte Ansatz basiert auf dem in [FMS14] vorgeschlagenen iterativen Verfahren.

### 6.3.3 Experimentelle Messungen

Für die Simulation des Montagevorgangs und des Verschleißfortschritts werden die Geometriedaten, Materialeigenschaften, Radialkraft und Reibarbeit aus experimentellen Untersuchungen benötigt. Die wichtigsten Eingangsparameter für die Simulation und deren Ermittlung werden im Folgenden beschrieben.

- **Reibmoment- und Verschleißvolumen-Messung**

Die Reibmomentmessung wurde auf einer kürzlich verbesserten Konfiguration eines Mehrwellenprüfstands [BHML21] durchgeführt, die ursprünglich von [FVA 15] vorgestellt wurde. Vier Proben von Welle und Dichtung wurden bei 1.195 U/min über einen Zeitraum von 450 Stunden getestet. Die Ölumpftemperatur wurde während der gesamten Prüfung auf 70°C geregelt. Der Ölstand wurde auf die Mitte der Welle eingestellt. Abbildung 6.18 zeigt die Entwicklung des Reibmoments von vier Proben der gleichen untersuchten FKM-PAO (Elastomer-Schmierstoff) Kombination. Die simulative Untersuchung der Dichtfähigkeit wurde am Beispiel der Zelle 1 durchgeführt. Für die Umsetzung im Modell wird zum Einen die Reibungskraft aus dem gemessenen Reibungsmoment unter Verwendung des Wellenradius ( $r = 40 \text{ mm}$ ) abgeleitet.

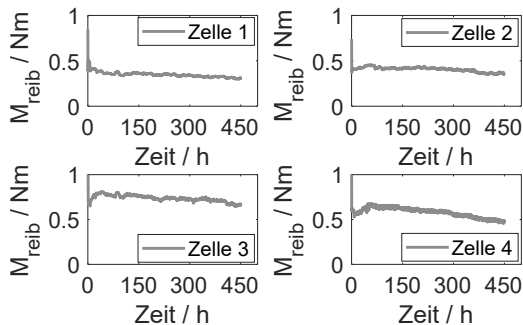
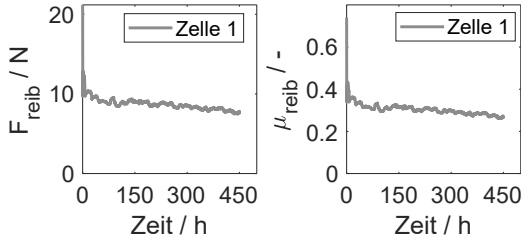


Abb. 6.18: Reibungsmoment über der Zeit, gemessen an vier Testzellen bis zu 450 h

Zum Anderen werden die Gleitreibungskoeffizienten aus dem Verhältnis der Reibungskräfte und der Radialkraft bestimmt (vgl. Abb. 6.19). Die Radialkraft wurde in

der Simulation als konstant angenommen, obwohl im Experiment die durchschnittliche Radialkraft bei 70°C der vier Proben aufgrund von Verschleiß und chemischer Wechselwirkung des Schmierstoffs um 6,42% von 30,01 +/- 0,52 auf 28,09 +/- 0,08 N abnahm.



**Abb. 6.19:** Reibungskraft und Reibungskoeffizient, abgeleitet aus dem Reibungsmoment in der Prüfzelle 1

Der planimetrische Verschleiß der Wellendichtungen wurde durch Profilvergleiche vor und nach dem Versuch charakterisiert [SBKT21]. Aus dem gemessenen Verschleißvolumen und der Reibungsarbeit wurde für die Verschleißsimulation eine Reibungsenergiegedichte  $e_r = 2,2693e+11 \text{ Nmm/mm}^3$  ermittelt.

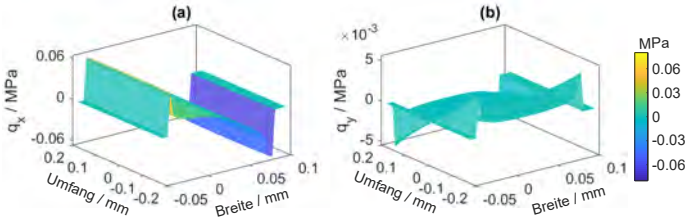
- **Rückförderwertmessung**

Die Messung der Rückförderwerte erfolgte auf einem Prüfstand nach dem Zwei-Kammer-Prinzip von BRITZ [Brit88] mit einer Erweiterung um zwei hochauflösende Drucksensoren zur Beobachtung des hydrostatischen Drucks in beiden Zellen [BPTS20]. Aus dem Abfall des hydrostatischen Drucks während des Betriebs, den geometrischen Eigenschaften des Steigrohrs und der Viskosität des Schmierstoffs kann der Rückförderwert des Dichtsystems bestimmt werden. Die Dichtung wurde nach KAWAHARA und HIRABAYASHI [KaHi79] in umgekehrter Richtung eingebaut. Während des Betriebs wurde die Kammer auf der Luftseite des RWDR-Dichtsystem vollständig mit dem Testschmierstoff gefüllt, während die Ölseite mit einem Ölstand bis zur Mitte der Welle betrieben wurde. Für eine gesamte Testdauer von 450 h bei 1.195 U/min (d.h. 5 m/s) betrug der Gleitweg 8.100 km.

### 6.3.4 Simulationsergebnisse

Bei der Simulation des Montagevorgangs wird die Dichtlippe von der Luft- zur Ölseite bewegt. Zu Beginn des Zusammenbaus bei  $k_s = 0$  sind die tangentialen Kräfte (bei  $\mu_{\text{reib}} = 0,8$  siehe Abb. 6.19) alle gleich Null. Abbildung 6.20 zeigt die in diesem Schritt simulierten Schubspannungskomponenten  $q_x$  (axiale Richtung) und  $q_y$  (Umfangsrichtung).

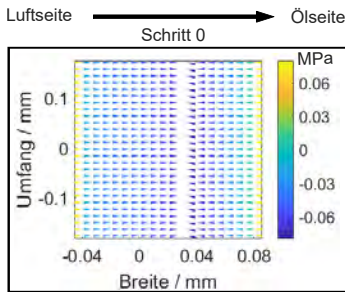
Diese zeichnen sich durch einen starken Gradienten an den beiden Rändern der Kontaktzone, wo das maximale Gleiten auftritt.



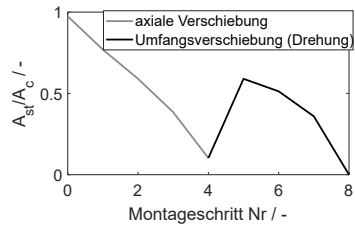
**Abb. 6.20:** Scherspannungskomponenten (a)  $q_x$  (in axialer Richtung) und (b)  $q_y$  (in Umfangsrichtung), simuliert beim Montageschritt 0 ( $k_s = 0$  und  $\mu_{reib} = 0,8$  gemäß Abb. 6.19)

Die Schubspannungskomponenten in jedem Punkt werden als Komponenten eines Vektors betrachtet. Es ergibt sich das in Abbildung 6.21 dargestellte Spannungsfeld. Hier ist zunächst zu erkennen, dass Spannungsvektoren zur Mitte des Kontaktes hin orientiert sind. Außerdem lassen sich aus den Amplituden die maximalen Gleitwege direkt an der ölseitigen Dichtkante erkennen.

Zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen dem Faktor  $k_s$  in (6.11) und dem Übergang von partiellem zu vollem Gleiten dienen die Abbildungen 6.22 und 6.23.



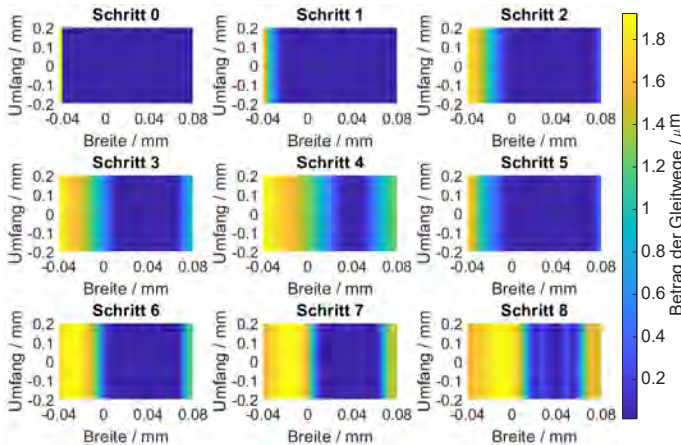
**Abb. 6.21:** Das resultierende Scherspannungsfeld aus den Scherspannungskomponenten in Abb. 6.20



**Abb. 6.22:** Entwicklung des Verhältnisses der Haftzone  $A_{st}$  zur Gesamtkontaktzone  $A_c$  über die simulierten Montageschritte

Abbildung 6.23 zeigt der Betrag der Gleitwege in der Kontaktzone für die simulierten Montageschritte. In der Abbildung 6.22 hingegen wird das Verhältnis der haftenden Kontaktfläche  $A_{st}$  zur gesamten (haftenden und gleitenden) Kontaktfläche  $A_c$  über die jeweiligen Montageschritte gezeigt. Zu Beginn der axialen Bewegung (Schritt 0) liegt auf der gesamten Kontaktflächen eine Haftbedingung vor. Die lässt sich in Abbildung 6.23 durch die sehr kleine Beträge der Gleitwege über die gesamte Kontaktfläche und in Abbildung

6.22 durch das Flächenverhältnis von nahezu 1 feststellen.



**Abb. 6.23:** Simulierte Beträge der Gleitwege in der Kontaktzone für die Montageschritte (Schritt 1-4: axiale Verschiebung jeweils mit  $k_s = 0,2, 0,4, 0,6, 0,9$ ; Schritt 5-8: Umfangverschiebung / Drehung jeweils mit  $k_s = 0,2, 0,4, 0,6, 0,9$ )

Während der axialen Bewegung steigt die axiale Reibkraft mit zunehmendem Koeffizient  $k_s$  (bis 0,9) und damit die Gleitwege. Die Steigerung der Gleitwege und damit auch der Gleitfläche. Am Ende der axialen Bewegung (ab Schritt 5) liegt das Flächenverhältnis bei ca. 0,1. Wie in Abb. 6.22 zu sehen, sorgt die Drehung in Umfangsrichtung zunächst für eine Erhöhung der haftenden Kontaktfläche bis zum Flächenverhältniswert 0,6. Mit steigender Reibkraft in der Umfangsrichtung fällt der haftende Kontaktflächenanteil bis zum Flächenverhältnis von null d.h. komplettes Gleiten der gesamten Kontaktfläche.

Die resultierenden Schubspannungsfelder bei den drei verschiedenen Montageschritten 2 ( $k_s = 0,2$ ), 4 ( $k_s = 0,6$ ) und 8 ( $k_s = 0,9$ ) zusammengefasst in Abb. 6.24 werden im Folgenden beschrieben.

Zu Beginn der axialen Verschiebung (siehe Abb. 6.24 (a)) führt die axiale Tangentialkraft zunächst zu einer Umkehrung der Schubspannungsvektoren an der ölseitigen Dichtkante. Nun sind alle Spannungsvektoren zur Ölseite hin orientiert. Darüber hinaus vergrößert sich die Gleitzone an der luftseitigen Dichtkante. Mit zunehmender Axialkraft im Schritt 4 steigen die Schubspannungen und die Gleitzone an (siehe Abb. 6.24 (b)).

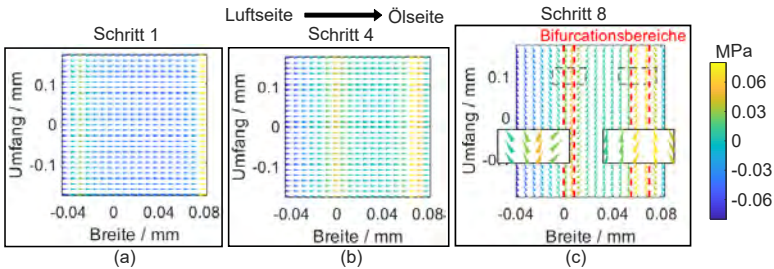
Das Spannungsfeld am Ende des Montagevorgangs in Abb. 6.24 (c) ist von besonderer Bedeutung und wird im Folgenden erläutert. Hier lassen sich anhand der Orientierungen der Schubspannungsvektoren drei Bereiche identifizieren:

- An der luftseitigen Dichtkante (links) werden die Vektoren schräg zur Luftseite



ausgerichtet.

- Im mittleren Bereich der Dichtkante werden die Schubspannungen hauptsächlich zur Ölseite ausgerichtet.
- An der ölseitigen Dichtkante (rechts) werden die Schubspannungen wieder zur Luftseite hin ausgerichtet.



**Abb. 6.24:** Simulierte Schubspannungsfelder (a): zu Beginn der axialen Verschiebung ( $k_s = 0,2$ ), (b): am Ende der axialen Verschiebung ( $k_s = 0,6$ ), (c): am Ende des Montagevorgangs nach der Umfangsverschiebung ( $k_s = 1$ ). Montage von der Luftseite zur Ölseite jeweils links und rechts.

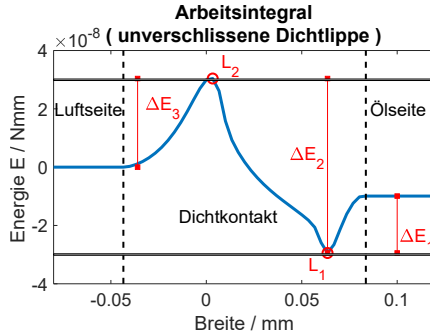
Das Schubspannungsfeld, das eben in drei Bereiche unterteilt wurde, weist noch eine weitere Besonderheit auf. Aus diesem Schubspannungsfeld lassen sich in jedem Umfangsschnitt zwei so genannte Bifurkationsbereiche identifizieren. Der Begriff Bifurkation wurde ursprünglich von HENRI POINCARÉ [LeNi06] eingeführt und wird heute in der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Stabilitätsanalyse von dynamischen Systemen verwendet. Ein Bifurkationspunkt beschreibt einen Schwellenpunkt an dem kleine Schwankungen im System zu plötzlich mehreren möglichen Antworten führen. Im Dichtungssystem findet beim luftseitigen Bifurkationspunkt eine Divergenz des Schubspannungsfeldes statt, entweder zur Öl- oder zur Luftseite hin. Der ölseitige Bifurkationspunkt hingegen zeigt eine Konvergenz des Vektorfeldes.

Für jeden Umfangsabschnitt wird die x-Komponente (in axialer Richtung)  $q_x(x_n)$  der Schubspannung am axialen Punkt  $x_n$  zur Quantifizierung der Dichtfähigkeit verwendet. Die kumulierte Summe:

$$\begin{aligned}
 E(x_n) &= - \sum_{i=1}^n F_{tx}(x_i) \cdot d_x \\
 &= - \sum_{i=1}^n (q_x(x_i) d_x \cdot d_y) \cdot d_x
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

entlang der axialen Richtung wird als Arbeitsintegral definiert und in Abb. 6.25 dargestellt. Dabei sind die zugrundeliegende Schubspannungen mit den experimentell gemessene

nen Reibwerten bestimmt.



**Abb. 6.25:** Simuliertes Arbeitsintegral bei unverschlissener Dichtlippe.

Im Hinblick auf eine mögliche Erklärung des Dichtmechanismus beschreiben die luftseitigen und ölseitigen Bifurkationspunkte eine instabile  $L_2$  bzw. stabile  $L_1$  Position (siehe Abb. 6.25). Das Arbeitsintegral scheint darauf hinzuweisen, dass im Falle einer Strömung jedes Fluidelement in der Nähe des luftseitigen Bifurkationspunktes abrupt entweder nach innen zur Ölseite oder nach außen zur Luftseite gedrückt wird. Im Gegensatz dazu sammeln sich Fluidelemente in der Nähe des ölseitigen Bifurkationspunktes dort und fördern die Aufrechterhaltung eines Schmierfilms, was sich positiv auf die Dichtfunktion auswirkt. Diese Überlegungen beruhen nicht auf einer hydrodynamischen Wirkung im Dichtungskontakt, sondern allein auf dem Arbeitsintegral.

Mit Hilfe dieses Arbeitsintegrals kann der Dichtmechanismus mit einem energetischen Ansatz analysiert werden. Zu diesem Zweck wurden drei verschiedene Bereiche definiert und in Abb. 6.25 markiert. Diese Bereiche befinden sich jeweils außerhalb des Dichtkontakts an der Luftseite, innerhalb des Dichtungskontakts und außerhalb des Dichtungskontakts auf der Ölseite. Damit ein Fluidelement von der Luft- zur Ölseite oder von der Öl- zur Luftseite transportiert werden kann (z.B. bei Leckage), werden zwei energetische Beiträge geleistet:

- Zunächst wird die Strömungsrichtung von der Ölseite zur Luftseite analysiert, die für eine gute Dichtfunktion vermieden werden muss. Aus dem Arbeitsintegral ist ersichtlich, dass ein auf der Ölseite befindliches Fluidelement durch den Energiebetrag  $\Delta E_1$  zunächst leicht in die stabile Position  $L_1$  gesaugt wird. Es wird jedoch eine viel größere Energiemenge  $\Delta E_2$  im Dichtungskontakt benötigt, damit es zur Luftseite gelangen kann. Diese Energiemenge könnte für die Verhinderung von Leckagen im Dichtungssystem verantwortlich gemacht werden.
- In der anderen Strömungsrichtung von der Luft- zur Ölseite ist der Transport ei-

nes Fluidelements aufgrund der geringen erforderlichen Energiemengen  $\Delta E_3$  und  $\Delta E_1$  wesentlich einfacher. Dies könnte in einigen Fällen die Notwendigkeit einer zusätzlichen zweiten Schutzlippe rechtfertigen, um das Eindringen von unerwünschten Partikeln oder Fluiden von der Luftseite zu verhindern.

#### Einflussfaktoren auf das Arbeitsintegral

Das Arbeitsintegral in der Abbildung wurde aus dem simulierten Scherspannungsfeld für eine nicht verschlissene Dichtlippengeometrie abgeleitet. Um das Arbeitsintegral zur Bewertung der Dichtfähigkeit, nämlich durch den Vergleich mit gemessenen Rückförderwerten, verwenden zu können, wurde die Sensitivität des Arbeitsintegrals auf die folgenden drei Einflussfaktoren untersucht:

- Strukturverformung der Dichtungsmembran
- Reibungskoeffizient
- Verschleiß der Dichtlippe

Zu diesem Zweck wurde eine Reihe von verschiedenen Simulationen mit unterschiedlichen Randbedingungen durchgeführt.

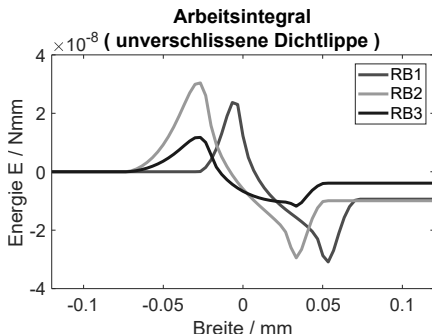
- **Einfluss der Strukturverformung der Dichtungsmembran und des Reibungskoeffizienten**

Die Strukturverformung der Dichtungsmembran (siehe Abb. 6.3) in Form einer Biegung hat einen großen Einfluss auf die Kontaktsituation zwischen der Dichtlippe und der Welle. Ihre Berücksichtigung in der Kontaktsimulation führt, wie bereits durch den Vergleich in Abb. 6.10 gezeigt, zu einer Reduzierung der maximalen Kontaktpressung und einer Vergrößerung der Berührbreite. Darüber hinaus resultiert eine asymmetrische Druckverteilung bei Berücksichtigung der Strukturverformung. Diese asymmetrische Druckverteilung ist eine wesentliche Voraussetzung für eine funktionierende Dichtung.

Der Reibungskoeffizient über das COULOMB'sche Reibungsgesetz Gleichung (6.10) stellt eine lineare Korrelation zwischen der Normalkraft oder Druck und der übertragbaren Reibungskraft oder Scherspannung her. Mit zunehmendem Reibungskoeffizienten steigt die resultierende Scherspannung im Kontakt an, was unter Verwendung von (6.12) indirekt zu einem hohen Arbeitsenergiewert  $\Delta E_2$  führt.

Die eben beschriebenen Einflüsse spiegeln sich in den in Abb. 6.26 dargestellten Ergebnissen wider. In dieser Abbildung wird das bestimmte Arbeitsintegral für die unverschlissene Dichtlippe bei den folgenden drei Randbedingungen (RB) verglichen:

- RB1: ohne Strukturverformung bei  $\mu_{reib} = 0,8$
- RB2: mit Strukturverformung bei  $\mu_{reib} = 0,8$
- RB3: mit Strukturverformung bei  $\mu_{reib} = 0,3$

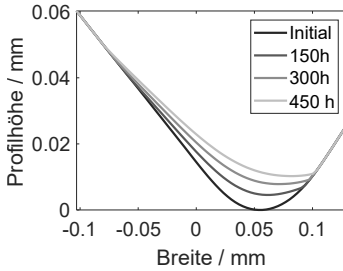


**Abb. 6.26:** Simulierte Arbeitsintegral unter drei verschiedenen Randbedingungen RB1, RB2 und RB3.

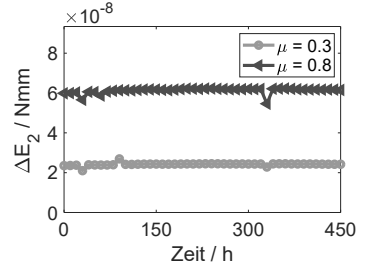
Die Berücksichtigung der Strukturverformung (im Fall von RB2) führt zu einer hohen Kontaktbreite, wie bereits in Abbildung 6.10 (a) gezeigt. Dies führt zu höheren Schubspannungen bei gleichem Reibungskoeffizienten 0,8 (wie in RB1) und damit zu einer Erhöhung des Arbeitsenergiewertes  $\Delta E_2$  um etwa 10 % gegenüber dem Fall mit RB1. Im Berechnungsfall mit RB3 wurde der Reibungskoeffizient im Vergleich zu RB2 von 0,8 auf 0,3 reduziert, wobei die Strukturverformung weiterhin berücksichtigt wurde. Diese Reduzierung des Reibungskoeffizienten führt zu einer Verringerung der Arbeitsenergiewerte um ca. -60% und zeigt somit eine direkte Proportionalität zwischen die Arbeitsenergie und der Reibungskoeffizient.

- **Einfluss des Dichtlippenverschleißes**

Um den Einfluss des Verschleißes der Dichtlippe auf das Arbeitsintegral zu untersuchen, wurde zunächst anhand der in Abbildung 6.18 dargestellten Reibmomentkurve an Zelle 1 und der daraus abgeleiteten Reibkraft und Reibungszahl (siehe Abbildung 6.19) der Verschleiß nach ca. 450 h in 46 Stufen an der Dichtlippe simuliert. Die Abbildung 6.27 zeigt die Ergebnisse des Dichtlippenprofils in vier ausgewählten Verschleißstufen.



**Abb. 6.27:** Simulierte verschlissene Dichtlippenprofile an vier ausgewählten Verschleißstufen.



**Abb. 6.28:** Arbeit  $\Delta E_2$  bei verschiedenen Verschleißzuständen unter konstantem Reibungskoeffizienten.

Für alle 46 verschlissenen Dichtlippengeometrien wurden die Montagevorgänge simuliert und die Arbeitsintegrale ermittelt. Alle simulierten Montagevorgänge wurden mit dem gleichen Reibungskoeffizienten durchgeführt, um den Einfluss des Reibungskoeffizienten von dem des Verschleißes zu trennen.

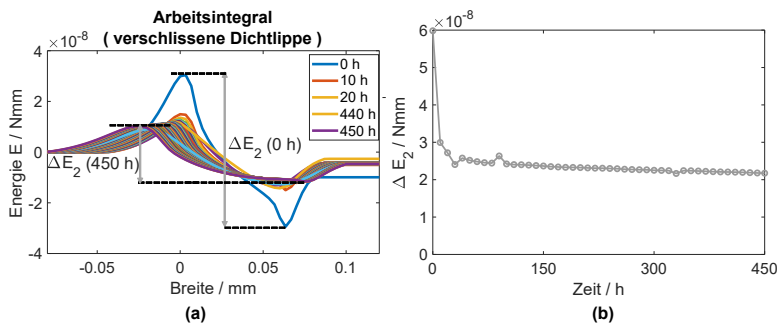
Abbildung 6.28 zeigt die aus den Arbeitsintegralen ermittelten Energiewerte  $\Delta E_2$  für die zwei Reibungskoeffizienten 0,3 und 0,8 über die 46 simulierten Verschleißschritte (450 h). Die Ergebnisse in Abb. 6.28 zeigen quasi-konstante Arbeitsenergiewerte über alle Verschleißschritte bei der Annahme konstanter Reibungskoeffizienten. Der Mittelwert der Arbeitsenergiewerte für die Reibungskoeffizienten 0,3 und 0,8 (jeweils minimaler und maximaler Wert der Verlauf in Abbildung 6.19) beträgt jeweils  $2,420\text{E-}08$  bzw.  $6,130\text{E-}08$  Nmm. Dieser relativ große Unterschied zeigt, dass der Reibungskoeffizient einen größeren Einfluss auf die Arbeitsenergiewerte hat als der Verschleiß.

### 6.3.5 Experimentelle Validierung

Die abgeleitete Energie  $\Delta E_2$  wurde mit funktionalen experimentellen Werten der Dichtungssysteme in Beziehung gesetzt. Da die Arbeitsenergie die das Energieniveau darstellt, das ein Fluid überwinden muss, um von der Öl- zur Luftseite transportiert zu werden, wurde der Rückförderwert gewählt, um die Simulationsergebnisse zu validieren. Der Rückförderwert wurde normalisiert, da sowohl die Arbeitsenergie als auch der Förderwert unterschiedliche Einheiten haben. Die Normierung erfolgt, indem der jeweilige Wert ins Verhältnis zum Maximalwert der Verlauf gesetzt wird (hier am Anfang zum Zeitpunkt 0). Um einen praktischen Vergleich zu ermöglichen, wurden die Einflüsse der Strukturverformung der Dichtlippe, des Dichtlippenverschleißes und der Abnahme der Reibungskoeffi-

zienten (Abb. 6.19) bei der Simulation der Arbeitsenergiewerte berücksichtigt.

Die Arbeitsintegrale wurden für alle 46 simulierten verschlissenen Dichtlippengeometrien ermittelt. Dabei wird für die Simulation des Montageprozesses für jede verschlissene Geometrie der Reibungskoeffizient aus Abb. 6.19 verwendet, der dem jeweiligen Verschleißschritt zugeordnet ist.

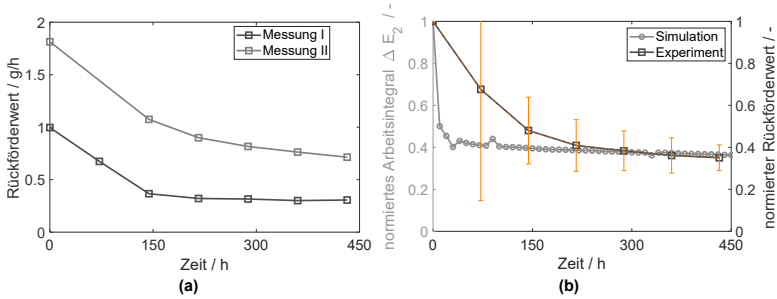


**Abb. 6.29:** (a) Simuliertes Arbeitsintegral bei verschiedenen Verschleißzuständen und Reibungskoeffizienten (gemäß Abb. 6.19), (b) Arbeitsenergiewert  $\Delta E_2$  bei verschiedenen Verschleißzuständen und Reibungskoeffizienten (gemäß Abb. 6.19)

Abbildung 6.29 (a) zeigt die Entwicklung aller simulierten Arbeitsintegrale bei den jeweiligen Verschleißschritten. Abbildung 6.29 (b) fasst die Entwicklung der  $\Delta E_2$ -Werte zusammen, die aus allen Einzelfunktionen in Abb. 6.29 (a) gewonnen wurden. Das höchste Absinken zu Beginn in Abb. 6.29 (b) ist auf die Änderung der Reibungskoeffizienten zurückzuführen (siehe Abb. 6.19). Die Kurve in Abb. 6.29 (b) wird mit dem Anfangswert normalisiert ( $\Delta E_2$  bei 0 h, vgl. Abb. 6.30 (b)). Diese Werte werden mit dem ebenfalls normierten gemessenen Rückförderwert verglichen.

Diese experimentellen Daten in Abb. 6.30 (a) basieren auf Messungen an zwei Dichtungen der gleichen Kombination und zeigen den Mittelwert und deren Standardabweichung.

In Abb. 6.30 (b) fällt  $\Delta E_2$  zu Beginn, bis etwa 150 Stunden der Gesamtdauer, steil auf ca. 40% des Anfangswerts ab. Die Rückförderwerte zeigen eine exponentielle Abnahme vom Anfangswert bis auf 40 % des Maximalwerts, wo die Werte ein Gleichgewicht zu finden scheinen und weiterer Verschleiß den Rückförderwert nicht wesentlich beeinflusst. Aufgrund des Unterschieds zwischen dem Einlaufprozess im Rückförderwertversuch und der Reibungsmomentmessung (die als Input für die Simulation verwendet wurde) gibt es eine relativ große Diskrepanz zwischen der Abnahmerate der experimentellen und der simulierten Ergebniskurve. Nach Abschluss des Einlaufvorgangs stimmen das Endniveau



**Abb. 6.30:** (a) Experimentell ermittelte Rückförderwerte über der Versuchsdauer von 450 h, (b) Entwicklung der normierten simulierten Arbeitsenergiewerte  $\Delta E_2$  und der ebenfalls normierten gemessenen Rückförderwerte über der Versuchsdauer von 450 h

und die Entwicklung von  $\Delta E_2$  und der Rückförderwert gut überein. Eine Reibmomentmessung direkt auf dem speziellen Prüfstand für die Rückförderwertmessung kann nicht durchgeführt werden. Daher wurde für die Simulation das Reibmoment aus einem anderen Testlauf auf einem Reibmomentprüfstand ermittelt. Bei der Förderwertmessung ergibt sich durch die Leckage ein besserer Schmierzustand als bei der Reibmomentmessung. Dies führt zu einem langsameren Verschleiß, insbesondere beim Einlauf, und könnte ein Grund für die Abweichungen zwischen Simulation (basierend auf die Reibmomentmessungen) und Experimente (basierend auf Rückförderwertmessungen) sein.

### 6.3.6 Zusammenfassung und Ausblick

Das semi-analytische Kontaktmodell wurde verwendet, um die Beziehung zwischen der Schubspannungsverteilung im Dichtungskontakt und der Dichtfähigkeit zu bestätigen. Das simulierte Schubspannungsfeld am Ende des Montageprozesses zeigte zwei Diskontinuitäten, aus denen ein stabiler  $L_1$  und ein instabiler  $L_2$  Bifurkationspunkt abgeleitet werden konnten. Ein Konvergenzvektorfeld findet sich am dem stabilen Lage  $L_1$ . Dies könnte darauf hindeuten, dass die Berührbreite im Dichtkontakt zwar 100 - 150  $\mu\text{m}$  beträgt, die eigentliche Dichtungsfunktion jedoch aber auf einen kleineren Bereich innerhalb des Kontakts beschränkt erfolgt (in der Nähe der stabilen Lage  $L_1$ ).

Ausgehend von dieser Beobachtung wurde eine Arbeitsintegral Gleichung (6.12) für den Dichtungskontakt abgeleitet, aus dem sich drei charakteristische Arbeitsenergien  $\Delta E_3, \Delta E_1, \Delta E_2$  auf der Luftseite, der Ölseite bzw. innerhalb des Dichtungskontakts ergeben. Um den Schmierstoff von der Öl- auf die Luftseite zu transportieren, muss die Arbeitsenergie  $\Delta E_2$  überwunden werden. Wenn die Arbeitsenergie  $\Delta E_2$  von der Flüssigkeit überwunden wird, findet eine Leckage statt. Das Arbeitsintegral im Dicht-

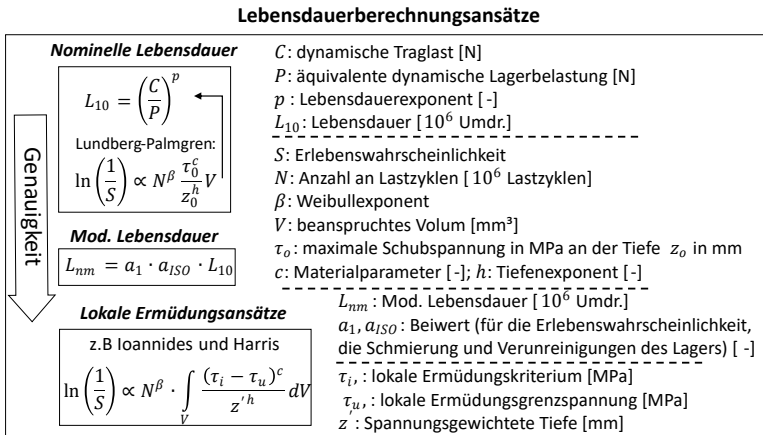
kontakt nimmt mit zunehmendem Verschleiß und abnehmender Reibung ab. Dies bedeutet, dass eine Leckage am Ende der Lebensdauer wahrscheinlicher wird. Dies wird durch die experimentelle Ermittlung der Rückförderwerte bestätigt. Der Vergleich mit Langzeit-Rückförderwertemessungen zeigt ein ähnliches Abnahmeverhalten zwischen den Arbeitsintegralen und den Rückförderwerten. Die Unterschiede zwischen den beiden Ergebnissen lassen sich durch leicht unterschiedliche Bedingungen bei der Rückförderwertemessung und der als Simulationsinput verwendeten Reibungsmessung erklären. Wenn der Rückförderwert abnimmt, kann weniger Flüssigkeit aktiv von der Luft auf die Ölseite zurücktransportiert werden.

Die aktuelle Studie über die Dichtfähigkeit konzentrierte sich auf die makroskopische ideale Geometrie. Die Elastohydrodynamik wurde in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Weitere spezifische Untersuchungen werden sich mit diesen beiden Einflussgrößen befassen. Ein Aspekt der semi-analytischen Verschleißsimulation, der in dieser Arbeit nicht berücksichtigt wurde, aber dennoch interessant ist, ist die Bestimmung einer optimalen Geometrie, unter der der Verschleiß minimiert wird, wie in der Arbeit [GNJ06] gezeigt. Daher soll in zukünftigen Arbeiten auch die Möglichkeit der Nutzung dieses Modells für eine verschleißoptimierte Dichtlippengeometrieauslegung untersucht werden.



## 7 Anwendung in der Wälzlagerberechnung

Wälzlager haben als Maschinenelemente die Grundfunktion, eine reibungsarme rotatorische Bewegung der Achsen oder Wellen auf der sie montiert sind, sicherzustellen. Dabei müssen die auf die Welle oder Achse durch andere Maschinenelemente wie bzw. Zahnräder eingeleiteten Kräfte abgestützt und an das Gehäuse übertragen werden. Eine Überlastung einer der Wälzlagerkomponenten kann im Betrieb zum Ausfall des gesamten Systems führen. Die Berechnung der Ermüdungslebensdauer ist in der DIN ISO 281 genormt [DIN26281]. Dort sind mehrere Lebensdauerberechnungsformeln mit variierendem Detaillierungsgrad beschrieben. In der Abbildung 7.1 sind die verschiedenen Lebensdauerberechnungsansätze nach der Genauigkeit klassifiziert.



**Abb. 7.1:** Beispielsweise Aufteilung der verschiedenen Lebensdauerberechnungsansätze nach der Genauigkeit klassifiziert.

Zuerst die nominelle Lebensdauer  $L_{10}$  für Lager unter üblichen Bedingungen. Diese Gleichung basiert auf der in Abbildung 7.1 angegebenen LUNDBERG-PALMGREN Gleichung [LuPa49]. Mithilfe der LUNDBERG-PALMGREN Beziehung wird die Wahrscheinlichkeit  $S$  bestimmt, mit der einem beanspruchten Volum  $V$  eine bestimmte Anzahl an Lastwechseln  $N$  erlebt bis einer Ermüdungsrisse unter der Oberfläche zur Oberfläche durchtritt. Die aus dem Jahr 1947 entstandene Wälzermüdungstheorie von LUNDBERG-PALMGREN hat folgende Grundeinschränkungen [SJSR09]:

- Annahme einer Rissinitiierung unterhalb der Oberfläche

- Kein Schmierstoff vorhanden
- Oberflächen als ideal glatt angenommen

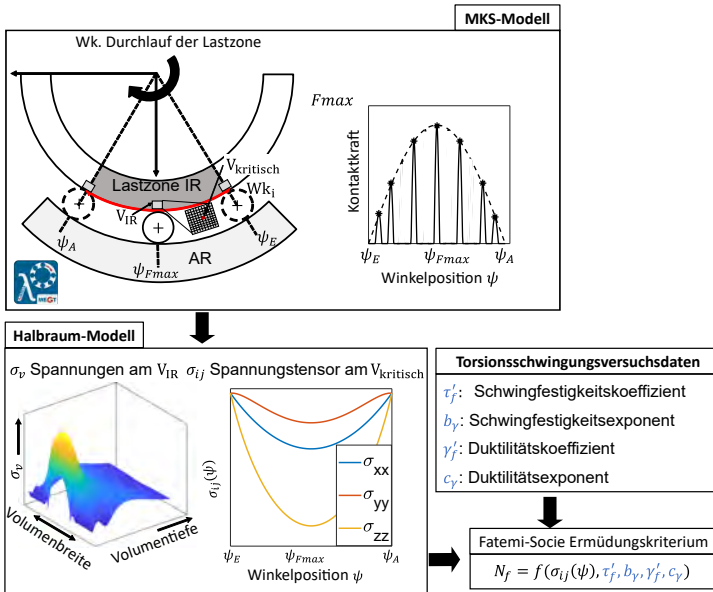
Die Gleichung der nominellen Lebensdauer  $L_{10}$  wurde im Jahr 1962 in die ISO-Norm aufgenommen. Zur Erweiterung der nominellen Lebensdauer Gleichung (siehe Abb. 7.1) wurde im Jahr 1977 die modifizierte Lebensdauer Gleichung  $L_{nm}$  (siehe Abb. 7.1) eingeführt. Hier wird durch die Beiwerte  $a_1$  jeweils die Erlebenswahrscheinlichkeit, und  $a_{ISO}$  die Werkstoffeigenschaften (z.B. Reinheit) und Schmierungsbedingungen berücksichtigt. Studien zu den häufigsten Ausfallursachen in modernen Lagern bringen neue Erkenntnisse. Ermüdungsausfälle gehen häufiger von der Laufbahnoberfläche aus als von Rissen unterhalb der Oberfläche (wie im LUNDBERG-PALMGREN Modell angenommen wird). Dementsprechend stehen Oberflächengüte und Verunreinigungen der Lager stärker im Mittelpunkt. In vielen Fällen zeigen moderne Wälzlagerstähle auch eine Ermüdungsgrenzbelastung auf. Aufgrund dieser Betrachtungen sind verbesserte Gleichungen für die Lebensdauer entstanden.

Aktuelle Lebensdauerberechnungsmodelle basieren auf lokalen Ermüdungsansätzen. Ein Beispiel solcher Modelle ist das IOANNIDES und HARRIS Modell [IoHa85] (siehe Abb. 7.1). Hier wird im Vergleich zum LUNDBERG-PALMGREN Modell das beanspruchte Volumen  $V$  diskretisiert und eine lokale Ermüdungsgrenzspannung eingeführt. Entscheidend für das Ermüden sind nur Volumenelemente in denen die örtliche Beanspruchung (lokale Ermüdungskriterium  $\tau_i$ ) die örtliche Beanspruchbarkeit (lokale Ermüdungsgrenzspannung  $\tau_u$ ) überschreitet. Ein wesentlicher Vorteil der auf lokalen Ermüdungsansätze basierten Lebensdauermodelle ist die Berücksichtigung beanspruchungsrelevanter Einflüsse, wie z.B. Oberflächenrauheit, Schmutzpartikel oder Eigenspannungen, über die dadurch verursachten lokalen Spannungen im Lebensdauermodell.

Ein Multiskalen Ansatz wird in dieser Arbeit zur Lebensdauerabschätzung von Wälzlagern entwickelt und auf Zylinderrollenlager angewendet. Im Fokus wird die Innenringlaufbahn untersucht. Aus einer Systemmodellierung auf der Makroebene mit Hilfe eines Mehrkörpersimulation (MKS)-Modells werden die im Wälzkontakt wirkenden Kräfte bestimmt. Die mikroskaligen Kontaktsimulationen erfolgen in einem Halbraum-Kontaktmodell. Dort werden die Spannungen auf dem Innenring unter Berücksichtigung der Plastizität bestimmt und in den lokalen Ermüdungsansatz nach FATEMI-SOCIE zur Lebensdauerabschätzung eingesetzt. Das entwickelte Modell wurde im Rahmen der Projekte FVA 866 I (Einfluss kurzfristiger Überlasten auf die Lebensdauer von Wälzlagern), und T05N (Einfluss der Oberflächenmorphologie auf die Wälzlagerlebensdauer unter Mischreibungsbedingungen) des SFB-926 jeweils auf die Zylinderrollenlager der Typen NU1006 und NU208 angewendet.

### 7.1 Modellierungsansatz

Die Modellierungsstrategie basiert auf zwei Simulationsebenen wie in Abb. 7.2 schematisch dargestellt. In der ersten Ebene wird die Belastungssituation in einem mit dem Tool LaMBDA (steht für LagerMehrkörperBerechnung und DynamikAnalyse) aufgebauten Einzellagermodell ermittelt. LaMBDA ist dabei kein Stand-alone Tool, sondern ein Plugin für kommerzielle MKS-Software Simpack, welches im Wesentlichen aus einer benutzerfreundlichen Bedienoberfläche zur Modellierung sowie den notwendigen hochwertigen Kontaktmodellen besteht. Hier werden verschiedene Einflussgrößen (z.B Wälzkörper- und Laufbahnprofilierung) mittels eigenentwickelter Berechnungsroutinen [Aul14; Dahi17; KMS17] berücksichtigt.



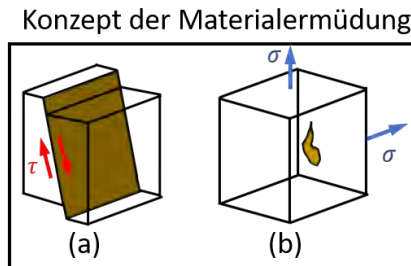
**Abb. 7.2:** Schematische Darstellung des gesamten Modellierungsansatzes basierend auf zwei Kontaktmodellen: MKS-Modell, in der die Wälzkörperbelastungen vom Einlauf in die Lastzone (bei der Winkelposition  $\psi_E$ ) bis zum Auslauf (bei der Winkelposition  $\psi_A$ ) ermittelt werden, Halbraum-Modell, in der die im Innenring (IR) resultierenden Spannungen (X:axiale Richtung, Y: Umfangsrichtung, Z:Tiefenrichtung) berechnet werden und als Eingang zur Lebensdauerabschätzung in das FATEMI-SOCIE Modell dienen.

Im Halbraum-Modell wird der Einzelkontakt zwischen Wälzkörper ( $W_{ki}$ ) und dem dar-

unter stehenden Innenring Volumenbereich  $V_{IR}$  auf der Mikroskala gelöst. Hier werden einzelne statische Kontaktanalysen durchgeführt und somit die maximale Kontaktkraft im Kontakt WK/IR über der Winkelposition berücksichtigt. Der in Abbildung 7.2 dargestellte Kraftverlauf (gestrichelte Linie) stellt eine Vereinfachung dar. In der Realität erfährt ein Volumenelement am IR während des Durchlaufs der Lastzone kurzzeitige Lastspitzen (Peaks mit \* gekennzeichnet). Die verwendete Vereinfachung ist somit eine Worst Case Abschätzung. Beide Kontaktpartner werden zuerst diskretisiert. Zu jeder winkelpositionsabhängigen Normalkraft wird die äquivalente Vergleichsspannung  $\sigma_v$  nach Tresca in jedem diskretisierten Volumenelement gebildet. Das Volumenelement mit der maximalen Vergleichsspannung bei der höchsten Belastung  $F_{max}$  (bei der Winkelposition  $\psi_{Fmax}$ ) wird als kritisches Volumenelement  $V_{kritisch}$  definiert. Die winkelpositionsabhängige Komponente des Spannungstensors am kritischen Volumenelement wird zum Schluss in das multiaxiale Ermüdungskriterium nach FATEMI-SOCIE eingesetzt um eine kritische Lastspielzyklenanzahl  $N_f$  zu ermitteln.

## 7.2 FATEMI–SOCIE Ermüdungsansatz

Das eingesetzte FATEMI–SOCIE Ermüdungsmodell kommt aus der Bruchmechanik und basiert auf der Beobachtung, dass bei vielen Metallen eine Rissinitiierung an einem kritischen Volumenelement in der kritischen Ebene mit maximaler Scherdehnung stattfindet, und die Normalspannung senkrecht zu dieser Ebene den Ermüdungsprozess beschleunigt [Fesi12] (siehe Abb. 7.3).



**Abb. 7.3:** Schematische Darstellung der zwei im FATEMI-SOCIE Modell berücksichtigten Grundkonzepten der Materialermüdung, a) Initiierung der Gleitbänder (auch Orte der Mikroriss Initiierung) durch die Schubspannung  $\tau$ , b) Mikroriss Aufweitung durch die Normalspannung  $\sigma$

Das FATEMI–SOCIE Modell wird durch folgende Beziehung beschrieben [SJS19]:

$$\gamma_{a,eq} := \gamma_{max} \left( 1 + k_e \frac{\sigma_{n,max}}{\sigma_F} \right) = \frac{\tau_f}{G} (2N_f)^{b_y} + \gamma_f (2N_f)^{c_y} \quad (7.1)$$

Die linke Seite der Gleichung (7.1), häufig auch Schadensparameter  $SP$  genannt [YZLL17] beschreibt die Beanspruchung durch eine äquivalente Scherdehnungsamplitude  $\gamma_{a,eq}$ . Die rechte Seite hingegen gibt in Abhängigkeit von Materialparametern aus zyklischen Torsionsschwingungsversuchen die Werkstoffbeanspruchbarkeit an. In der Tabelle 7.1 werden die aus dem Halbraum-Kontaktmodell bestimmten Eingangsparameter, die experimentell zu ermittelten Materialparameter und die gesuchte Zielgröße in der FATEMI–SOCIE Gleichung (7.1) zusammengefasst.

**Tab. 7.1:** Zusammenfassung der Eingangsparameter, Materialparameter und Zielgröße des FATEMI–SOCIE Ermüdungsmodells

Eingangsparameter (aus Halbraum-Modell)	Materialparameter (aus Experiment)	Zielgröße
$\gamma_{max}$ : max. Scherdehnungsamplitude	$k_e$ : Normalspannungskoeffizient	$N_f$ : krit. Lastzyklenanzahl
$\sigma_{nmax}$ : max. Normalspannung	$\sigma_F$ : Materialfließspannung	
	$\tau_f$ : Schwingfestigkeitskoeffizient	
	$G$ : Schubmodul	
	$b_y$ : Schwingfestigkeitsexponent	
	$\gamma_f$ : Duktilitätskoeffizient	
	$c_y$ : Duktilitätsexponent	

Die einachsigen zyklischen Materialparameter sind für die meisten Wälzlagerstähle in der Standardliteratur z.B. [BoSe87] zu finden. Allerdings sind die hier angegebenen Werte für Werkstoffe mit einer kleinen Anzahl von ertragbaren Schwingspielzahlen gültig. Eine aktuelle Methode zur Abschätzung zyklischer Werkstoffkennwerte für die Werkstoffgruppen Stahl, Stahlguss und Aluminiumlegierungen ist in [WäEs18a; WäEs18b] vorgeschlagen. Die FKM-Methode basiert auf einer großen Datenbasis mit quasi-statischen und dehnungsgeregelten Versuchsergebnissen und benötigt als Eingabewert lediglich die Zugfestigkeit  $R_m$ . Die Ergebnisse der FKM-Methode werden in der Tabelle 7.2 zusammengefasst.

**Tab. 7.2:** Einachsige zyklische Werkstoffkennwerte für die Werkstoffgruppe Stahl nach der FKM-Methode [WäEs18b] in Abhängigkeit der Zugfestigkeit

Parameter	Wert
$\sigma_f$	$3,1148 \left( \frac{R_m}{\text{MPa}} \right)^{0,897}$
$b$	-0.097
$\varepsilon_f$	$\min \left( 0,338; 1033 \left( \frac{R_m}{\text{MPa}} \right)^{-1,235} \right)$
$c$	-0,52
Gültigkeitsbereich	$R_m = 121 \dots 2296 \text{ MPa}$

Eine Ableitung der benötigten mehrachsigen zyklischen Materialparameter ( $\tau_f$ ,  $b_y$  und  $c_y$ ) in (7.1) aus den einachsigen Größen in der Tabelle Tabelle 7.2 kann wie in [ZLPZ18] beschrieben, mittels folgender Zusammenhänge erfolgen:

$$\begin{cases} \tau_f \approx \frac{\sigma_f}{\sqrt{3}} \\ \gamma_f \approx \sqrt{3} \varepsilon_f \\ b_y \approx b \\ c_y \approx c \end{cases} \quad (7.2)$$

In der Tabelle 7.3 sind die in der Arbeit für 100Cr6 (bei 60 HRC und  $R_m = 2016 \text{ MPa}$ ) eingesetzten Werte zusammengefasst. In zukünftigen Arbeiten können diese Materialparameter experimentell durch die Bestimmung aus den BASQUIN- und MANSON-COFFIN-Parametern bestimmt werden.

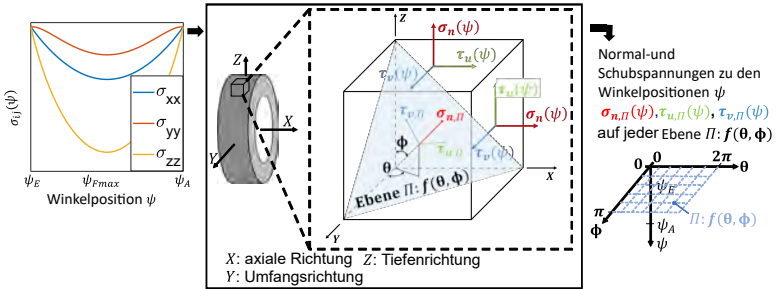
**Tab. 7.3:** Materialparameter für die Lebensdauerberechnung nach FATEMI-SOCIE [WäEs18b]

Parameter	$\sigma_F / \text{MPa}$	$\tau_f / \text{MPa}$	$G / \text{MPa}$	$\gamma_f / -$	$b_y / -$	$c_y / -$
Wert	1953	1656	80769	0,148	-0,097	-0,52

Die äquivalente Scherdehnungsamplitude im FATEMI-SOCIE Modell auch Schadensparameter genannt, beschreibt die Beanspruchung durch die zwei Größen der maximalen Scherdehnungsamplitude  $\gamma_{max}$  und maximalen Normalspannung  $\sigma_{n,max}$  senkrecht zur kritischen Ebene. Im Folgenden soll zuerst im Abschnitt 7.2.1 auf die Bestimmung der maximalen Scherdehnungsamplitude eingegangen werden, anschließend wird in 7.2.2 für das allgemeine Wälzkontaktproblem die Berücksichtigung der Normalspannungen im FATEMI-SOCIE Modell vorgestellt.

### 7.2.1 Bestimmung der maximalen Scherdehnungsamplitude im Fatemi-Socie Modell

Der Ausgangspunkt ist die Spannungskomponente  $\sigma_{ij}$  zu den jeweiligen Winkelpositionen am ausgewählten kritischen Volumenelement, wie in Abb. 7.4 gezeigt. Als kritisches Volumenelement wurde für den Wälzlager-Kontakt das Volumenelement mit der maximalen Schubspannung gewählt.



**Abb. 7.4:** links: Spannungskomponente am kritischen Volumenelement für die jeweilige Winkelposition, Mitte: Bestimmung der Normal- und Schubspannungen auf beliebiger Ebene II des kritischen Volumenelements, rechts: Ergebnis als Eingangsgrößen zur Ermittlung der Schubspannungsvektoren

Zur Bestimmung der kritischen Ebene soll zuerst mit Hilfe einer Winkeldiskretisierung  $f(\theta, \phi)$  ( $\theta = 0 : \dots 2\pi$ ;  $\phi = 0 : \dots \pi$ ) und der Beziehungen (7.3), der Normalenvektor  $\vec{n}_{II}$  und die Tangentialvektoren  $\vec{v}_{II}$ ,  $\vec{u}_{II}$ , an einer beliebigen Ebene II am kritischen Volumenelement bestimmt werden [Soci00].

$$\vec{n}_{II} = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}; \vec{v}_{II} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix}; \vec{u}_{II} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (7.3)$$

Mit Hilfe dieser Vektoren (7.3) werden die Normalspannung  $\sigma_{n,II}(\phi)$  und Schubspannungen  $\tau_{u,II}(\phi)$ ,  $\tau_{v,II}(\phi)$  auf der jeweiligen Ebene II ermittelt. Für jede Ebene werden die winkelpositionsabhängigen Schubspannungsvektoren bestimmt, und der Radius des kleinsten umschließenden Kreises als maximale Schubspannungsamplitude  $\Delta\tau_{max}/2$  bestimmt.

Als kritische Ebene II wird diejenige mit der größten maximalen Schubspannungsamplitude gewählt. Die gesuchte maximale Scherdehnungsamplitude  $\gamma_{max}$  in (7.1) wird aus der maximalen Schubspannungsamplitude  $\Delta\tau_{max}/2$  und dem Schubmodul  $G$  bestimmt:

$$\gamma_{max} = \frac{\Delta\tau_{max,II}}{2G} \quad (7.4)$$

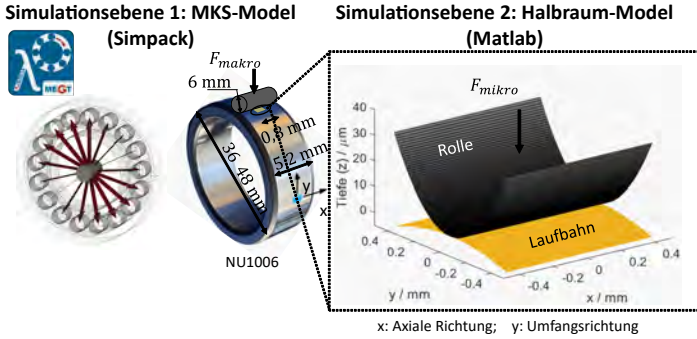
### 7.2.2 Maximale Normalspannung im Fatemi-Socie Modell beim Wälzkontaktproblem

Im Gegensatz zur maximalen Scherdehnungsamplitude gibt es in der Literatur [SJS19] Unklarheit über die Bestimmung der max. Normalspannung  $\sigma_{(n,max)}$  im FATEMI-SOCIE Modell (7.1). Im allgemeinen komplexen multiaxialen Beanspruchungsfall wird die max. Normalspannung senkrecht zur kritischen Ebene eingesetzt. Als Normalspannung soll für Wälzkontaktprobleme, wie die Ergebnisse der Arbeit [SJS19] bestätigen, die maximale Drucknormalspannung  $\sigma_{DN,max}$  (im Betrag mit negativem Vorzeichen) auf der kritischen Ebene zum Einsatz kommen. Dabei soll die plastische Eigenspannung berücksichtigt werden. Die Berücksichtigung der Plastizität sorgt im Vergleich zur linear elastischen Berechnung zu einer Minderung der maximalen Kontaktpressungswerte und somit auch zu geringen Drucknormalspannungen.

### 7.3 Ergebnisse im Projekt FVA 866 I

In diesem Projekt wurden Zylinderrollenlager der Typs NU1006 bei drei Lastfällen 3,8 GPa, 3,5 GPa und 2,5 GPa im Kontakt WK-IR untersucht. Die Abbildung 7.5 veranschaulicht den Kontakt Wälzkörper-Innenring; (links) im MKS-Modell und (rechts) reduziert im Halbraum-Modell. Das Halbraum-Modell zeichnet sich durch eine Definition der Geometrie und Belastung auf der Mikroskala aus. Im Halbraum-Modell wurde, um die Rechenzeit zu sparen, nur der nahezu ideal zylindrische Teil des Wälzkörpers abgebildet. In der Realität weist dieser eine Profilierung an ihr Rändern auf. Diese hat die Funktion erhöhte Kantenpressungen zu vermeiden und trägt somit zu einer längeren Lebensdauer bei. In der Tabelle 7.4 werden die geometrischen und die auftretenden Belastungen zusammengefasst.

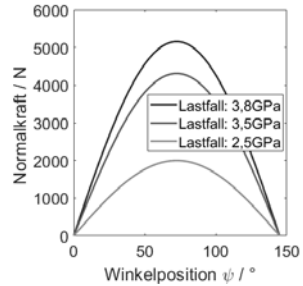




**Abb. 7.5:** Veranschaulichung der in den zwei Simulationsebenen verwendeten Kontaktmodelle, makroskaliges MKS-Modell (links) und geometrische Eingangsgrößen des mikroskaligen Halbraum-Modells (rechts)

**Tab. 7.4:** Geometrische und Belastungsgrößen des MKS- und Halbraum-Modells Zylinderrollenlager des Typ NU1006

Makro-Größen		Mikro-Größen	
$D_{Wk}$ / mm	6	$L_x$ / mm	0,8
$D_{IR}$ / mm	36,4	$L_y$ / mm	0,8
$L_{eff}$ / mm	4,8		
$N_{Wk}$ / -	17		
$C_{radial}$ / $\mu\text{m}$	32.5		
$n_{IR}$ / Umdr./min	3000		
$n_K$ / Umdr./min	1260		
3,8 GPa: $F_{makro}$ / N	5162	$F_{mikro}$ / N	865
3,5 GPa: $F_{makro}$ / N	4313	$F_{mikro}$ / N	723
2,5 GPa: $F_{makro}$ / N	1999	$F_{mikro}$ / N	249



**Abb. 7.6:** Im MKS-Modell ermittelte maximale Wälzkörperbelastung.

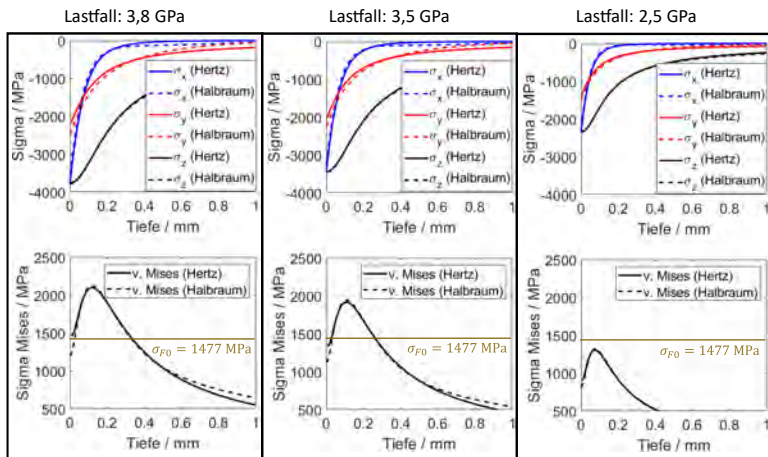
In der Abbildung 7.6 sind die zu den drei untersuchten Lastfällen im MKS-Modell ermittelten Normalkraftverläufe am Wälzkörper dargestellt.

Die im Weiteren präsentierten Ergebnisse lassen sich in drei Abschnitte zusammenfassen. In den zwei ersten Abschnitten 7.3.1 und 7.3.2 wird das plastische Verhalten des Innenrings untersucht. Dies erfolgte auf der Mikroebene mit Hilfe des Halbraum-Kontaktmodells. Dafür wurde zuerst wie in Abschnitt 7.3.1 beschrieben, für die drei untersuchten Lastfälle eine

Abschätzung der plastischen Zonen mit Hilfe elastischer Kontaktsimulationen gemacht. Die Ergebnisse der Lebensdauerberechnung und der Vergleich mit experimentellen Werten werden im letzten Abschnitt 7.3.3 präsentiert.

### 7.3.1 Abschätzung der plastischen Zone

Zur Validierung zeigt die Abb. 7.7 einen Vergleich zwischen den Ergebnissen des Halbraum-Modells und denen nach der HERTZ'schen Theorie für die maximalen Belastungen von 3,8GPa, 3,5 GPa und 2,5 GPa im Wälzkontakt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der beiden Ergebnisse hinsichtlich der Spannungs Komponente und den daraus berechneten VON MISES Vergleichsspannungen. Die maximalen Vergleichsspannungen liegen in den Tiefen von 0,1317 mm, 0,1135 mm und 0,0867 mm. Aus den Verläufen der VON MISES Vergleichsspannungen ist für eine Mikrofließspannung von 1477 MPa nach [BNLW05] bei dem Lastfall 2,5 GPa keine plastische Verformung zu erwarten. Im Weiteren werden mit den in Tabelle 7.5 angegebenen Materialwerten für die Lastfälle 3,8 GPa, 3,5 GPa die plastischen Eigenspannungen mit Hilfe des SWIFT Verfestigungsmodells [Swif52] (siehe Abb. 1.3 und (4.17)) simuliert.



**Abb. 7.7:** Validierung der elastischen Halbraum-Kontaktberechnung mit der HERTZ'schen Theorie für die drei untersuchten Lastfälle, plastische Verformungen sind bei den zwei Lastfällen 3,8GPa, 3,5GPa zu erwarten.

**Tab. 7.5:** Elasto-plastische Materialparameter für 100Cr6 nach [JBTW22; BNLW05; LFLV98]

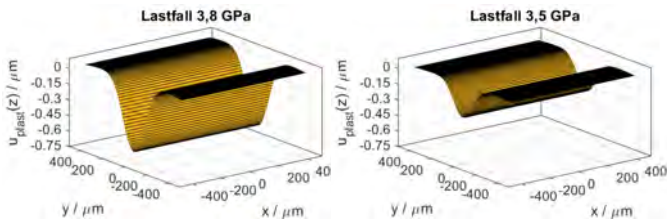
Elastische Materialparameter		Plastische Materialparameter	
$E$ / MPa	207000	$B_{sw}$ / MPa	945
$\nu$ / -	0,29	$C_{sw}$ / -	40
		$n_{sw}$ / -	0,121

### 7.3.2 Simulation des plastischen Verhaltens

Die Analyse im Abschnitt 7.3.1 zeigt bei den in Tabelle 7.5 angegebenen SWIFT-Materialparametern für 100Cr6 Wälzlagerstahl, dass die Plastifizierung nur bei den Lastfällen 3,8 GPa und 3,5 GPa zu erwarten sind. Zur Untersuchung des plastischen Verhaltens der Innenringe wurden mit dem Halbraum-Modell zyklischer quasistatischer Kontakt zwischen Rolle und Innenring bei der maximalen Last von 5162 N, 4313 N (siehe Abb. 7.6) jeweils für die beiden Lastfälle simuliert. Als Kriterium für die maximale Zyklanzahl wurde die Konvergenz der simulierten Eigenspannungen definiert. Die Annahme eines quasistatischen Kontakts steht im Einklang mit der Dehnratenunabhängigkeit der verwendeten plastischen Materialparameter in der Tabelle 7.5.

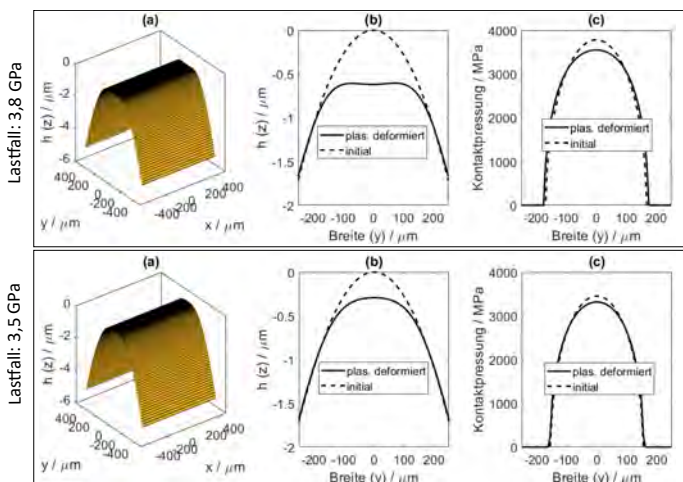
#### Formänderung und Spannungsreduktion durch die Plastizität

Die Plastizität sorgt an der Oberfläche für eine Formänderung, die zu einer Begrenzung der maximalen Kontaktpressungen durch eine breitere Lastverteilung führt. Daraus resultieren ebenfalls im Gegensatz zum elastischen Berechnungsfall geringere Spannungen im Material.

**Abb. 7.8:** Im Halbraum-Modell simulierte plastische Oberflächendeformation im konvergierten Zustand (nach 26 Zyklen)

In Abbildung 7.8 werden die simulierten plastischen Oberflächendeformationen im konvergierten Zustand (26. Zyklus nach Abschluss der Verfestigung) gezeigt. Es ergeben sich bei den Lastfällen 3,8 und 3,5 GPa jeweils eine maximale plastische Deformation von

-0,62  $\mu\text{m}$  und -0,29  $\mu\text{m}$ . Diese Deformationen sorgen wie in Abb. 7.8 dargestellt zu einer Formänderung der initialen Innenringgeometrie (a,b) und einer Minderung der Kontaktpressung (c). Die hier aufgrund der Modellannahme auftretenden plastischen Deformationen im Einlauf- und Auslaufbereich sind im realen überrollenden Wälzkontakt nicht zu erwarten. In Abb. 7.9(a) wird für die zwei Lastfälle 3,8 GPa und 3,5 GPa die plastische deformierte Innenringgeometrie dargestellt. Der Vergleich in (b) und (c) zeigt im Schnitt jeweils die Innenringkontur und Kontaktpressung im initialen Zustand und im konvergierten plastischen Endzustand (nach 26 Lastzyklen). Es zeigt sich durch die Plastizität eine Reduzierung der maximalen Kontaktpressung von 3780 MPa (im initialen bzw. elastischen Zustand) zu 3547 MPa (nach 26 Lastzyklen) für den Fall 3,8 GPa.



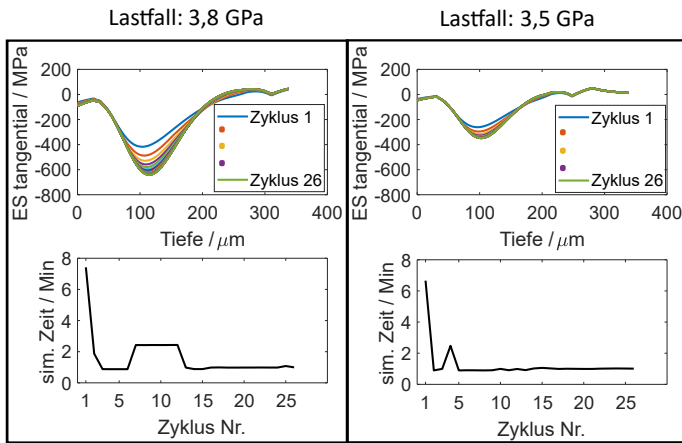
**Abb. 7.9:** (a) Plastisch deformierte Innenring Oberflächen, (b), (c) Vergleich der Innenringkontur und Kontaktpressung im initialen Zustand und im konvergierten plastischen Endzustand (nach 26 Lastzyklen)

### Simulierte vs. experimentelle Eigenspannung

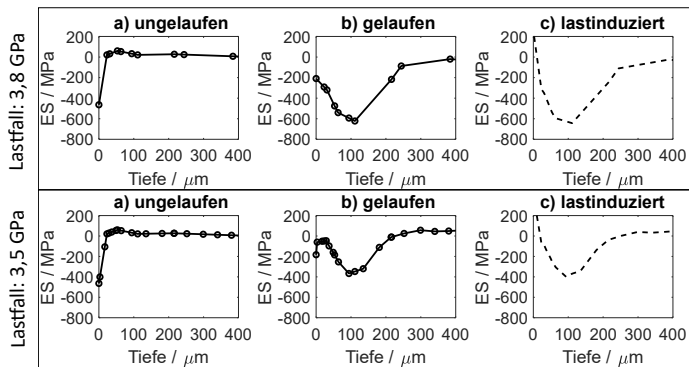
In der Abbildung 7.10 ist das Konvergenzverhalten der simulierten Eigenspannungen und die Rechenzeit der jeweiligen Zyklen aufgeführt. Eine schnelle Konvergenz der simulierten Eigenspannung ist bereits nach 26 Zyklen festzustellen. Die Rechenzeit pro Lastzyklus beträgt max. 8 Minuten bei einer Netzfeinheit von 2 Mio. Elementen. Die simulierten Eigenspannungen ergeben sich zwar nach einem konvergierten Zustand, jedoch kann dieser Zustand beim Überwalzen instationär werden. Eine genauere Simulation der im Wälzkontakt entstehenden Eigenspannungen im Halbraummodell wird in zukünftigen Arbeiten vorgenommen. Dafür kann beispielsweise die in [JBTW22] beschriebene Methode verwen-

det werden. In [JBTW22] wird das Überrollen als sukzessiv aufgebrauchte quasistatische Indentationen entlang des Rollwegs vereinfacht abgebildet. Es wurde für den Fall eines Punktkontakts ein Rollzyklus mit einem Rollweg von 18-mal  $a_H$  (nach HERTZ berechnete Berührbreite) simuliert. Hier zeigte sich ein stationärer Zustand erst nach einem Rollweg von 4-mal  $a_H$ . Dieser Ansatz könnte in zukünftigen Arbeiten auf einen Linienkontakt angewendet und damit auch das Verhalten nach mehreren Rollzyklen analysiert werden.

Zur Validierung der simulierten Eigenspannungen werden diese mit experimentell gemessenen Werten verglichen. Die gemessenen Eigenspannungswerte bei belasteten Innenring-Proben beinhalten eine Überlagerung aus fertigungsbedingten und belastungsinduzierten Anteilen. Zur Trennung des lastinduzierten Anteiles (siehe Abb. 7.11 c) wurden vorher an Innenringproben aus der gleichen Charge im unbelasteten Zustand (siehe Abb. 7.11 a), tangentiale Eigenspannungsmessungen durchgeführt. Dieser Spannungszustand wurde von dem Spannungszustand an nach 3,05 Million Umdrehungen gelaufenen Innenrings (siehe Abb. 7.11 b) abgezogen.

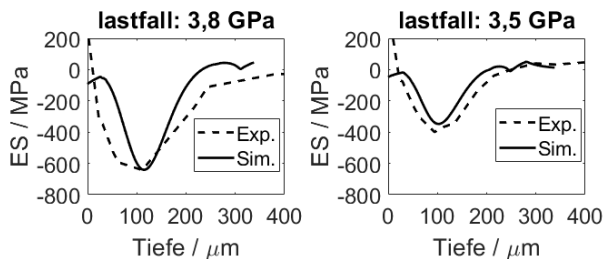


**Abb. 7.10:** Konvergenzverhalten der simulierten Eigenspannungen (oben) und Rechenzeit (unten) für die jeweiligen Zyklen bei den Lastfällen 3,8 GPa und 3,5 GPa.



**Abb. 7.11:** Experimentelle Bestimmung des belastungsinduzierten Eigenspannungsanteils nach 3,05 Millionen Umdrehungen in (c), durch Subtraktion der gemessenen Eigenspannungen am Innenring im unbelasteten Zustand in (a) von dem belasteten (3,8 GPa und 3,5 GPa) Zustand in (b).

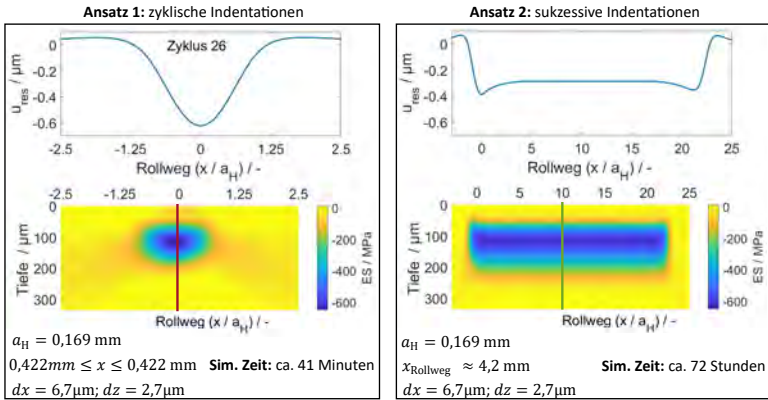
Der Vergleich in Abbildung 7.12 zwischen experimentell und simulativ bestimmten belastungsinduzierten Eigenspannungen zeigt, dass mit dem Halbraum-Modell die maximalen Eigenspannungswerte nach Betrag und Tiefe abgeschätzt werden können. Allerdings wird der gesamte Bereich der Eigenspannungszone im Halbraum-Modell leicht schmaler abgeschätzt, und die Zugspannungen werden im simulierten Verlauf nicht erfasst. Ein möglicher Grund hierfür könnte sein, dass der beim Überrollen auftretende Relaxationseffekt aufgrund des verwendeten Ansatzes nicht berücksichtigt wird. Zur Veranschaulichung dieses Relaxationseffekts und seines Einflusses auf die Eigenspannungen soll der Vergleich in Abbildung 7.13 dienen, der im Folgenden beschrieben wird.



**Abb. 7.12:** Vergleich der experimentellen und simulativ bestimmten lastinduzierten Eigenspannungen

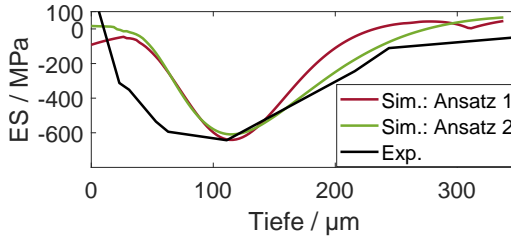
In der Abbildung 7.13 werden die Ergebnisse des bisherigen Ansatzes 1 (zyklischen Indentationen) mit denen des aus [JBTW22] vorgeschlagenen Ansatzes 2 verglichen, bei dem sukzessiv entlang der Rollrichtung der Wälzkörper in die Laufbahn indentiert wird.

Durch den sukzessiven Kontakt entlang der Rollrichtung lässt sich mit dem Ansatz 2 der Relaxationseffekt beim Überrollen abbilden. Der Kontakt zwischen Wälzkörper und Laufbahn wurde bei demselben Lastfall von 3,8 GPa über einen Rollweg von etwa 4,2 mm simuliert. Dabei zeigt sich, dass die plastische Oberflächendeformation  $u_{res}$  nach großen Indentationstiefen am Anfang des Rollwegs im mittleren Bereich nach einer Relaxation in einen stationären Zustand übergeht.



**Abb. 7.13:** Vergleich der beiden implementierten Ansätze (Ansatz 1: zyklische Indentationen der Wälzkörper in den Gegenkörper der Laufbahn an derselben Stelle, Ansatz 2: sukzessive Indentationen der Wälzkörper in den Gegenkörper der Laufbahn entlang der Rollrichtung) zur simulativen Untersuchung im Halbraum-Modell der plastischen Oberflächenverformung und Eigenspannungen während der Rollbewegung

Abbildung 7.14 zeigt einen qualitativen Vergleich der Eigenspannungsverläufe (jeweils entlang der in Abbildung 7.13 markierten Linien) in der Tiefe mit der experimentellen Kurve für die beiden Modellierungsansätze. Der simulierte Verlauf des sukzessiven Kontakts entlang der Rollrichtung (Ansatz 2) nähert sich dem experimentellen Verlauf (schwarze Linie in Abbildung 7.14) besser an. Die experimentell festgestellte Tendenz, Zug-Eigenspannungen im oberflächennahen Bereich zu haben, wird auch in Ansatz 2 beobachtet. Beide Ansätze liefern beinahe gleiche maximale Drukeigenspannungen (-644 MPa und -610 MPa jeweils für Ansatz 1 und 2). Ein signifikanter Unterschied lässt sich jedoch bei den Simulationszeiten feststellen: 41 Minuten für den Ansatz mit zyklischen Indentationen gegenüber 72 Stunden für den Ansatz mit Sukzessive Indentationen entlang der Rollrichtung. Im FATEMI-SOCIE Modell wird der Maximalwert der Eigenspannung verwendet. Aufgrund der guten Schätzung dieses Maximalwerts der Eigenspannung bei vergleichbarer Rechenzeit wurde der erste Ansatz in dieser Arbeit auch für andere Simulationsfälle verwendet.



**Abb. 7.14:** Qualitativer Vergleich der simulierten Verläufe der Eigenspannungen in der Tiefe für die beiden Ansätze in Abbildung 7.13 mit der experimentellen Kurve

Der spannungsreduzierende Einfluss der Plastizität wird im weiteren Verlauf bei der Lebensdauerberechnung genutzt. Um Rechenzeit zu sparen, werden die Spannungskomponenten zu den jeweiligen Winkelpositionen bei dem Durchlauf der Lastzone nicht elasto-plastisch, sondern rein elastisch (mit ca. 80 Prozent weniger Rechenzeit) berechnet. Der Einfluss der Plastizität wird berücksichtigt in dem, die im Betrag genommenen simulierten Druckeigenspannungen am kritischen Volumenelement zu der elastisch berechneten maximalen Drucknormalspannung addiert werden.

**Tab. 7.6:** Spannungskomponente am kritischen Volumenelement, resultierende Drucknormalspannungen senkrecht zur kritischen Ebene und simulierte Eigenspannungen am kritischen Volumenelement

	Lastfall: 3,8 GPa (elasto-plastisch)		Lastfall: 3,5 GPa (elasto-plastisch)		Lastfall: 2,5 GPa
	elastisch	elsto-plastisch (26. Zyklus)	elastisch	elsto-plastisch (26. Zyklus)	elastisch
$\sigma_{xx}$ / MPa	-1275	-925	-1159	-865	-767
$\sigma_{yy}$ / MPa	-679	-380	-617	-351	-389
$\sigma_{zz}$ / MPa	-3037	-1306	-2773	-1217	-1852
$\tau_{xy}$ / MPa	-3,4e-12	-5,84e-05	-6,33e-13	1,060e-04	9,15e-13
$\tau_{yz}$ / MPa	7,34e-09	0,4593	-3,21e-13	0,25	2,30e-10
$\tau_{xz}$ / MPa	-1,27e-07	-0,004	-6,36e-12	-4,73e05	4,9e-10
$\sigma_n$ / MPa	<b>-1859</b>	<b>-1120</b>	<b>-1696</b>	<b>-1317</b>	<b>-1122</b>
$\sigma_{ES}$ / MPa	-	<b>-644</b>	-	<b>-334</b>	-

Die Zulässigkeit dieser vereinfachten Methode wird im Folgenden überprüft. Die Komponente des Spannungstensors ( $\sigma_{xx}, \dots, \tau_{xz}$ ), die simulierte Eigenspannung  $\sigma_{ES}$  am kritischen Volumenelement und die Normalspannungen  $\sigma_n$  an der kritischen Ebene werden in der Tabelle 7.6 angegeben. Im Fokus stehen die zwei Lastfälle 3,8 GPa und 3,5 GPa, für die bei elastischer Kontaktberechnung senkrecht zur kritischen Ebene Drucknormalspan-

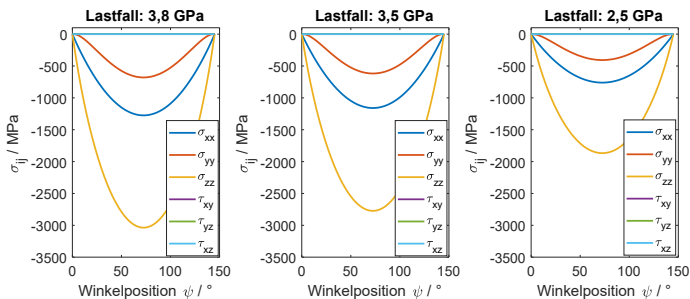


nungen von jeweils -1859 MPa und -1696 MPa bestimmt werden. Im elasto-plastischen Berechnungsfall reduzieren sich die Drucknormalspannungen jeweils auf -1120 MPa und -1317 MPa. Es ergibt sich eine Reduzierung der Drucknormalspannungen aufgrund der Plastizität jeweils von -739 MPa und -379 MPa. Diese Werte entsprechen mit einer Abweichung von ca. 15 % und 10 % den simulierten Eigenspannungswerten von -644 MPa und -334 MPa für die Lastfälle 3,8 GPa und 3,5 GPa.

Bei bekannten maximalen Druckeigenspannungen kann die elasto-plastische maximale Drucknormalspannung am kritischen Volumenelement im Berechnungsfall mit ideal glatten Innenring Oberfläche aus rein elastisch berechneten Spannungsgröße abgeschätzt werden. Hierzu werden zu der elastisch berechneten maximalen Drucknormalspannung der im Betrag genommenen maximalen Druckeigenspannungswert addiert.

### 7.3.3 Lebensdauerabschätzung mittels Fatemi-Socie Ermüdungsansatz

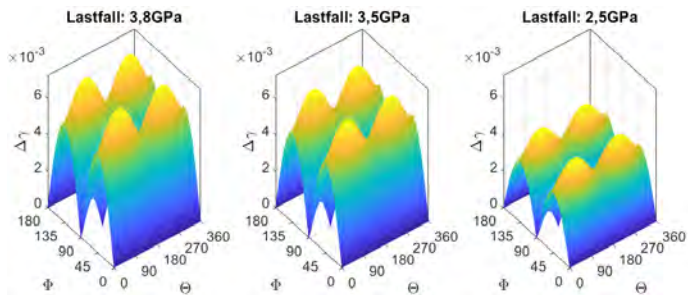
Bei dem FATEMI-SOCIE Ermüdungsansatz wird die Lebensdauer lokal auf einem kritischen Volumenelement ausgewertet. Hier wurde die Schubspannungshypothese eingesetzt und als kritisches Volumenelement, das mit der maximalen Schubspannung ausgewählt. Dieses liegt in den Tiefen: 0,1317 mm, 0,1135 und 0,0867 mm jeweils für die Lastfälle 3,8 GPa, 3,5GPa und 2,5 GPa. Die simulierten Eigenspannungen  $\sigma_{ES}$  am kritischen Volumenelement betragen bei den zwei Lastfällen mit Plastizität 3,8 GPa und 3,5 GPa jeweils -644 MPa und -334 MPa (siehe Abb. 7.12). Die Spannungskomponenten an den kritischen Volumenelementen für die drei untersuchten Lastfälle werden in Abbildung 7.15 dargestellt.



**Abb. 7.15:** Berechnete Spannungskomponente an dem kritischen Volumenelement für die verschiedenen Winkelpositionen, die Schubspannungen so klein, dass sie nicht erkennbar sind

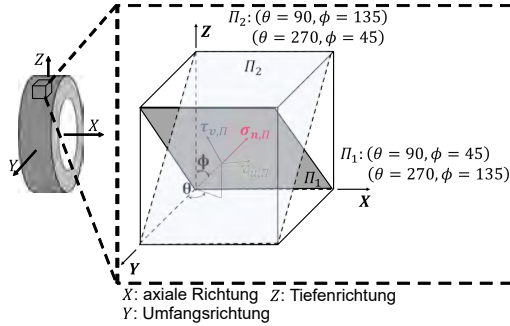
Die äquivalente Scherdehnungsamplitude  $\gamma_{a,eq}$  in (7.1) berechnet sich wie in Abschnitt 7.3.1 beschrieben aus den zwei Hauptbeanspruchungsgrößen: Scherdehnungsamplitude

und der maximalen Normalspannung. In Abb. 7.16 wird für drei untersuchte Lastfälle an den kritischen Volumenelementen die Scherdehnungsamplitude für alle diskretisierten Ebenen  $\Pi$  dargestellt.



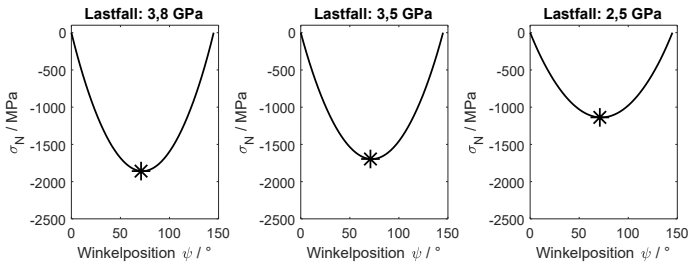
**Abb. 7.16:** Maximale Scherdehnungsamplitude auf alle diskretisierten Ebenen des kritischen Volumenelements für die drei untersuchten Lastfälle 3,8 GPa, 3,5 GPa und 2,5 GPa

Die maximale Scherdehnungsamplitude wird aus der maximalen Schubspannungsamplitude mittels (7.3) abgeleitet. Es ergeben sich maximale Scherdehnungsamplituden von 0,0073, 0,0067, und 0,0045 jeweils für die Lastfälle 3,8, 3,5 und 2,5 GPa. Zu erkennen in Abb. 7.16 ist, dass die maximalen Scherdehnungen bei den kritischen Ebenen mit den Winkelkombinationen  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$  und  $\phi = 45^\circ, 135^\circ$  auftreten. Die Orientierung der kritischen Ebene kann durch die in (7.3) gegebenen Komponenten des Normalvektors bestimmt werden. Zur Veranschaulichung liegen, wie in Abb. 7.17 schematisch dargestellt, die kritischen Ebenen  $\Pi_1, \Pi_2$  bei den genannten Winkelkombinationen. Diese liegen unter einem  $45^\circ$  Winkel hin zur Umfangsrichtung. Dies steht im Einklang mit der Ermüdungstheorie zur Wälzlagerberechnung [DIN26281], welche sich auf die Wechselschubspannungshypothese stützt.



**Abb. 7.17:** Veranschaulichung der Orientierung der kritischen Ebene für die Winkelkombinationen  $\theta = 90^\circ, 270^\circ$  und  $\phi = 45^\circ, 135^\circ$

In der Abb. 7.18 werden bei den untersuchten Lastfällen die auf dem kritischen Volumenelement für die verschiedenen Winkelpositionen berechneten Normalspannungen  $\sigma_N$  (senkrecht zur kritischen Ebene) dargestellt.



**Abb. 7.18:** Normalspannungsverlauf senkrecht zur kritischen Ebene, maximale Drucknormalspannung mit Stern gekennzeichnet

Die Verläufe in Abb. 7.18 werden aus den Spannungskomponenten in Abb. 7.15 mit Hilfe der Gleichungen (2.7-2.9) aus [Fesi12], bestimmt. Diese Verläufe sind bei rein elastischen Kontaktsimulationen bestimmt worden. Für die Lastfälle 3,8 GPa und 3,5 GPa und 2,5 GPa betragen die maximalen Drucknormalspannungen -1859 MPa, -1696 MPa und -1119 MPa. Um den Einfluss der Plastizität bei den Lastfällen 3,8 GPa und 3,5 GPa zu berücksichtigen, werden diese Werte zu den im Betrag genommenen simulierten maximalen Druckeigenspannungen von 644 MPa und 334 MPa addiert. Der Einsatz der Eigenspannungen im Betrag dient dazu den Einfluss der Plastizität auf die im elastischen Fall berechneten Drucknormalspannungen sinnvoll zu berücksichtigen. Die Plastizität sorgt wie im Abschnitt 7.3.2 gezeigt für eine Spannungsreduktion.

In der Tabelle 7.7 sind die Ergebnisse der berechneten Schadensparameter und die Lastzyklenanzahl im FATEMI-SOCIE Modell für die drei untersuchten Lastfälle mit und ohne

Berücksichtigung der Drucknormalspannungen zusammenfasst.

**Tab. 7.7:** Zusammenfassung der Simulationsergebnisse:

Schadensparameter $\gamma_{a,eq}$ und die kritischen Lastzyklenzahlen $N_f$				
Lastfall	ohne:		mit:	
	Normalspannungseinfluss		Normalspannungseinfluss	
	$\gamma_{a,eq} / -$	$N_f / 10^6$	$\gamma_{a,eq} / -$	$N_f / 10^6$
Pmax:3,8 GPa	0,0073	0,0306	0,0038	16,351
Pmax: 3,5 GPa	0,0067	0,0639	0,0032	42,028
Pmax: 2,5 GPa	0,0045	2,5973	0,0026	543,272

Der signifikante Einfluss der Drucknormalspannungen lässt sich aus den simulierten Lastzyklenanzahlen feststellen vgl. 7.21. Die nicht-Berücksichtigung der Drucknormalspannung liefert für die drei Lastfälle sehr kleine Lastzyklenanzahlen. Es ergeben sich aus der Berücksichtigung der maximalen Drucknormalspannungen, 16,351 Mio, und 42,028 Mio. und 543,272 Mio Lastzyklen jeweils für die Lastfälle 3,8, 3,5 und 2,5 GPa. Zur Umrechnung der Lastzyklenanzahlen  $N_f$  in Innenringumdrehungen  $N_{IR}$ , wird aus den Parametern in Tabelle 7.4 (Wälzkörperanzahl  $N_{W_k}$ , Innenringdrehzahl  $n_{IR}$  und Käfigdrehzahl  $n_K$ ) zuerst die Belastungsfrequenz  $N_{freq,IR}$  am Innenring bestimmt [Scha15]:

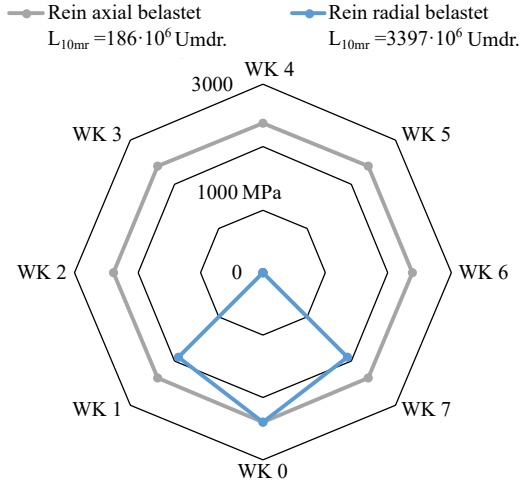
$$N_{freq,IR} = n_K \cdot N_{W_k} = 21420 \text{ U/min} \quad (7.5)$$

Ein Umrechnungsfaktor von 7,30 wird aus dem Verhältnis der bestimmten Belastungsfrequenz in (7.5) und der Innenringdrehzahl bestimmt. Eine Umrechnung der Lastzyklenanzahlen in Innenringumdrehungen liefert jeweils 2,2, 5,8 und 74,4 Millionen Umdrehungen. Diese Lebensdauerwerte beziehen sich jedoch nur auf den Kontakt des Innenrings mit dem höchst belasteten Wälzkörper. Da die Kontaktpressung am Innenring aufgrund der Krümmungsverhältnisse stets größer ist als am Außenring, würde nach dem hier vorgestellten Verfahren nach FATEMI-SOCIE stets dieser Kontakt als Erstes versagen. In Konsequenz hieße das, dass die Lebensdauer des Wälzlagers gleich der Lebensdauer des höchst belasteten Kontaktes ist.

Es ist aber bekannt, dass die Lebensdauer von Wälzlager keine deterministische Größe ist, sondern einer großen Stochastik unterliegt. Es gibt also stets eine Wahrscheinlichkeit größer Null, dass ein anderer, als der höchstbelastete Wälzkörper zuerst ausfällt [DINEN61649], [BeDa22]. Wie signifikant dieser Einfluss ist, zeigt exemplarisch Abbildung 7.19. Ein Rillenkugellager 6411 wurde in beiden Fällen mittels der Software Lager2 einmal rein axial und einmal rein radial derartig belastet, dass die maximale Pressung im Kontakt Wälzkörper-Innenring mit ca. 2400 MPa jeweils identisch ist. Lediglich die Anzahl der maximal belasteten Kontakte unterscheidet sich mit 1 (radial) zu 8 (axial). Die berechnete

modifizierte Referenz-Lebensdauer liegt im rein axial belasteten Berechnungsbeispiel mit  $186 \cdot 10^6$  Umdrehungen im Vergleich zu  $3397 \cdot 10^6$  Umdrehungen aufgrund der umlaufenden Lastzone und der damit verbundenen 8-mal größeren Anzahl an Überrollungen bei maximaler Belastung im gleichen Zeitraum deutlich niedriger.

Dieses stochastische Ausfallverhalten von Wälzlagern liegt darin begründet, dass Wälzgerstähle aufgrund der hohen auftretenden Belastung sehr hart und somit vergleichsweise spröde sind. Je nach Kornorientierung und Einschlussverteilung im Bereich der maximal auftretenden Wechselschubspannung kommt es zu einer früheren oder späteren Rissbildung unter der Oberfläche. Dieser Effekt wird in der genormten Lebensdauerberechnung berücksichtigt, indem die Überlebenswahrscheinlichkeiten aller belasteten Kontakte berechnet und diese anschließend zu einer Systemlebensdauer zusammengefasst werden.



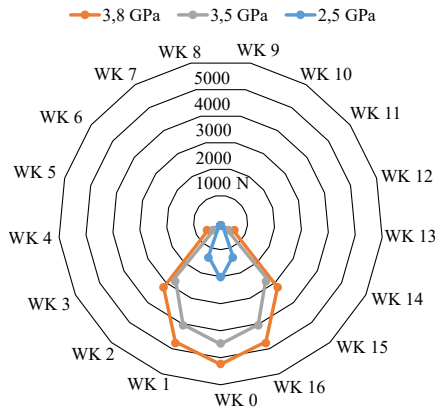
**Abb. 7.19:** Mittels der Software Lager2 berechnete modifizierte Referenzlebensdauern und zugehörige Pressungsverteilung im Kontakt Wälzkörper-Innenring eines Rillenkugellagers 6411.

Um der bekannten Ausfallcharakteristik Rechnung zu tragen, werden daher im Folgenden die Lebensdauern sämtlicher belasteten Kontakte sowohl am Innenring als auch am Außenring mittels des vorgestellten Ansatzes nach FATEMI-SOCIE berechnet. Das in der Abbildung 7.20 dargestellte Kreisdiagramm mit den Kontaktkräften aus LAMBDA fasst die Belastungssituation in der Lastzone für die drei untersuchten Lastfälle zusammen. Fünf Wälzkörper befinden sich bei 2,5GPa und sieben Wälzkörper bei 3,5GPa und 3,8 GPa in der Lastzone. In der Tabelle 7.8 werden neben den ermittelten Kontaktkräften die zugehörigen resultierenden Pressungen sowie Tiefen des kritischen Volumenelements

zur Bestimmung der Lebensdauer für Innen- und Außenring angegeben. Durch die vorliegende Symmetrie gleich belastete Wälzkörper sind in der Tabelle 7.8 einmal aufgeführt. An dem jeweiligen kritischen Volumenelement werden mittels der FATEMI-SOCIE (FS) Gleichung die Lebensdauern in Innenringumdrehungen  $FS_{IR}$  bzw.  $FS_{AR}$  an jeder Kontaktstelle bestimmt. Die Lebensdauer des Lagers ist dann die Systemlebensdauer aller belasteten Kontakte. Die Systemlebensdauer des Lagers  $FS_{Ges}$  kann mithilfe folgender Gleichung ermittelt werden:

$$FS_{Ges} = \left( \sum_{i=1}^{i_{Ges}} \left( \frac{1}{FS_i^\beta} \right) \right)^{\frac{-1}{\beta}} \quad (7.6)$$

Darin gibt  $\beta$  den WEIBULL-Exponenten an [DIN55303-7], [DINEN61649]. Dieser kann für Rollenlager mit  $9/8 \approx 1,1$  angenommen werden und bei Ausfallwahrscheinlichkeiten kleiner 10% 1,5 betragen [DINISO/TR1281-1]. Physikalisch ist dieses Vorgehen darin begründet, dass die Lebensdauern nach FATEMI-SOCIE auf der Annahme eines homogenen Materials beruhen. Durch die nachträgliche Berechnung der Systemlebensdauer mit den bekannten WEIBULL-Exponenten kann dann der Einfluss der Inhomogenitäten auf das Ausfallverhalten berücksichtigt werden.



**Abb. 7.20:** Mittels LaMBDA ermittelte Kontaktkräfte als Kreisdiagramm zur Veranschaulichung der Belastungssituation in der Lastzone bei den untersuchten Lastfällen 2,5 GPa, 3,5 GPa und 3,8 GPa.

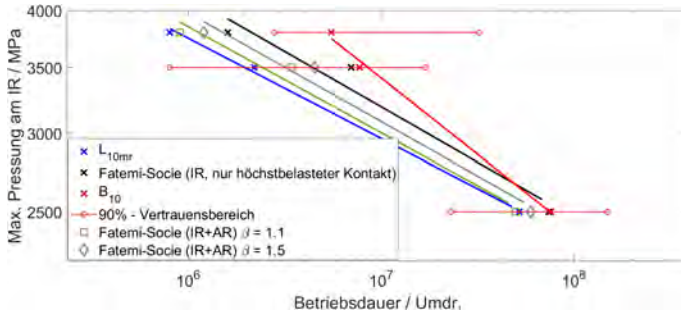
In der Abbildung 7.21 wird die Anzahl der simulierten Umdrehungen mit experimentellen Werten (5,5, 7,7 und 76,1 Mio. Umdrehungen jeweils für die Lastfälle 3,8 GPa, 3,5 GPa und 2,5 GPa) verglichen. Diese stammen aus statistisch abgesicherten am Institut für Maschinenkonstruktion und Tribologie der Leibniz Universität Hannover im Rahmen des AiF geförderten FVA Projekts 866 I (Kurzfristige Überlasten) durchgeführten Ermüdungslebensdaueruntersuchungen [DRD22] und betrachten ausschließlich Innenringausfälle.

Für die nach FATEMI-SOCIE berechneten Lebensdauern ist neben der Lebensdauer des ausschließlich höchst belasteten Kontakts auch eine Variation des WEIBULL-Exponenten durchgeführt worden. Für die Fälle  $\beta = 1,1$  und  $\beta = 1,5$  werden sämtliche Kontaktstellen am Innen- und Außenring berücksichtigt. Außerdem sind die mit Lager2 berechneten Ergebnisse für die modifizierte Referenz-Lebensdauer  $L_{10mr}$  nach [DIN26281] angegeben. Die Gegenüberstellung der Ergebnisse zeigt, dass für 2,5 und 3,5 GPa die Normberechnung als auch die Ergebnisse auf Basis von FATEMI-SOCIE innerhalb des 90%-Vertrauensbereichs der Versuchsergebnisse liegen. Mit einem WEIBULL-Exponenten von 1,1 ergeben sich die höchsten Übereinstimmungen zwischen Simulation und Norm, während die Lebensdauer des maximal belasteten Kontakts die Experimente am besten abschätzt. Wie schon in [DRD22] beschrieben, kann gefolgert werden, dass die Normberechnung für 3,8 GPa konservativer ausgelegt ist als es die Experimente zeigen. Ähnlich verhalten sich auch die Resultate nach FATEMI-SOCIE, welche unterhalb der unteren Grenze des Vertrauensbereichs liegen.

**Tab. 7.8:** Zusammenfassung der Simulationsergebnisse: Wälzkörperkräfte in der Lastzone, Kontaktpressung am Innenring und Außenring bei den jeweiligen Kräften, Tiefe des kritischen Volumenelements am Innenring  $z_{IR}$  und Außenring  $z_{AR}$ , lokale Lebensdauern am Innenring  $FS_{IR}$  und Außenring  $FS_{AR}$

		<b>Kontaktstellen 2,5 GPa</b>			
		WK 2 & 15	WK 1 & 16	WK 0	
Kontaktkraft / N		122	1250	1999	
Pressung / MPa	WK-IR	583	1853	2454	
	WK-AR	510	1643	2079	
Tiefe $V_{kritisch}$	$Z_{IR}$ / mm	0,021	0,063	0,079	
	$Z_{AR}$ / mm	0,024	0,071	0,089	
FS $10^6$ Umdr.	$FS_{IR}$	$2,47 \cdot 10^6$	226	74	
	$FS_{AR}$	$8,63 \cdot 10^6$	455	118	
		<b>Kontaktstellen 3,5 GPa</b>			
		WK 3 & 14	WK 2 & 15	WK 1 & 16	WK 0
Kontaktkraft / N		322	2497	3848	4313
Pressung / MPa	WK-IR	940	2621	3258	3451
	WK-AR	833	2324	2891	3061
Tiefe $V_{kritisch}$	$Z_{IR}$ / mm	0,0317	0,0897	0,1082	0,1135
	$Z_{AR}$ / mm	0,0369	0,1003	0,1214	0,1267
FS $10^6$ Umdr.	$FS_{IR}$	$3,7 \cdot 10^4$	49,3	12,7	7
	$FS_{AR}$	$9,5 \cdot 10^4$	72,6	31,5	26
		<b>Kontaktstellen 3,8 GPa</b>			
		WK 3 & 14	WK 2 & 15	WK 1 & 16	WK 0
Kontaktkraft / N		567	3132	4637	5162
Pressung / MPa	WK-IR	1246	2937	3579	3779
	WK-AR	1104	2606	3175	3353
Tiefe $V_{kritisch}$	$Z_{IR}$ / mm	0,0422	0,0979	0,1188	0,1240
	$Z_{AR}$ / mm	0,0501	0,1108	0,1320	0,1372
FS $10^6$ Umdr.	$FS_{IR}$	$3,7 \cdot 10^3$	27,4	3,8	1,6
	$FS_{AR}$	$8,4 \cdot 10^3$	43,8	19,2	12,9





**Abb. 7.21:** Vergleich von simulierten, experimentellen und nach [DIN26281] berechneten Lebensdauerwerten

### 7.3.4 Zusammenfassung und Ausblick

Ein Multiskalenansatz basierend auf zwei lokale Kontaktsimulationsmodellen (Einzellager (MKS) und Einzelkontakt (Halbraum-Modell)) wurde zur Lebensdauerabschätzung von Zylinderrollenlagern entwickelt. Der lokale Ermüdungsansatz nach FATEMI-SOCIE wurde dabei zur Bestimmung der kritischen Lastzyklenzahl verwendet. Dafür wurden im Halbraum-Modell auf der Mikroskala die plastischen Spannungen auf einem definierten kritischen Volumenelement bestimmt. Der Einfluss der Plastizität auf die Kontaktpressung und der spannungsmindernde Effekt konnte simulativ gezeigt werden. Ein Vergleich der simulierten Eigenspannung mit den experimentellen Werten zeigte, dass mit dem Halbraum-Kontaktmodell Eigenspannungen nach den maximalen Werten gut abgeschätzt werden können. Der Vergleich in Abbildung 7.14 legte nahe, dass der Ansatz 2 (bei dem der Wälzkörper entlang der Rollrichtung sukzessive in die Laufbahn indentiert wird) in Abbildung 7.13 für ein bessere Simulation der gesamten Eigenspannungsverlauf in der Tiefe während der Rollbewegung vorzuziehen ist. Die damit verbundene hohe Rechenzeit muss jedoch in Kauf genommen werden.

Die mit diesem Ansatz berechneten Lebensdauern des höchstbelasteten Wälzkontaktes liegen im Fall von 2,5 GPa und 3,5 GPa im Vertrauensbereich der Messungen, im Fall vom 3,8 GPa leicht darunter. Ermittelt man aus der nach FATEMI-SOCIE ermittelten Kontaktlebensdauer die Systemlebensdauer des Wälzlagers, so ist diese fast deckungsgleich mit den nach Norm berechneten nominellen Referenzlebensdauern. Folgende Schlussfolgerungen und Empfehlungen resultieren aus diesem Ergebnis:

- Da die Systemlebensdauer aus den FATEMI-SOCIE Ergebnissen mit gleichem Weibull-Exponenten  $\beta = 1,1$  der auch in der [DIN26281] verwendet wird, nahezu identisch mit der nominellen Referenzlebensdauer des Lagers ist, müssen auch

die Lebensdauern der einzelnen Wälzkontakte in beiden Modellen nahezu identisch sein

- **Bestimmung der Materialwerte für den Mikrokontakt**

Der Vergleich zwischen experimentellen und simulierten Eigenspannungen in Abb. 7.12 zeigte eine trotz ähnlichem Verlauf simulativ schmalere gesamte Eigenspannungszone. Größere Abweichungen können insbesondere im oberflächennahen Bereich festgestellt werden. Im [GTGH02] konnte die Tiefenabhängigkeit (Indentation size effect) der Härte und somit auch der plastischen Materialparameter zeigen. Eine realistische Identifikation der tiefenabhängigen plastischen Materialparameter kann mittels Nanoindentation [Pöhl14] erfolgen.

Mit den richtigen Materialparametern für das FATEMI-SOCIE Modell kann man mit dem vorgestellten Ansatz die Lebensdauer der Wälzlager mit vergleichbarer Güte wie die Norm vorhersagen. Das bietet in Zukunft die Möglichkeit bei neuen Werkstoffentwicklungen für Wälzlager deutlich früher im Entwicklungsprozess und zu reduzierten Kosten Aussagen über die Lebensdauer der Lager mit diesen neuen Werkstoffen treffen zu können. Voraussetzung hierfür ist die Ermittlung der Materialparameter für das FATEMI-SOCIE Modell an Werkstoffproben. Es ist zu erwarten, dass diese Ermittlung deutlich weniger aufwändig und viel günstiger ist, als statistisch abgesicherte Wälzlagerlebensdaueruntersuchungen durchzuführen.

- **Berücksichtigung der Material-Inhomogenität (z.B. Einschlüsse)**

Trotz steigender Reinheitsanforderungen bei der Stahl Herstellung, liegen bei Wälzlagerstählen im Gefüge immer Materialinhomogenitäten, meistens in der Form von oxidischen Einschlüssen vor [YZLL06; GWZM17; Ladu15]. Solche Materialinhomogenitäten können sowohl die Kontaktpressung als auch die Spannungen im Material stark beeinflussen. Um realistische Werte für das bereits implementierte Modell (siehe Kapitel 5) zu gewinnen, können in weiterführenden Untersuchungen an Innenringproben im Rahmen von metallographischen Untersuchungen, der Reinheitsgrad bewertet und eine Klassifizierung und Charakterisierung der vorhandenen Inhomogenitäten vorgenommen werden.

## 7.4 Ergebnisse im Projekt T05N (SFB 926)

Die aktuelle LebensdauerAuslegung von Wälzlagern nach [DIN26281] setzt Laufbahnoberflächen mit hoher Qualität voraus. Zur Erfüllung der geforderten Oberflächenqualität werden spezielle Fertigungsverfahren wie zum Beispiel Honen eingesetzt, die mit hohen Kosten verbunden sind. Dem Einsatz von anderen Verfahren zur kostengünstigeren Fertigung von Wälzlagerinnenringen soll zuerst eine Analyse des tribologischen Verhaltens der

daraus resultierenden Oberfläche vorausgehen. Ein wesentlicher Aspekt der hier untersucht wurde, ist das Plastifizierungsverhalten. Die Plastizität sorgt an der Oberfläche zur Einglättung der Rauheitsspitzen, die zu hohen realen Kontaktflächen führt und somit zu einer besseren Last- und Spannungsverteilung. Die belastungsinduzierten plastischen Eigenspannungen, die während der Materialverfestigung entstehen, haben einen großen Einfluss auf die Lebensdauer des betroffenen Bauteils. Orte im Material mit hoher Eigenspannungskonzentration gelten meisten auch als Rissinitiationsorte [YZLL06]. Eine kritische Rissausbreitung führt zu Schadensmechanismen (z.B. Pittings), die einen Funktionsausfall verursachen können. In diesem Projekt wurden Zylinderrollenlager des Typs NU208 bei dem Lastfall mit einer maximalen Pressung von 2,4 GPa im Kontakt Wälzkörper-Innenring untersucht. Eine ideal glatte und drei von der INTERPRECISE Donath GmbH durch unterschiedliche Finishverfahren hergestellte Oberflächenvarianten (fein geschliffen, hartgedreht und grob geschliffen) wurden untersucht. Neben der Lebensdauerabschätzung stand das Plastifizierungsverhalten (Oberflächen-, Kontaktpressungsveränderung und Eigenspannung) der rauen Oberflächen im Fokus.

#### 7.4.1 Vergleich Halbraum- versus Hertz'sche Theorie für eine ideal glatte Innenringoberfläche

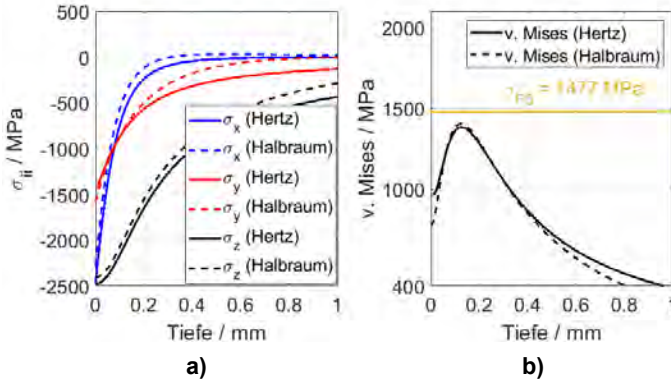
In der Tabelle 7.9 werden die Geometrie- und Belastungswerte zusammengefasst.

**Tab. 7.9:** Geometrische und Belastungsgrößen des MKS- und Halbraum-Modells für Zylinderrollenlager des Typs NU208

Makro-Größen		Mikro-Größen	
$D_{Wk}$ / mm	10	$L_x$ / mm	0,6
$D_{IR}$ / mm	49,98	$L_y$ / mm	0,6
$L_{eff}$ / mm	9,7		
$N_{Wk}$ / -	13		
$C_{radial}$ / $\mu\text{m}$	45		
$n_{IR}$ / Umdr./min	2500		
$n_K$ / Umdr./min	1050		
2,4 GPa: $F_{makro}$ / N	4986	$F_{mikro}$ / N	310

Zur Validierung zeigt die Abb. 7.22 einen Vergleich zwischen den Ergebnissen des Halbraum-Modells und denen nach der Hertz'schen Theorie für die maximale Belastung 2,4 GPa im Wälzkontakt. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den

beiden Ergebnissen hinsichtlich der Spannungskomponente a) und der daraus berechneten von Mises Vergleichsspannung b). Die maximale Vergleichsspannung liegt bei der Tiefe von 0,124 mm vor. Aus den Verläufen der Vergleichsspannungen ist für eine Mikrofließspannung von 1477 MPa bei einer Berechnung mit ideal glatter Innenringgeometrien keine plastische Verformung zu erwarten.



**Abb. 7.22:** Validierung der elastischen Halbraum-Kontaktberechnung mit der HERTZ'schen Theorie am Beispiel eines Linienkontakt im Zylinderrollenlager NU208 für den Lastfall 2,4 GPa

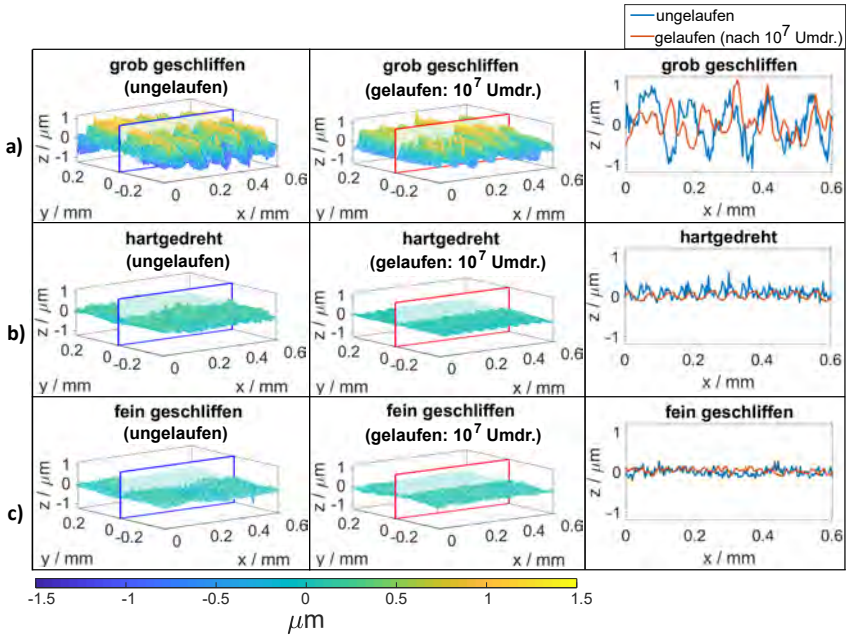
#### 7.4.2 Simulationsergebnisse

Die hier präsentierten Ergebnisse können in drei Abschnitten zusammengefasst werden. In den zwei ersten Abschnitten wird das tribologische Verhalten der gemessenen Oberflächen im ungelaufenen und gelaufenen (nach  $10^7$  Umdrehungen) Zustand untersucht. Dafür werden auf der Mikroebene mit Hilfe des Halbraum-Kontaktmodells elastische Kontaktsimulationen durchgeführt. Der Fokus wird auf die Veränderung der realen Kontaktfläche und der theoretischen plastischen Zone (siehe Tabelle 7.11) für beide Zustände (ungelaufenen und nach  $10^7$  Umdrehungen) gelegt. Als theoretische plastische Zone wird die Menge aller Volumenelemente im diskretisierten Berechnungsvolumen mit einem von Mises Vergleichsspannungswert höher als die Fließspannung von 1477 MPa (siehe Tabelle 7.5) bezeichnet. Zur Oberflächenveränderung im Betrieb tragen viele Effekte bei. In dieser Arbeit wird von einer überwiegend durch Plastizität bedingten Oberflächenveränderung ausgegangen und im nächsten Abschnitt mit Hilfe des 3D Plastizitätsmodells die Plastifizierung der Oberflächen und des Materials im Innern untersucht. Zur Validierung der mit dem 3D Plastizitätsmodell erzielten Ergebnisse werden die Ergebnisse der elastischen Kontaktsimulation mit den realen Oberflächen im gelaufenen Zustand (nach  $10^7$  Umdre-

hungen) im vorherigen Abschnitt als Referenz definiert. Die Verwendung der Ergebnisse mit den realen Oberflächen im gelaufenen Zustand als Referenzergebnisse basiert auf der Annahme, dass nach  $10^7$  Umdrehungen alle relevanten Einglättungseffekte der Oberfläche abgeschlossen sind. Im letzten Abschnitt wird unter Berücksichtigung der simulierten Eigenspannungen eine Lebensdauerabschätzung nach dem FATEMI-SOCIE Modell durchgeführt.

#### **Analyse des tribologischen Verhaltens der gemessenen Oberflächen im ungelaufenen und gelaufenen (nach $10^7$ Umdr.) Zustand mittels elastischer Kontaktsimulation**

Um die Spannungen im Kontakt für die unterschiedlich bearbeiteten Lagerringe zu analysieren, wurden elastische Kontaktsimulationen durchgeführt. Dazu wurde im Simulationsmodell die konfokal vermessene Oberfläche des Innenrings mit einer ideal glatten Wälzkörperoberfläche in Kontakt gebracht. Die jeweiligen Oberflächentopographien der unbelasteten und belasteten (nach  $10^7$  Umdrehungen) Lagerringe werden in Abbildung 7.23 dargestellt. Zur Verdeutlichung des Tiefenprofils ist in der rechten Spalte der Abbildung zusätzlich ein Mittelschnitt dargestellt. Aufgrund der große Schwierigkeit messtechnisch vor und nach Lauf jeweils an den exakt selben Stellen die Oberfläche zu erfassen wurde an diese Stelle versucht charakteristische Stellen zu definieren und dort der Vergleich gezogen.



**Abb. 7.23:** Mittels Konfokalmikroskop ermittelte 3D-Oberflächentopographien sowie das daraus resultierende 2D-Profil für die unterschiedlich bearbeiteten Lagerinnenringe a) grobgeschliffenen, b) hartgedrehten und c) feingeschliffenen im ungelaufenen und gelaufenen (nach  $10^7$  Umdrehungen) Zustand

Es wurde ein jeweils identisches Berechnungsgebiet mit den Abmessungen 0,6 mm, 0,6 mm und 50  $\mu\text{m}$  definiert, das in 194, 194 und 129 Elemente in der axialen (x), der Umfangs-(y) und Tiefenrichtung (z) diskretisiert wurde. Die aufgebrachte skalierte Mikrokräft beträgt 310 N und entspricht einer maximalen Kontaktpressung von 2,4 GPa bei einer ideal glatten Innenringoberfläche. Um die Oberflächentopographie quantitativ zu vergleichen, werden, wie in der Tabelle 7.10 angegeben, die realen Kontaktflächen ausgewertet. Da größere Kontaktflächen zu einer gleichmäßigeren Verteilung der Belastung führen, kann bei niedrigerem  $A_{\text{real}}$  von höheren lokalen Kontaktpressungen und Spannungen ausgegangen werden. Im unbelasteten Zustand weisen die feingeschliffene und die hartgedrehte Oberfläche ähnliche reale Kontaktflächen von 0,1275  $\text{mm}^2$  bzw. 0,1265  $\text{mm}^2$  auf, während die grobgeschliffene Oberfläche die kleinste reale Kontaktfläche von 0,0883  $\text{mm}^2$  aufweist und damit das schlechteste tribologische Verhalten zeigt. Nach  $10^7$  Umdrehungen zeigen die Ergebnisse der Kontaktsimulation eine Zunahme der realen Kontaktfläche um 23 %, 61 % bzw. 49 % für die grobgeschliffene, hartgedrehte und feingeschliffene Oberfläche, was auf die Einglättung der Rauheitsspitzen zurückzuführen ist. Dies führt bei der hartgedrehten

Variante zu einem etwas höheren  $A_{real}$  im Vergleich zum feingeschliffenen Zustand, was sich potentiell lebensdauer verlängernd auswirken kann.

**Tab. 7.10:** Berechnete reale Kontaktflächen bei nominell 2,4 GPa der gemessenen rauen Oberflächen im ungelaufenen und gelaufenen (nach  $10^7$  Umdrehungen) Zustand mittels elastischer Kontaktsimulationen

Oberflächen	ungelaufenen $A_{real}/mm^2$	gelaufenen (nach $10^7$ Umdr.) $A_{real}/mm^2$
grob geschliffen	0,0883	0,1088
hartgedreht	0,1265	0,2037
fein geschliffen	0,1275	0,1896

Die elastisch simulierte Kontaktpressungen werden in der Abb. 7.24 dargestellt. Es ergeben sich aufgrund der hohen einzelnen Rauheitsspitzen im unbelasteten Zustand für die grob geschliffene, hartgedrehte und fein geschliffene Oberfläche maximale Pressungswerte von jeweils 15,9 GPa, 15,9 GPa und 17,4 GPa. Die bessere Topographie (charakterisiert durch die größte Kontaktfläche) der hartgedrehten Oberfläche zeigt sich im Betrieb vorteilhaft durch die im Berechnungsfall mit der realen Oberfläche im belasteten Zustand festzustellende signifikante Reduktion der maximalen Kontaktpressung von 15,9 GPa auf 4,3 GPa. Bei der fein geschliffenen Oberfläche wird ebenfalls eine große Reduktion von 17,4 GPa auf 5,7 GPa festgestellt. Bei der grobgeschliffenen Oberfläche ist eine kleinere Reduktion der maximalen Kontaktpressungen von 15,9 GPa auf 12,3 GPa festzustellen. Diese Ergebnisse zeigen, dass die Abschätzung der Kontaktpressungen bei sehr rauen Oberflächen (hier im ungelaufenen Zustand) mittels elastischer Kontaktsimulation zu unrealistischen Ergebnissen führt. Im gelaufenen Zustand nähert sich die reale Oberfläche durch den Einglättungsprozess einer ideal glatten Oberfläche an. Hier führt die elastische Kontaktsimulation zu realistischen Kontaktpressungen.

Die Ergebnisse der Spannungsberechnung für die unterschiedlich bearbeiteten Lagerringe im ungelaufenen und gelaufenen Zustand sind in Abbildung 7.25 dargestellt. Werden die verschiedenen Oberflächenvarianten verglichen, so weist die grobgeschliffene Oberfläche in beiden Zuständen die höchsten Spannungen auf. Diese befinden sich im oberflächennahen Bereich. Bei den Berechnungen mit den gelaufenen Oberflächen ist eine Korrelation der Spannungszustände für die hartgedrehten und feingeschliffene Variante festzustellen. Weiteren Analysen der beobachteten unterschiedlichen Spannungsverteilungen wurden durchgeführt.

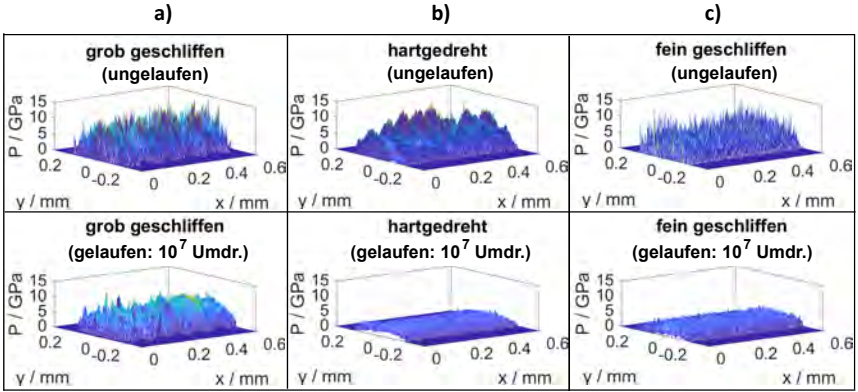


Abb. 7.24: Elastisch simulierte Kontaktpressungen bei nominell 2,4 GPa mit realen Oberflächen a) grob geschliffener, b) hartgedrehter und c) feingeschliffener Lagerring im ungelaufenen und gelaufenen (nach  $10^7$  Umdrehungen) Zustand

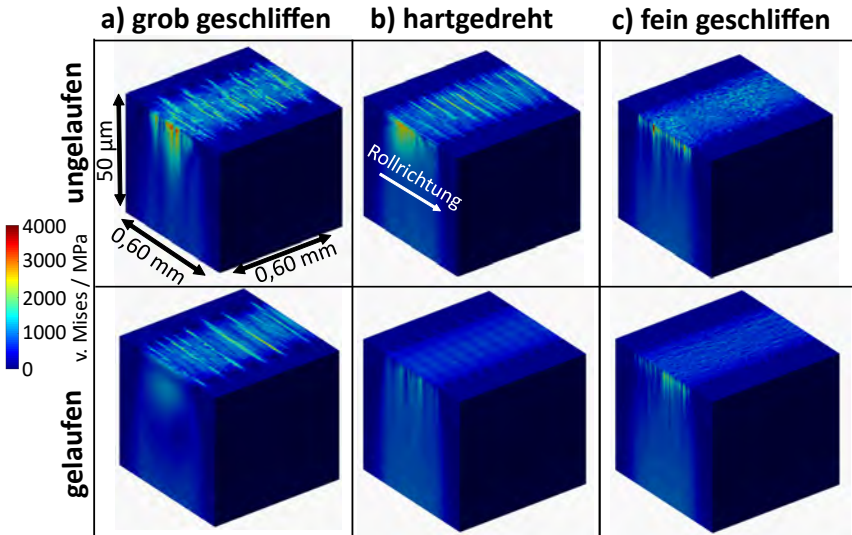


Abb. 7.25: Elastisch simulierte v. Mises Spannungen im Kontakt mit realen Oberflächen a) grobgeschliffener, b) hartgedrehter und c) feingeschliffener Lagerring im ungelaufenen und gelaufenen (nach  $10^7$  Umdrehungen) Zustand

Zur Abschätzung der potenziellen plastischen Zone wurden die Volumenelemente mit Spannungen oberhalb der äquivalenten Fließspannung von 1477 MPa bestimmt, wie in der Tabelle 7.11 gegeben. Im ungelaufenen Zustand weisen die grobgeschliffene und die



feingeschliffene Oberfläche jeweils die größte und kleinste theoretische plastische Zone auf. Die kleinste theoretische plastische Zone für die Oberflächenvariante im gelaufenen Zustand ergibt sich jedoch bei der hartgedrehten Oberfläche. Dieses Ergebnis korreliert mit den Ergebnissen der realen Kontaktfläche, die für die hartgedrehten Variante die kleinsten Spannungen voraussagt.

**Tab. 7.11:** Berechnete potentielle plastische Zone als Anzahl der Volumenelemente  $N_{vol}$  mit einem von Mises Vergleichswert größer als die Fließspannung, für die gemessenen Oberflächen im ungelauten und gelaufenen Zustand (nach  $10^7$  Umdrehungen)

	unbelastet		belastet ( $10^7$ Umdr.)	
	$N_{vol}$	Vol / %	$N_{vol}$	Vol / %
grob geschliffen	434817	8,95	433501	8,92
hartgedreht	81493	0,168	477	0,0098
fein geschliffen	46515	0,9581	491	0,0101

### Simulation des plastischen Verhaltens im oberflächennahen Bereich

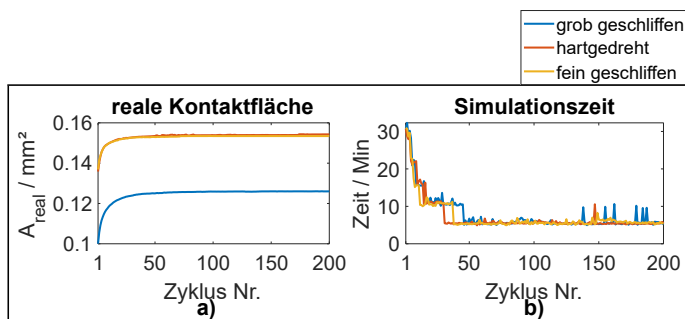
Die Ergebnisse in Abbildung 7.25 zeigen, dass die Plastifizierung im oberflächennahen Bereich zu erwarten ist. Zur simulativen Untersuchung des plastischen Verhaltens der Innenringe wird mit dem Halbraum-Modell ein zyklischer quasistatischer Kontakt zwischen Wälzkörper und Innenring bei der maximalen Last von 310 N simuliert. Die resultierende reale Kontaktfläche und die Kontaktpressungen werden ausgewertet und mit den mittels elastischer Kontaktsimulation mit real gemessenen Oberflächen im gelaufenen Zustand nach  $10^7$  Umdrehungen bestimmten Ergebnissen, verglichen. Es werden ebenfalls die lastinduzierten Eigenspannungen am Innenring simuliert und gegenüber den experimentellen Messungen abgeglichen. Als Eingangsgeometrie des Kontaktmodells werden die realen Oberflächen im unbelasteten Zustand (siehe Abbildung 7.23 in der ersten Spalte) verwendet.

- **Oberflächenveränderung beim elasto-plastischen Materialverhalten**

In der Abbildung 7.26 a) werden die Ergebnisse der mit dem elasto-plastischen Materialverhalten simulierten Veränderung der realen Kontaktflächen gezeigt. Es wurden 200 Lastzyklen bis zur ausreichenden Konvergenz simuliert. Die zu den jeweiligen Lastzyklen benötigten Rechenzeiten sind in 7.26 b) gezeigt.

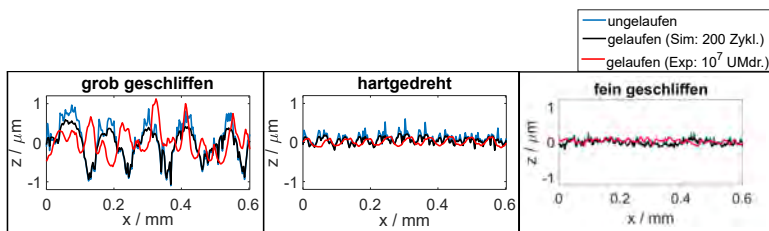
Es ergibt sich im konvergierten Zustand eine reale Kontaktfläche von  $0,1260 \text{ mm}^2$ ,  $0,1543 \text{ mm}^2$  und  $0,1535 \text{ mm}^2$  jeweils für die grobgeschliffene, hartgedrehte und feingeschliffene Oberfläche. Eine Annäherung der mit elasto-plastischen Materialverhalten simulierten realen Kontaktflächen zu den Referenzergebnissen (von  $0,2037 \text{ mm}^2$

und  $0,1896 \text{ mm}^2$  jeweils für die hartgedrehte und fein geschliffene Oberfläche nach  $10^7$  Umdrehungen aus Tabelle 7.10 ) wird festgestellt.



**Abb. 7.26:** a) Mit elasto-plastischem Materialverhalten simulierte reale Kontaktflächen infolge zyklischer Indentation b) benötigte Rechenzeit zu den jeweiligen Lastzyklen.

Wie in Abbildung 7.26 b) zu sehen, beträgt die Rechenzeit pro Lastzyklus max. 30 Minuten bei einer Netzfeinheit von vier Millionen Elementen. Ein Vergleich der elasto-plastisch simulierten Oberflächen mit den gemessenen realen Oberflächen im ungelaufenen und gelaufenen Zustand wird in der Abbildung 7.27 durch die Darstellung der Tiefenprofile gemacht. Eine gute Abschätzung der realen Profiländerung nach der Belastung lässt sich mit dem Halbraum-Modell durch die elasto-plastische Kontaktsimulation machen.

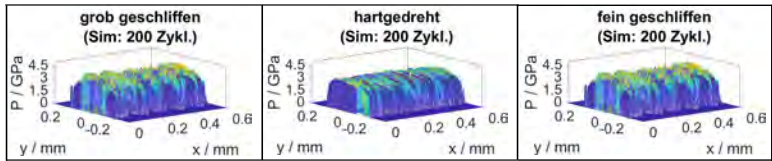


**Abb. 7.27:** Vergleich der Tiefenprofile, gemessen im ungelaufenen, gelaufenen Zustand nach  $10^7$  Umdrehungen und simuliert nach 200 elasto-plastischen Lastzyklen für die drei Oberflächenvarianten (grob geschliffen, hartgedreht und fein geschliffen)

- **Kontaktpressungsveränderung beim elasto-plastischen Materialverhalten**

Die bei der Plastifizierung auftretende Einglättung der Rauheitsspitzen sorgt für eine Reduktion der maximalen Kontaktpressungen. In der Abbildung 7.28 werden

die elasto-plastisch simulierten Kontaktpressungen nach 200 Zyklen dargestellt.



**Abb. 7.28:** Elasto-plastisch simulierten Kontaktpressung nach 200 Lastzyklen

Es ergeben sich im Vergleich zu den Kontaktpressungen mit ungelaufenen Oberflächen aus Abb. 7.24 Reduktionen der maximalen Pressungen von 15,9 GPa auf 4,5 GPa, von 15,9 GPa auf 4,3 GPa und von 17,4 GPa auf 4,1 GPa jeweils für die grobgeschliffene, hartgedrehte und feingeschliffene Oberfläche. Hier korrelieren bei der hartgedrehten und feingeschliffenen Oberfläche die elasto-plastischen berechneten maximalen Kontaktpressungen von 4,3 GPa und 4,1 GPa mit den Referenzwerten von 4,1 GPa und 5,7 GPa (siehe Abb. 7.24) aus der elastischen Berechnung mit der gemessenen Oberfläche im gelaufenen Zustand (nach  $10^7$  Umdrehungen).

- **Simulative versus experimentelle Eigenspannungen**

Zur simulativen Bestimmung der lastinduzierten Eigenspannungen in der Werkstofftiefe für die unterschiedlichen Oberflächenvarianten wurden eine elasto-plastische Kontaktsimulation mit den zuvor simulierten eingelaufenen Oberflächen nach 200 Lastzyklen durchgeführt. Die Abbildung 7.29 zeigt eine Auswertung der simulierten tangentialen Eigenspannungen (ES) in einem Schnitt durch das Volumenelement mit der maximalen Druckeigenspannung. Auf diesem Volumenelement ergeben sich jeweils auch die maximalen Schubspannungen, deswegen wurde die Ermüdungslebensdauerberechnung auf dieses Volumenelement bezogen. Ein Tiefenverlauf durch dieses Volumenelement wird ebenfalls in der Abbildung gezeigt. Es ergibt sich wie in Abbildung 7.29 zu sehen ist, bei der hartgedrehten Oberfläche im Vergleich zu den anderen Oberflächenvarianten eine homogenere und tiefergehende Eigenspannungsverteilung, welche sich positiv auf die Ermüdungslebensdauer auswirkt. Die höchsten Druckeigenspannungswerte betragen im Maximum bei der hartgedrehten Oberfläche -1137 MPa im Vergleich zu -726 MPa und -309 MPa jeweils bei der grobgeschliffenen und feingeschliffenen Oberflächenvariante.

Zur Validierung der simulierten lastinduzierten Eigenspannungen in Abb. 7.29 wurden Eigenspannungen gemessen. Diese Messungen wurden am Lehrstuhl für Werkstoffkunde (WKK) der Rheinland-Pfälzische Technischen Universität Kaiserslautern-Landau (RPTU) im Rahmen des im SFB 926 geförderten Transferprojekts T05N (Einfluss der Oberflächenmorphologie auf die Wälzlagerlebensdauer unter Mischreibungsbedingungen) durchgeführt. Die gemessenen Eigenspannungswerte bei den

gelaufenen Innenring-Proben beinhalten jedoch eine Überlagerung aus fertigungsbedingten und belastungsinduzierten Anteilen.

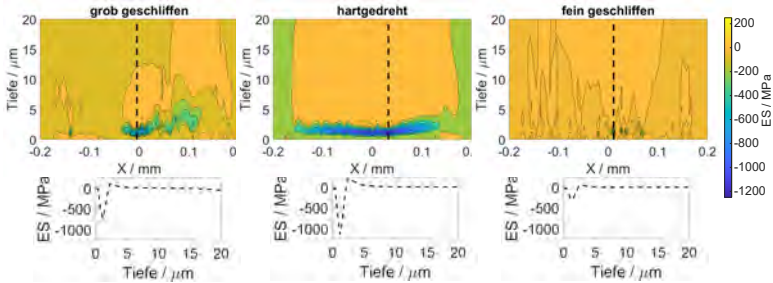


Abb. 7.29: Auswertung der simulierten tangentialen Eigenspannungen auf der Schnittebene durch das Volumenelement mit der maximalen Druckeigenspannung

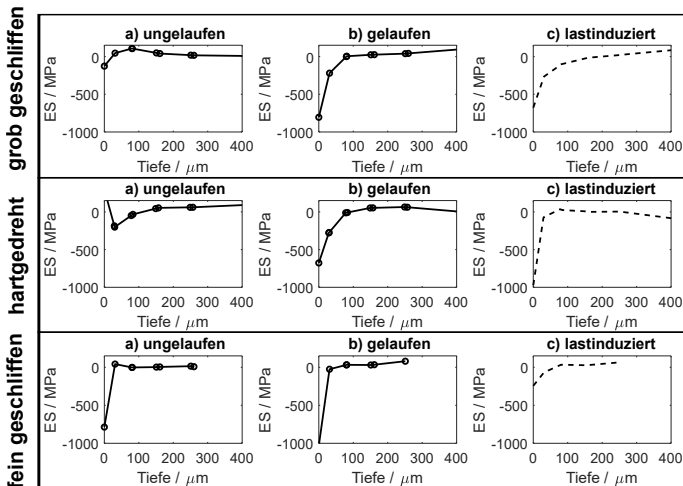


Abb. 7.30: Experimentelle Bestimmung des belastungsinduzierten Eigenspannungsanteils in c), durch Subtraktion der gemessenen Eigenspannungen am Innenring im ungelaufenen Zustand a) von dem gelaufenen Zustand b)

Zur Trennung des lastinduzierten Anteils, wie in Abb. 7.30 gezeigt, wurde analog zu der bei Abb. 7.11 beschriebenen Methode vorgegangen.

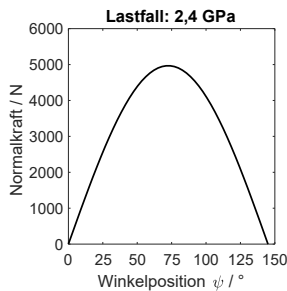
Der Vergleich der experimentell (siehe Abb. 7.30 c) und simulativ (siehe Abb. 7.29) bestimmten belastungsinduzierten Eigenspannungen zeigt, dass mit dem Halbraum-Plastizitätsmodell der Wertebereich der maximalen Eigenspannungen an der Oberfläche gut abgeschätzt werden kann. Es ergeben sich simulativ die maximalen Werte

-726 MPa, -1137 MPa und -309 MPa im Vergleich zu -678 MPa, -972 MPa und -244 MPa, die experimentell ermittelt wurden, jeweils für die grobgeschliffene, hartgedrehte und feingeschliffene Oberfläche.

### Lebensdauerabschätzung mittels Fatemi-Socie Ermüdungsansatz

Beim FATEMI-SOCIE Ermüdungsansatz wird die Lebensdauer lokal in einem kritischen Volumenelement ausgewertet. Hier wurde die Schubspannungshypothese eingesetzt und als kritisches Volumenelement, das mit der maximalen Schubspannung ausgewählt. Dieses liegt in der Tiefe von  $125 \mu\text{m}$  im Berechnungsfall mit der ideal glatten Innenringgeometrie und für alle realen Oberflächen in  $1,17 \mu\text{m}$  Tiefe.

In der Abbildung 7.31 sind die zu dem untersuchten Lastfall im MKS-Modell ermittelten maximalen Kontaktkräfte zwischen Wälzkörper und Innenring für die Winkelpositionen in der Lastzone dargestellt.



**Abb. 7.31:** Im MKS-Modell ermittelte Wälzkörperbelastung als Makrokraftverlauf für Zylinderrollenlager der Typ NU208

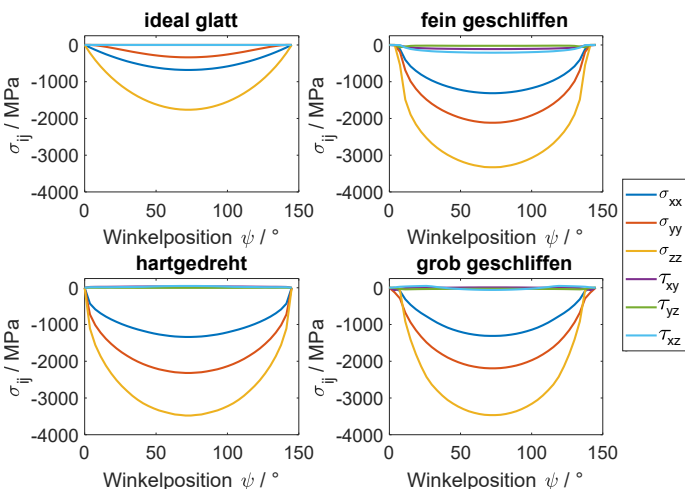
Für das kritische Volumenelement werden bei jeder Winkelposition die Komponenten des Spannungstensors ermittelt. Um Rechenzeit zu sparen, werden diese Spannungskomponenten nicht elasto-plastisch berechnet, sondern rein elastisch mit der zuvor elasto-plastisch berechneten eingeglätteten Oberfläche nach 200 Lastzyklen, wodurch die Plastizität berücksichtigt wird.

Die Zulässigkeit dieser vereinfachten Methode wird im Folgenden überprüft. Für die maximale Kontaktkraft 310 N werden die Komponenten des Spannungstensors  $(\sigma_{xx}, \dots, \tau_{xz})$ , an den kritischen Volumenelementen im elasto-plastischen Berechnungsfall (nach 200 Zyklen) mit denen aus dem elastischen Berechnungsfall mit der eingelaufenen Oberfläche in Tabelle 7.12 verglichen.

**Tab. 7.12:** Vergleich der elasto-plastisch berechneten Spannungskomponenten am kritischen Volumenelement beim 200. Lastzyklus mit der elastischen Berechnung (mit der elasto-plastisch berechneten eingeglätteten Oberfläche nach dem 200. Lastzyklus)

	grob geschliffen		hartgedreht		fein geschliffen	
	elasto-plastisch	elastisch	elasto-plastisch	elastisch	elasto-plastisch	elastisch
$\sigma_{xx}$ / MPa	-1379	-1310	-1406	-1339	-1380	-1312
$\sigma_{yy}$ / MPa	-2129	-2193	-2255	-2319	-2054	-2117
$\sigma_{zz}$ / MPa	-3465	-3466	-3476	-3477	-3327	-3331
$\tau_{xy}$ / MPa	-27	-27	-3	-3	-23	-22
$\tau_{yz}$ / MPa	-59	-59	48	48	-210	-210
$\tau_{xz}$ / MPa	8	8	34	34	-112	-112

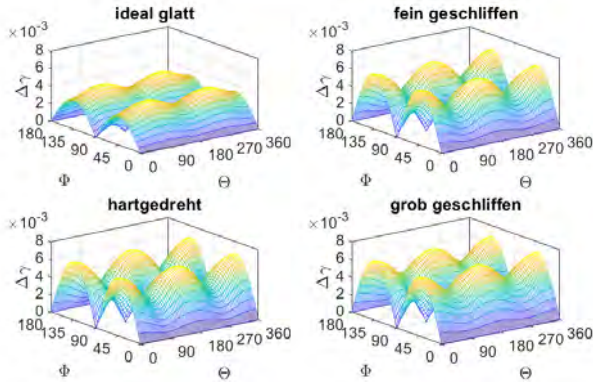
Aus den Ergebnissen in der Tabelle 7.12 ergeben sich für die drei Oberflächenvarianten an den kritischen Volumenelementen für die beiden Methoden ähnliche Spannungskomponenten. Es kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass im eingelaufenen Zustand eine elastische Kontaktsimulation ausreichend ist, um die Spannungen abzuschätzen. Die Spannungskomponenten an den kritischen Volumenelementen für die vier untersuchten Oberflächen werden in Abbildung 7.32 dargestellt.



**Abb. 7.32:** Berechnete Spannungskomponenten an dem kritischen Volumenelement für verschiedene Winkelpositionen

Die äquivalente Scherdehnungsamplitude  $\gamma_{a,eq}$  berechnet sich wie in Abschnitt 7.2 be-

schrieben aus den zwei Hauptbeanspruchungsgrößen: Scherdehnungsamplitude und maximale Normalspannung. In Abb. 7.33 werden für die vier Oberflächenvarianten ideal glatt, fein geschliffen, hartgedreht und grob geschliffen an den kritischen Volumenelementen die Scherdehnungsamplituden für alle diskreditierten Ebenen II dargestellt. Es ergeben sich maximale Scherdehnungsamplituden von jeweils 0,0044, 0,0063, 0,0064 und 0,0068. Höhere Scherdehnungsamplituden führen in der FATEMI-SOCIE Gleichung (7.1) zu hohen Schadensparametern und somit zu geringeren Lebensdauerwerten.



**Abb. 7.33:** Maximale Scherdehnungsamplitude auf allen diskretisierten Ebenen II des kritischen Volumenelements für die Oberflächenvarianten: ideal glatt, fein geschliffen, hartgedreht und grob geschliffen

In der Tabelle 7.13 sind die Ergebnisse des berechneten Schadensparameters  $\gamma_{a,eq}$ , die Lastzyklenanzahl  $N_f$  im FATEMI-SOCIE Modell sowie die Umrechnung (mit Hilfe der Gleichung 7.5) in die Anzahl der Innenringumdrehungen  $N_{IR}$  angegeben.

**Tab. 7.13:** Zusammenfassung der Simulationsergebnisse: Schadensparameter  $\gamma_{a,eq}$ , die kritische Lastzyklenanzahl  $N_f$  und die Anzahl der Innenringumdrehungen  $N_{IR}$

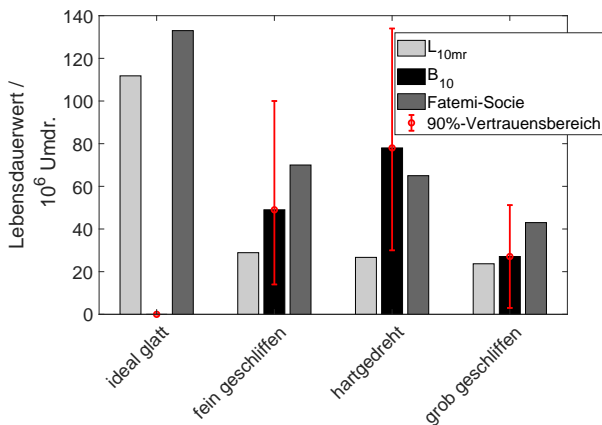
Oberflächen	$\gamma_{a,eq} / -$	$N_f / 10^6$	$N_{IR} / 10^6$
ideal glatt	0,0027	722	133
fein geschliffen	0,0028	381	70
hartgedreht	0,0028	355	65
grob geschliffen	0,0030	234	43

**Tab. 7.14:** Nach [DIN26281] berechnete  $L_{10}$  und experimentell bestimmte Lebensdauerwerte  $B_{10}$

Oberflächen	$L_{10mr}$	$B_{10}$
ideal glatt	111,8	
fein geschliffen	28,9	49,0
hartgedreht	26,7	78,0
grob geschliffen	23,7	27,1

Zum Vergleich der mit dem FATEMI-SOCIE Modell simulierten Lebensdauerwerte werden in der Tabelle 7.14 die nach [DIN26281] berechneten  $L_{10mr}$  (Erweiterte Modifizierte-Referenz-Lebensdauer) und die experimentell aus statistisch abgesicherten Lebensdauerersuchen an Vier-Lager-Prüfständen ermittelten Lebensdauerwerte  $B_{10}$  angegeben [FRKS23].

Nach der [DIN26281] ergeben sich für die drei rauen Oberflächenvarianten grob geschliffen, hartgedreht und fein geschliffen ähnliche Lebensdauerwerte. Diese sind, wie in der Abb. 7.34 veranschaulicht wird, insbesondere bei der fein geschliffenen und hartgedrehten Oberflächenvariante im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen deutlich kleiner (jeweils ca. 41 % und 67 % Abweichung). Das lokale Ermüdungslebensdauermodell nach FATEMI-SOCIE zeigt mit den Abweichungen von 43 %, 20 % und 37 % zu den experimentellen Ergebnissen jeweils für die fein geschliffenen, hartgedrehten und grob geschliffenen Oberflächenvarianten, höhere Übereinstimmungen durch die detaillierte Betrachtung der Oberflächenmorphologie.



**Abb. 7.34:** Vergleich der nach [DIN26281] berechnete  $L_{10}$  und FATEMI-SOCIE simulierten mit experimentelle  $B_{10}$  Lebensdauerwertefür die untersuchten Oberflächen



## Zusammenfassung und Ausblick

Der entwickelte Multiskalenansatz wurde zur simulativen Untersuchung von Zylinderrollenlagern des Typs NU208 eingesetzt. Im Fokus der Untersuchungen stand der Einfluss der Oberflächentopographie des Innenrings und das daraus resultierende plastische Verhalten auf die Ermüdungsdauer. Dazu wurden drei Fertigungsverfahren, nämlich das Grobschleifen, das Hartdrehen und als Referenz das Feinschleifen mit anschließendem Honen herangezogen. Für jede Variante wurden zuerst auf Basis von Versuchen experimentell die Oberflächentopographie und die Eigenspannungen im ungelauten und mit 2,4 GPa im gelaufenen Wälzkörper-Innenringkontakt charakterisiert.

Die gemessenen Größen im gelaufenen Zustand bildeten die Referenzwerte zur Validierung des Halbraum-Kontaktmodells. Aus elastischen Kontaktberechnungen konnten die tribologischen Eigenschaften, die sich aus den unterschiedlichen Oberflächentopographien ergeben, analysiert werden. Dazu wurde die reale Kontaktfläche als auch die Spannungsverteilung bei der Oberflächentopographie im gelaufenen Zustand bestimmt. Die hartgedrehte Oberfläche erweist sich durch die größte reale Kontaktfläche und die geringeren maximalen Spannungen im gelaufenen Zustand als tribologisch besonders gut geeignet.

Die bei der gemessenen Oberflächentopographie im gelaufenen Zustand festzustellende Einglättung im Vergleich zum ungelauten Zustand wurde simulativ mittels elasto-plastischen Kontaktsimulationen untersucht. Als geometrische Eingangsgröße im Kontaktmodell wurden die gemessenen Oberflächen im ungelauten Zustand verwendet. Dabei wurde der quasistatische zyklische Wälzkontakt zwischen WK/IR mit elasto-plastischen Materialverhalten der Innenringe bis zur Konvergenz der realen Kontaktfläche gelöst. Es konnte eine Annäherung der elasto-plastisch berechneten realen Kontaktfläche zu den elastischen Kontaktsimulation mit Berücksichtigung der Oberflächentopographie im gelaufenen Zustand (nach  $10^7$  Umdrehungen) festgestellt werden. Ebenso zeigte sich eine Korrelation zwischen den maximalen Kontaktpressungen. Ein Vergleich der simulierten Eigenspannung mit den experimentellen Werten zeigte, dass mit dem Halbraum-Kontaktmodell Eigenspannungen nach dem Verlauf und den maximalen Werten gut abgeschätzt werden können.

Es konnte gezeigt werden, dass für eine eingeglättete Oberflächentopographie nahezu identische Spannungsverteilungen aus der elasto-plastischen und der rein elastischen Kontaktsimulation resultieren. Diese Erkenntnis wurde bei der Lebensdauerberechnung verwendet, um Rechenzeit zu sparen. Mit dem lokalen Lebensdauerermüdungsmodell nach FATEMI-SOCIE konnten im Vergleich zu der nach Norm berechneten  $L_{10mr}$  genauere Lebensdauerergebnisse erzielt werden.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Eine Erweiterung der bereits am Lehrstuhl existierenden Semi-analytischen Kontaktmodell wurde gemacht und ermöglichte dadurch mit dem Modell in der Dichtungstechnik die Untersuchung der Verschleiß und Dichtfähigkeit von Radialwellendichtungen. Eine gute Vorhersage der verschlissenen realen Dichtlippengeometrie konnte mit dem Modell erzielt werden. Im Weiteren wurde die Dichtfähigkeit untersucht, indem die Schubspannungen im Dichtkontakt ermittelt wurden. Aus diesen Schubspannungen konnte ein Arbeitsintegral abgeleitet werden. Es ergaben sich die drei charakteristische Arbeitsenergien  $\Delta E_1$ ,  $\Delta E_2$  und  $\Delta E_3$ , wobei die Dichtfunktion von der Arbeitsenergie  $\Delta E_2$  maßgeblich abhängt. Eine gute Korrelation zwischen der simulierten reibungs- und verschleißbedingte Veränderung dieser Arbeitsenergie mit der Veränderung der experimentell gemessene Rückförderwert konnte festgestellt werden. Eine Abnahme der Arbeitsenergie  $\Delta E_2$  beziehungsweise der Rückförderwert charakterisiert im Betrieb eine Verkleinerung der Dichtfähigkeit.

Zukünftige Arbeiten könnten sich mit zwei in dieser Arbeit unberücksichtigte Punkte befassen. Der erste Punkt wäre die Implementierung der Elastohydrodynamik im aktuellen Modell und der zweite Punkt, wie in der Arbeit [GNJ06] am Beispiel des Wälzkontakt gezeigt, die Nutzung des Kontaktmodells für eine verschleißoptimierte Dichtlippengeometrieauslegung

In der Anwendung Wälzlager wurde ein multiskalen Ansatz zur Lebensdauerabschätzung entwickelt und auf Zylinderrollenlager Innenringe angewendet. Auf der Makroebene wurde ein MKS Modell eingesetzt, zur Bestimmung der maximalen Kontaktkräfte zwischen Wälzkörper und Innenring beim Durchlauf der Wälzkörper durch die Lastzone. Diese Makrokräfte wurden auf der Mikroebene skaliert und dort wurden im Halbraummodell die Materialspannungen bestimmt. Die Materialspannungen auf einen durch die Schubspannungshypothese definierte kritisches Volumelement diente als Eingangsgrößen für die Ermüdungslebensdauerberechnung mit dem FATEMI-SOCIE Ansatz. Im Projekt T05 des SFB 926 wurde beispielsweise der Einfluss der Oberflächentopographie des Innenrings und das daraus resultierende plastische Verhalten auf die Ermüdungslebensdauer untersucht. Die drei Fertigungsverfahren: Grobschleifen, Hartdrehen und Feinschleifen wurden herangezogen. Die Ergebnisse der Kontaktsimulationen sagten für die hartgedrehten Oberflächenvariante das beste tribologische Verhalten (charakterisiert durch die größte reale Kontaktfläche und ein homogenes Eigenspannungsfeld im Material) voraus. Dieses Ergebnis konnte experimentell, durch die beim hartgedrehten Innenring gemessenen maximalen Lebensdauerwert bestätigt werden. Mit dem FATEMI-SOCIE Modell konnte im Vergleich zu der Normberechnung genauere Lebensdauerwerte bestimmt werden.

In dieser Arbeit blieb bei der Lösung des Kontakt Wälzkörper-Innenrings der Einfluss

---

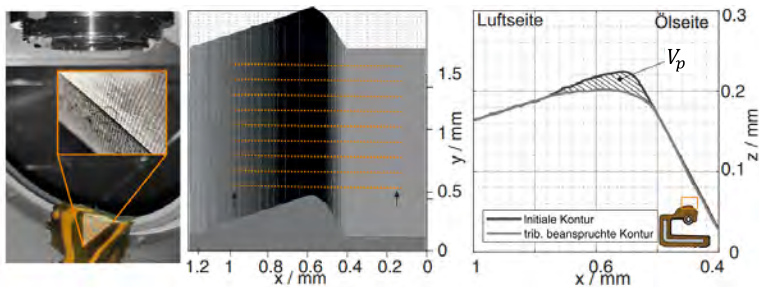
der Materialinhomogenität unberücksichtigt und diese könnte in zukünftigen Arbeiten betrachtet werden.

# A Anhang: Eingangsgrößen und Datenaufbereitung zur Verschleißsimulation im Dichtkontakt

Zur Verschleißsimulation werden die Materialparameter und Geometrie der Kontaktpartner, der Verschleißkoeffizient sowie die Reibarbeit benötigt. Deren experimentelle Bestimmung wird im Folgenden erläutert.

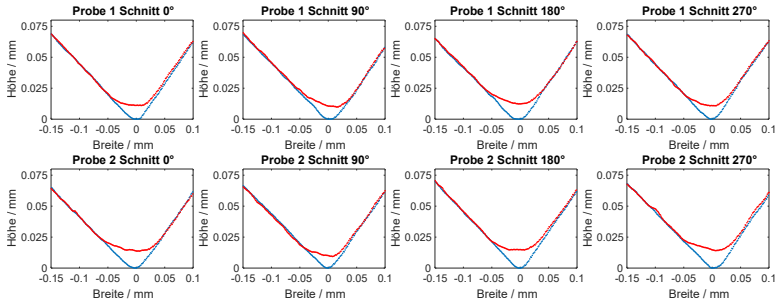
## A.1 Geometrie der Kontaktpartner

Die Geometrie der Gegenauflfläche der Welle wurde der Einfachheit halber als ideal glatt angenommen. Die reale Kontur der Dichtkante wurde dagegen mit der Methode der Streifenlichtprojektion [SBKT21] dreidimensional vermessen. Der Messaufbau besteht aus einer einstellbaren und drehbaren Teilungsscheibe, in die ein RWDR oder eine Ringprobe per Adapter eingelegt und positioniert werden kann [Burk22]. Die Messung wird an vier Stellen über den Umfang im Abstand von 90° je Probe in mathematisch positiver Drehrichtung ausgeführt [Burk22].



**Abb. A.1:** Links: Messung einer RWDR-Dichtkante mittels Streifenlichtprojektion. Mitte: 3D-Ansicht des Messbereichs einer vermessenen RWDR-Dichtkante mit Profilschnitten. Rechts: Verschleißauswertung an der RWDR-Dichtkante über einen Profilvergleich zwischen initialem und tribologisch beanspruchtem Profil. Der Bereich zwischen den Kurven ist der planimetrische Verschleißbetrag  $V_p$  [Burk22]

Ergebnis der Messung sind Höhenkoordinaten eines Dichtkantenabschnittes (Abbildung A.1: Mitte [Burk22]). Diese Daten werden in MATLAB aufbereitet. Abbildung A.2 zeigt beispielhaft für zwei FKM-Elastomerproben, die Auswertung an vier Winkelstellen der Dichtkantenkontur im Ausgangszustand und nach ca. 5000 km tribologischer Belastung während des Verschleißtests mit Mineralöl.



**Abb. A.2:** reale Dichtkantenkonturen von zwei FKM-Elastomerproben gemessen an vier Verschiedenen Winkelstellen ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ) im unbeanspruchten Zustand (bau) und nach ca. 5000 km tribologischer Beanspruchung während des Verschleißtests mit Mineralöl (rot)

Die gemessene Dichtkantenkontur im Ausgangszustand und nach der tribologischen Belastung dienen jeweils als Eingabegeometrie für das Simulationsmodell und zur Validierung der Verschleißsimulation.

## A.2 Bestimmung des Verschleißkoeffizients

Der Verschleißkoeffizient wurde experimentell nach FLEISCHER aus der Reibungsenergiegedichte bestimmt. Die Reibungsenergiegedichte beschreibt das Verhältnis zwischen einer Reibarbeit und dem zugehörigen Verschleißvolumen. Im Folgenden wird auf die experimentelle Bestimmung des Verschleißvolumens und der Reibarbeit eingegangen.

### A.2.1 Verschleißvolumen

Die experimentellen Verschleißvolumen  $V_v$  für die einzelnen untersuchten Kombinationen wurden aus den gemittelten planimetrischen Verschleißflächen  $V_p$  ermittelt. Die planimetrische Verschleißfläche  $V_p$  wird durch den Vergleich der gemessenen Profile im Neuzustand und nach tribologischer Belastung (siehe Abbildung A.1) berechnet. In Tabelle A.1 sind die ermittelten planimetrischen Verschleißflächen mit ihrem Mittelwert für die vier untersuchten Kombinationen zusammengefasst.

**Tab. A.1:** Zusammenfassung der experimentell ermittelten planimetrischen Verschleißflächen  $V_p$  für die untersuchten Kombinationen von Elastomer (ACM, FKM) und Schmierstoff (Mineralöl, PAO), nach dem Verschleißversuch.

	ACM-Mineralöl $V_p / \text{mm}^2$		ACM-PAO $V_p / \text{mm}^2$	
Stellen	Probe1	Probe 2	Probe 1	Probe 2
0°	0,00249731	0,00208523	0,00437884	0,00373558
90°	0,00204962	0,00216394	0,00347932	0,00312629
180°	0,00224078	0,0025849	0,00349433	0,00226201
270°	0,00245285	0,00203836	0,00363339	0,0031609
<b>Mittelwert</b>	0,002264125		0,003408832	
	FKM-Mineralöl $V_p / \text{mm}^2$		FKM-PAO $V_p / \text{mm}^2$	
Stellen	Probe1	Probe 2	Probe 1	Probe 2
0°	0,0007134	0,00077813	0,00085618	0,00076324
90°	0,00075279	0,00090591	0,00102775	0,00114444
180°	0,0005962	0,00114499	0,00382308	0,00238083
270°	0,00067707	0,00035073	0,00175012	0,00099156
<b>Mittelwert</b>	0,000739902		0,00159215	

Die experimentellen Verschleißvolumen  $V_V$  in Tabelle bb wurden für die einzelnen Kombinationen aus den gemittelten planimetrischen Verschleißflächen  $V_p$  in Tabelle A.2 (durch Rotation der Fläche um den geometrischen Schwerpunkt) ermittelt.

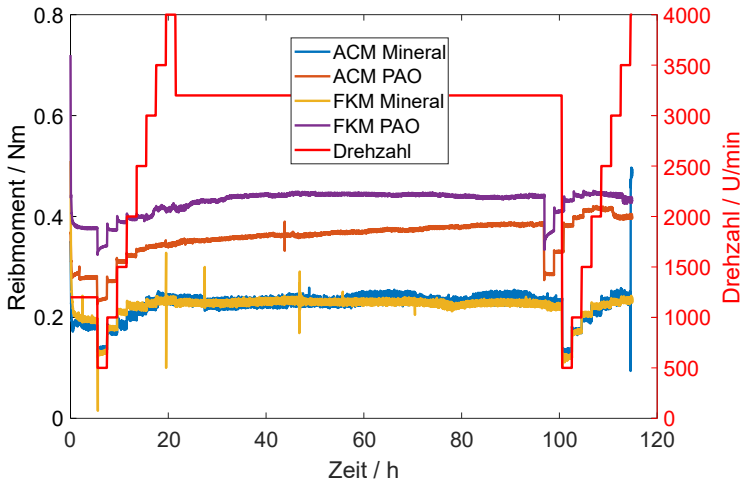
**Tab. A.2:** Aus den Mittelwerten der planimetrischen Verschleißflächen  $V_p$  in der Tabelle A.1 bestimmtes Verschleißvolumen  $V_v$ , aus den experimentellen Reibmomentkurven bestimmte Reibungsarbeit  $E_d$  und aus dem Verschleißvolumen und der Reibungsarbeit bestimmte Reibungsenergiedichte  $e_r$ .

Kombination	$V_v / \text{mm}$	$E_d / \text{Nmm}$	$e_r / (\text{Nmm}/\text{mm}^3)$
ACM – Mineralöl	0,561	3,12E+10	5,57E+10
ACM – PAO	0,83	4,76E+10	5,73E+10
FKM – Mineralöl	0,185	3,11E+10	1,68E+11
FKM – PAO	0,318	5,50E+10	1,73E+11

## A.2.2 Reibarbeit

Im Folgenden wird auf die Bestimmung der in Tabelle A.2 angegebene Reibarbeit eingegangen. Die experimentelle Bestimmung der Reibarbeit am RWDR-Dichtsystem erfolgt in dieser Arbeit an dem am Lehrstuhl für Maschinenelemente und Getriebetechnik (MEGT) vorliegenden Mehrwellenprüfstand mit Reibmomentsensor [Kais16]. Für verschiedene Kombinationen aus Elastomerwerkstoffen und Schmierstoffen wird bei einem

drehzahl- und temperaturgesteuerten (70°C) Verschleißversuch das Reibmoment an der Welle gemessen. Der Verschleißweg beträgt bei jedem in dieser Arbeit durchgeführten Versuch ca. 5000 km. Nach einem Einlauf von 100 km bei einer Drehzahl von 1200 min<sup>-1</sup> werden verschiedene Drehzahlstufen von 500 bis 4500 min<sup>-1</sup> abgefahren. Die Stufen werden konstant für zwei Stunden gehalten. Anschließend wird die Elastomer-Schmierstoff-Kombination bei einer Drehzahl von 3200 min<sup>-1</sup> gefahren, um den Verschleiß durch längere konstante Belastung zu fördern. Anschließend werden die Drehzahlstufen zu Beginn des Versuchs wiederholt. In Abbildung A.3 sind die experimentell ermittelten Reibmomentverläufe und die gefahrenen Drehzahlstufen dargestellt.



**Abb. A.3:** Experimentelle Reibmomentverläufe bei den verschiedenen Elastomer (ACM, FKM)- Schmierstoff (PAO, Mineralöl) - Kombinationen

Mit Hilfe des Radius der Prüfwellen  $r_W$  lässt sich mit der Beziehung (A.1) aus dem zeitlichen Reibmomentverlauf  $M_r(t)$  der Reibkraftverlauf  $F_r(t)$  bestimmen.

$$F_r(t) = \frac{M_r(t)}{r_W} \quad (\text{A.1})$$

Die Bestimmung der Reibarbeit erfolgt über die Integration des Reibkraftverlaufs (A.1) über dem Gleitweg  $s$ . Die infinitesimale Reibarbeit  $dE_d$  einer zeitlich veränderlichen Kraft  $F_r(t)$  kann wie folgt bestimmt werden:

$$dE_d = F_r(t) \cdot ds \quad (\text{A.2})$$

mit  $ds$  als einen infinitesimalen Gleitweg. Dieser lässt sich für die rotierende Welle im Dichtsystem aus dem Wellenradius und der Wellendrehzahl berechnen:

$$ds = 2\pi \cdot n \cdot r_W \cdot dt \quad (\text{A.3})$$

Für jede Drehzahlstufe mit konstanter Drehzahl gilt:

$$\int dE_d = 2\pi \cdot n \cdot r_W \int_{t_1}^{t_2} F_r(t) dt \quad (\text{A.4})$$

Mit (A.4) wird die Reibarbeit bei jeder Drehzahlstufe durch zeitliche Integration des Reibkraftverlaufs  $F_r(t)$  vom Beginn der Stufe (bei der Zeit  $t_1$ ) bis zum Ende (bei der Zeit  $t_2$ ) bestimmt. Die Gesamtreibarbeit wird über den einzelnen Drehzahlstufen bestimmt und anschließend summiert (siehe  $E_d$  in der Tabelle A.2). Die Reibenergiedichten  $e_r$  in der Tabelle A.2 werden jeweils aus den Verhältnissen der experimentellen Verschleißvolumen und Reibarbeiten bestimmt. Aus diesen Werten wird gemäß (6.8) für die jeweiligen Kombinationen bei der Verschleißsimulation ein Verschleißkoeffizient definiert.

### A.3 Materialparameter der Kontaktpartner

Zu den wichtigen Eingangsparametern der Simulation gehören die Materialparameter der Welle und der Elastomerdichtlippe. In dieser Arbeit wird eine nach [DIN3760] geschliffene Stahlwelle aus 16MnCr6 mit dem Elastizitätsmodul  $E = 210$  MPa und der Querkontraktionszahl  $\nu = 0,3$  angenommen. Im Gegensatz zur Welle zeigt die Dichtlippe ein hyperelastisches Verhalten. Die Nichtlinearität im Materialverhalten des Elastomers macht es schwierig, die Dichtlippe mit der Halbraumtheorie zu modellieren, da diese grundsätzlich von einem linear-elastischen Verhalten ausgeht. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit von kleinen Verformungen der Dichtlippe ausgegangen und ein linear elastisches Materialverhalten angenommen. Der Elastizitätsmodul der Dichtlippe für die Simulation kann auf zwei Wegen bestimmt werden. Direkt aus einem Stufenzugversuch, wie es in [Jenn16] gemacht wurde, oder aus den MOONEY-RIVLIN-Parametern  $C10$ ,  $C01$ , wenn diese im Vorfeld bestimmt wurden. Für die zweite Variante wird die nach [Debl05] vorgeschlagene Näherungsformel verwendet:



$$E_{Elastomer} = 6(C10 + C01) \quad (\text{A.5})$$

In dieser Arbeit wurde die erste Bestimmungsmethode bevorzugt und ein Elastizitätsmodul für das Elastomer aus dem Stufenzugversuch, wie in [Jenn16] durchgeführt, verwendet. Aufgrund der Inkompressibilität des Elastomer Werkstoffs wurde im Modell eine Poissonzahl von 0,49 berücksichtigt. Tabelle A.3 fasst die Materialparameter und einige geometrische Werte zusammen, die in der Simulation für beide Kontaktpartner verwendet wurden.

**Tab. A.3:** Bei den Verschleißsimulationen verwendete Materialparameter für die Elastomer-Dichtlippe [Jenn16] und die Stahl-Gegenauflfläche.

<b>Kontaktkörper</b>	E-Modul / MPa	Poissonzahl / -
Welle – Stahl	210	0,3
ACM – Elastomer	1,93	0,49
FKM – Elastomer	4,42	0,49

## Literatur

- [AiSa99] AI, X.; SAWAMIPHAKDI, K.: „Solving Elastic Contact Between Rough Surfaces as an Unconstrained Strain Energy Minimization by Using CGM and FFT Techniques“. *Journal of Tribology*, Bd. 121(4) (1999), S. 639–647.
- [Allw05] ALLWOOD, J.: „Survey and Performance Assessment of Solution Methods for Elastic Rough Contact Problems“. *Journal of Tribology*, Bd. 127(1) (2005), S. 10–23.
- [Arch53] ARCHARD, J. F.: „Contact and Rubbing of Flat Surfaces“. *Journal of Applied Physics*, Bd. 24(8) (1953), S. 981–988.
- [Aul14] AUL, V.: „Kontaktmodelle zur dynamischen Simulation vollrolliger Zylinderrollenlager“. Dissertation. Technische Universität Kaiserslautern, 2014.
- [BLP09] BAART, P.; LUGT, P. M.; PRAKASH, B.: „Review of the lubrication, sealing, and pumping mechanisms in oil- and grease-lubricated radial lip seals“. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, Bd. 223(3) (2009), S. 347–358.
- [BaWe18] BARNETT, M. M.; WEI CAI: „Properties of the Eshelby tensor and existence of the equivalent ellipsoidal inclusion solution“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Bd. 121 (2018), S. 71–80.
- [BeGr02] BECKER, W.; GROSS, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Engineering online library. Berlin: Springer, 2002.
- [BeJo67] BENTALL, R. H.; JOHNSON, K. L.: „Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers“. *International Journal of Mechanical Sciences*, Bd. 9(6) (1967), S. 389–404.
- [BeDa22] BERTSCHE, B.; DAZER, M.: *Zuverlässigkeit im Fahrzeug- und Maschinenbau*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2022.
- [BoSe87] BOLLER, C.; SEEGER, T.: *Materials data for cyclic loading*. Bd. 42. Materials science monographs. Amsterdam: Elsevier, 1987.
- [BNLW05] BOUCLY, V.; NE´LIAS, D.; LIU, S.; WANG, Q. J.; KEER, L. M.: „Contact Analyses for Bodies With Frictional Heating and Plastic Behavior“. *Journal of Tribology*, Bd. 127(2) (2005), S. 355–364.
- [Bous85] BOUSSINESQ, J.: *Application des Potentiels a L’etude de L’Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques*. 1885.
- [Bovi09] BOVIK, A., Hrsg.: *The Essential Guide to Image Processing*. Boston: Academic Press, 2009.

- [BoTa01] BOWDEN, F. P.; TABOR, D.: *The friction and lubrication of solids*. Oxford classic texts in the physical sciences. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- [BrLu90] BRANDT, A.; LUBRECHT, A. A.: „Multilevel matrix multiplication and fast solution of integral equations“. *Journal of Computational Physics*, Bd. 90(2) (1990), S. 348–370.
- [Brit88] BRITZ, S.: „Ein Beitrag zur Erfassung der Funktionsprinzipien Dynamischer Wellendichtungen unter Besonderer Berücksichtigung des Radialwellendichtrings“. Dissertation. Technische Universität Kaiserslautern, 1988.
- [Burk22] BURKHART, C.: „Ein Beitrag zum Verständnis des Verschleißverhaltens im System Radialwellendichtring“. Dissertation. Technische Universität Kaiserslautern, 2022.
- [BHML21] BURKHART, C.; HEIER, M.; MERZ, R.; LÖSCH, J.; WAGNER, C.; THIELEN, S.; SAUER, B.; KOPNARSKI, M.; HASSE, H.: „Einfluss des Schmierstoffs auf das Verschleißverhalten und dessen Mechanismen im System Radialwellendichtring“. *62. Tribologie-Fachtagung*. Hrsg. von GESELLSCHAFT FÜR TRIBOLOGIE E.V. 2021.
- [BPTS20] BURKHART, C.; PETER, K.; THIELEN, S.; SAUER, B.: „Online determination of reverse pumping values of radial shaft seals and their tribologically equivalent system“. *22nd International Colloquium Tribology: Industrial and Automotive Lubrication, Technische Akademie Esslingen (TAE)*. 2020.
- [CaBh05] CAI, S.; BHUSHAN, B.: „A numerical three-dimensional contact model for rough, multilayered elastic/plastic solid surfaces“. *Wear*, Bd. 259(7-12) (2005), S. 1408–1423.
- [Cerr82] CERRUTI, V.: *Ricerche intorno all'equilibrio de' corpi elastici isotropi*. 1882.
- [Chai12] CHAISE, T.: „Mechanical simulation using a semi analytical method : from elasto-plastic rolling contact to multiple impacts“. Dissertation. l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2012.
- [ChWa08] CHEN, W. W.; WANG, Q. J.: „A numerical model for the point contact of dissimilar materials considering tangential tractions“. *Mechanics of Materials*, Bd. 40(11) (2008), S. 936–948.
- [Chiu77] CHIU, Y. P.: „On the Stress Field Due to Initial Strains in a Cuboid Surrounded by an Infinite Elastic Space“. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 44(4) (1977), S. 587–590.
- [Chiu78] CHIU, Y. P.: „On the Stress Field and Surface Deformation in a Half Space With a Cuboidal Zone in Which Initial Strains Are Uniform“. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 45(2) (1978), S. 302–306.

- [CoSe71] CONRY, T. F.; SEIREG, A.: „A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact“. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 38(2) (1971), S. 387–392.
- [Dahi17] DAHIWAL, R.: „Entwicklung eines Berechnungsmoduls zur Dynamiksimulation und Betriebsanalyse von Zylinderrollenlagern unter Berücksichtigung der Umgebungsstruktur in Simpack: Abschlussbericht zum FVA-Vorhaben 625 II“, Bd. ( 1234) (2017).
- [Debl05] DEBLER, C.: „Bestimmung und Vorhersage des Verschleißes für die Auslegungen von Dichtungen“. Dissertation. Universität Hannover, 2005.
- [DRD22] DECHANT, S.; RÜTH, L.; DIMOV, G.: „Kurzfristige Überlasten: Abschlussbericht zum AiF 20733N Forschungsvorhaben Nr. 866 I“, Bd. (2022).
- [DIN26281] DIN 26281:2010, *Wälzlager - Dynamische Tragzahlen und nominelle Lebensdauer - Berechnung der modifizierten nominellen Referenz-Lebensdauer für Wälzlager*. Berlin: Beuth Verlag.
- [DIN3760] DIN 3760:1996, *Radial-Wellendichtringe*. Berlin: Beuth Verlag.
- [DIN55303-7] DIN 55303-7:1996, *Statistische Auswertung von Daten - Teil 7: Schätz- und Testverfahren bei zweiparametrischer Weibullverteilung*. Berlin: Beuth Verlag.
- [DINEN10247] DIN EN 10247:2017, *Metallographische Prüfung des Gehaltes nichtmetallischer Einschlüsse in Stählen mit Bildreihen; Deutsche Fassung EN 10247:2017*. Berlin: Beuth Verlag.
- [DINEN61649] DIN EN 61649:2008, *Weibull Analyse*. Berlin: Beuth Verlag.
- [DINISO/TR1281-1] DIN ISO/TR 1281-1:2022, *Wälzlager - Erläuternde Anmerkungen zur ISO 281 - Teil 1: Dynamische Tragzahlen und nominelle Lebensdauer (ISO/TR 1281-1:2021)*. Berlin: Beuth Verlag.
- [DHY01] DUONG, C.; HART-SMITH, L.; YU, J.: „Analytical approach to bonded repair of elliptical dent, corrosion grind-out, and cut-out“. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Bd. 36(3) (2001), S. 187–193.
- [Eshe59] ESHELBY, J. D.: „The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion“. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, Bd. 252(1271) (1959), S. 561–569.
- [Eshe57] ESHELBY, J. D.: „The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems“. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, Bd. 241(1226) (1957), S. 376–396.

- [Fesi12] FESICH, T. M.: „Festigkeitsnachweis und Lebensdauerberechnung bei komplex mehrachsiger Schwingbeanspruchung“. Dissertation. Universität Stuttgart, 2012.
- [Flei85] FLEISCHER, G.: „Zum energetischen Niveau von Reibpaarungen“. *Schmierungstechnik*, Bd. ( 12) (1985), S. 358–363.
- [FBTS22] FOKO FOKO, F.; BURKHART, C.; THIELEN, S.; SAUER, B.: „Analysis of the Sealing Capability of Radial Shaft Sealing Rings Using a Semi-Analytical Contact Model“. *Tribology Online*, Bd. 17(2) (2022), S. 97–109.
- [FHMS20] FOKO FOKO, F.; HEIMES, J.; MAGYAR, B.; SAUER, B.: „Friction Energy-Based Wear Simulation for Radial Shaft Sealing Ring“. *Lubricants*, Bd. 8(2) (2020), S. 15.
- [FRKS23] FOKO FOKO, F.; RÜTH, L.; KOCH, O.; SAUER, B.: „Study of the Plastic Behavior of Rough Bearing Surfaces Using a Half-Space Contact Model and the Fatigue Life Estimation According to the Fatemi–Socie Model“. *Lubricants*, Bd. 11(3) (2023), S. 133.
- [Fröl16] FRÖLICH, D.: „Strategien und Modelle zur Simulation des Betriebsverhaltens von Radial-Wellendichtringen“. Dissertation. Technische Universität Kaiserslautern, 2016.
- [FMS14] FRÖLICH, D.; MAGYAR, B.; SAUER, B.: „A comprehensive model of wear, friction and contact temperature in radial shaft seals“. *Wear*, Bd. 311(1-2) (2014), S. 71–80.
- [Full11] FULLERINGER, B.: „Semi-analytical modeling of complex mechanical contacts : Application to inclusions and wear of coated surfaces“. Dissertation. L’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2011.
- [FVA 15] FVA 574 II: *RWDR-Dynamik II: Wechselwirkungsverhalten der Systemparameter im RWDR-System: Forschungsvorhaben Nr. 574 II*. 2015.
- [GND10] GALLEGO, L.; NÉLIAS, D.; DEYBER, S.: „A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes I, II and III“. *Wear*, Bd. 268(1-2) (2010), S. 208–222.
- [GNJ06] GALLEGO, L.; NÉLIAS, D.; JACQ, C.: „A Comprehensive Method to Predict Wear and to Define the Optimum Geometry of Fretting Surfaces“. *Journal of Tribology*, Bd. 128(3) (2006), S. 476–485.
- [Gall07] GALLEGO, L.: „Fretting et usure des contacts mécaniques : modélisation numérique“. Dissertation. L’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007.

- [GTGH02] GERBERICH, W. W.; TYMIK, N. I.; GRUNLAN, J. C.; HORSTEMEYER, M. F.; BASKES, M. I.: „Interpretations of Indentation Size Effects“. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 69(4) (2002), S. 433–442.
- [GfT02] GfT: *Tribologie: Verschleiß, Reibung ; Definitionen, Begriffe, Prüfung*. Ausg. Sept. 2002. Bd. 7. GfT-Arbeitsblatt / Gesellschaft für Tribologie. Moers: GfT Ges. für Tribologie, 2002.
- [Gode84] GODET, M.: „The third-body approach: A mechanical view of wear“. *Wear*, Bd. 100(1-3) (1984), S. 437–452.
- [Gode90] GODET, M.: „Third-bodies in tribology“. *Wear*, Bd. 136(1) (1990), S. 29–45.
- [GrWi66] GREENWOOD, A. J.; WILLIAMSON, J. B.: „Contact of nominally flat surfaces“. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, Bd. 295(1442) (1966), S. 300–319.
- [GHW18] GROSS, D.; HAUGER, W.; WRIGGERS, P.: *Hydromechanik, Elemente der höheren Mechanik, numerische Methoden*. 10., verbesserte und ergänzte Auflage. Bd. 4. Lehrbuch. Berlin: Springer Vieweg, 2018.
- [GWZM17] GUAN, J.; WANG, L.; ZHANG, C.; MA, X.: „Effects of non-metallic inclusions on the crack propagation in bearing steel“. *Tribology International*, Bd. 106 (2017), S. 123–131.
- [Haue14] HAUER, F.: „Die elasto-plastische Einglättung rauer Oberflächen und ihr Einfluss auf die Reibung in der Umformtechnik“. Dissertation. Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2014.
- [Henc23] HENCKY, H.: „Über Einige Statisch Bestimmte Fälle Des Gleichgewichts In Plastischen Körpern“. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 3(4) (1923), S. 241–251.
- [HeCh83] HERTBERTZ, R.; CHO, M. L.: „Reibungsmechanismen in der Grenzfläche Werkstück/Werkzeug bei Umformverfahren und daraus resultierende Probleme für theoretische Berechnungen“. *Archiv für das Eisenhüttenwesen*, Bd. ( 54) (1983), S. 499–502.
- [Hert82] HERTZ, H.: „Über die Berührung fester elastischer Körper“. *J. Reine Angew Math*, Bd. ( 92) (1882), S. 156–171.
- [HBZ99] HU, Y.-Z.; BARBER, G. C.; ZHU, D.: „Numerical Analysis for the Elastic Contact of Real Rough Surfaces“. *Tribology Transactions*, Bd. 42(3) (1999), S. 443–452.
- [IoHa85] IOANNIDES, E.; HARRIS, T. A.: „A New Fatigue Life Model for Rolling Bearings“. *Journal of Tribology*, Bd. 107(3) (1985-07), S. 367–377.

- [JNLG02] JACQ, C.; NÉLIAS, D.; LORMAND, G.; GIRODIN, D.: „Development of a Three-Dimensional Semi-Analytical Elastic-Plastic Contact Code“. *Journal of Tribology*, Bd. 124(4) (2002), S. 653–667.
- [Jacq01] JACQ, C.: „Limite d’endurance et durée de vie en fatigue de roulement du 32CrMoV13 nitruré en présence d’indentations“. Dissertation. l’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2001.
- [Jaeg05] JAEGER, J.: *New solutions in contact mechanics*. Southampton: WIT Press, 2005.
- [Jagg57] JAGGER, E. T.: „Rotary Shaft Seals: The Sealing Mechanism of Synthetic Rubber Seals Running at Atmospheric Pressure“. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Bd. 171(1) (1957), S. 597–616.
- [Jenn16] JENNEWEIN, B.: „Integrierter Berechnungsansatz zur Prognose des Dynamischen Betriebsverhaltens von Radialwellendichtringen“. Dissertation. Technischen Universität Kaiserslautern, 2016.
- [Jerb16] JERBI, H.: „Modélisation de l’usure et l’endommagement des contacts nus et revêtus sous chargement de fretting par une méthode semi-analytique“. Dissertation. L’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2016.
- [John03] JOHNSON, K. L.: *Contact mechanics*. 9. print. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
- [JEL80] JOHNSON, W. C.; EARMME, Y. Y.; LEE, J. K.: „Approximation of the Strain Field Associated With an Inhomogeneous Precipitate—Part 2: The Cuboidal Inhomogeneity“. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 47(4) (1980), S. 781–788.
- [JuFa96] JU, Y.; FARRIS, T. N.: „Spectral Analysis of Two-Dimensional Contact Problems“. *Journal of Tribology*, Bd. 118(2) (1996), S. 320–328.
- [JBTW22] JUETTNER, M.; BARTZ, M.; TREMMEL, S.; WARTZACK, S.: „On the Transient Effects at the Beginning of 3D Elastic-Plastic Rolling Contacts for a Circular Point Contact Considering Isotropic Hardening“. *Lubricants*, Bd. 10(3) (2022), S. 47.
- [Kais16] KAISER, C.: „Entwicklung einer Prüfmethodik für Modelluntersuchungen an schmutzbeaufschlagten Radial-Wellendichtringen“. Dissertation. Technische Universität Kaiserslautern, 2016.
- [Kalk77] KALKER, J. J.: „Variational principles of contact elastostatics“. *IMA Journal of Applied Mathematics*, Bd. 20 (1977), S. 199–219.
- [Kalk90] KALKER, J. J.: *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*. Bd. 2. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Springer, 1990.

- [KaRa72] KALKER, J. J.; RANDEN, Y.: „A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-Hertzian half-space contact problems“. *Journal of Engineering Mathematics*, Bd. 6 (1972), S. 193–206.
- [KaMü86] KAMMÜLLER, M.; MÜLLER, H. K.: „Physikalische Ursachen der Dichtwirkung von Radial-Wellendichtringen.“ *ATZ Automobiltechnische Zeitschrift*, Bd. 88 (1986), S. 39–45.
- [Kamm86] KAMMÜLLER, M.: „Zur Abdichtwirkung von radial-Wellendichtringen“. Dissertation. Universität Stuttgart, 1986.
- [KaHi79] KAWAHARA, Y.; HIRABAYASHI, H.: „A Study of Sealing Phenomena on Oil Seals“. *A S L E Transactions*, Bd. 22(1) (1979), S. 46–55.
- [KMS17] KIEKBUSCH, T.; MAGYAR, B.; SAUER, B.: „Multi-Ebenen-Simulation zur Berechnung der lokalen Lebensdauer in hochbelasteten Wälzkontakten“. *12 VDI-Fachtagung Gleit- und Wälzlager - VDI Berichte*, Bd. ( 2308) (2017), S. 103–112.
- [KZLC14] KOUMI, K. E.; ZHAO, L.; LEROUX, J.; CHAISE, T.; NELIAS, D.: „Contact analysis in the presence of an ellipsoidal inhomogeneity within a half space“. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 51(6) (2014), S. 1390–1402.
- [Ladu15] LADUTKIN, D.: „Entstehung, Modifikation und Verminderung von Einschlüssen bei Si-beruhigten Stählen am Beispiel von Wälzlagerstahl“. Dissertation. Universität des Saarlandes, 2015.
- [LFLV98] LAMAGNERE, P.; FOUGERES, R.; LORMAND, G.; VINCENT, A.; GIRODIN, D.; DUDRAGNE, G.; VERGNE, F.: „A Physically Based Model for Endurance Limit of Bearing Steels“. *Journal of Tribology*, Bd. 120(3) (1998), S. 421–426.
- [LaLi10] LANDAU, L. D.; LIFŠIČ, E. M., Hrsg.: *Elastizitätstheorie*. Unveränd. Nachdr. der 7. Aufl. Bd. Bd. 7. Lehrbuch der theoretischen Physik / von L. D. Landau E. M. Lifschitz. In dt. Sprache hrsg. von Gerhard Heber. Frankfurt am Main: Deutsch, 2010.
- [Leid09] LEIDNER, M.: „Kontaktphysikalische Simulation von Schichtsystemen“. Dissertation. Technischen Universität Darmstadt, 2009.
- [LeNi06] LEINE, R. I.; NIJMEIJER, H.: *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [Lero13] LEROUX, J.: „Modélisation numérique du contact pour matériaux composites“. Dissertation. l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2013.



- [LeNé11] LEROUX, J.; NÉLIAS, D.: „Stick-slip analysis of a circular point contact between a rigid sphere and a flat unidirectional composite with cylindrical fibers“. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 48(25-26) (2011), S. 3510–3520.
- [LiWa05] LIU, S.; WANG, Q.: „Elastic Fields due to Eigenstrains in a Half-Space“. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 72(6) (2005), S. 871–878.
- [LWL00] LIU, S.; WANG, Q.; LIU, G.: „A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses“. *Wear*, Bd. 243(1-2) (2000), S. 101–111.
- [LuIo91] LUBRECHT, A. A.; IOANNIDES, E.: „A Fast Solution of the Dry Contact Problem and the Associated Sub-Surface Stress Field, Using Multilevel Techniques“. *Journal of Tribology*, Bd. 113(1) (1991), S. 128–133.
- [LuPa49] LUNDBERG, G.; PALMGREN, A.: „Dynamic Capacity of Rolling Bearings“. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 16(2) (1949), S. 165–172.
- [MacM58] MACMILLAN, W. D.: *Theory of Potential*. USA: Dover Publications Inc, 1958.
- [Matt13] MATTHIAS, S.: „Mathematische Homogenisierung in der Kontinuumsmechanik: Homogenisierung von klassischen hyperelastischen sowie mikropolaren linear-elastischen Materialien mit periodischer Mikrostruktur vermöge der mathematischen Zweiskalenkonvergenz und anschließende Implementierung des homogenisierten hyperelastischen Modells in eine Finite-Elemente-Umgebung“. Dissertation. Technische Universität Darmstadt, 2013.
- [Meij68] MEIJERS, P.: „The contact problem of a rigid cylinder on an elastic layer“. *Applied Scientific Research*, Bd. 18(1) (1968), S. 353–383.
- [MHP12] MENG, C.; HELTSLEY, W.; POLLARD, D. D.: „Evaluation of the Eshelby solution for the ellipsoidal inclusion and heterogeneity“. *Computers & Geosciences*, Bd. 40 (2012), S. 40–48.
- [MePo14] MENG, C.; POLLARD, D. D.: „Eshelby’s solution for ellipsoidal inhomogeneous inclusions with applications to compaction bands“. *Journal of Structural Geology*, Bd. 67 (2014), S. 1–19.
- [Meye14] MEYER, C. S.: *Crack-Inclusion Interaction: A Review*. 2014.
- [Ming52] MING FENG, I.: „Metal Transfer and Wear“. *Journal of Applied Physics*, Bd. 23(9) (1952), S. 1011–1019.
- [MoMu75] MOSCHOVIDIS, Z. A.; MURA, T.: „Two-Ellipsoidal Inhomogeneities by the Equivalent Inclusion Method“. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 42(4) (1975), S. 847–852.

- [Mura98] MURA, T.: *Micromechanics of defects in solids*. 2nd, rev. ed., Reprint. Bd. 3. Mechanics of elastic and inelastic solids. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1998.
- [NBB06] NÉLIAS, D.; BOUCLY, V.; BRUNET, M.: „Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces: Proposal for a Wear or Running-In Model“. *Journal of Tribology*, Bd. 128(2) (2006), S. 236–244.
- [NoWr06] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J.: *Numerical optimization*. Second edition. Springer series in operation research and financial engineering. New York, NY: Springer, 2006.
- [OWV96] OLIVEIRA, S.; WOLLESEN, V.; VÖTTER, M.: „Neue Erklärung des Fördermechanismus von Radialwellendichtringen“. *ATZ - Automobiltechnische Zeitschrift*, Bd. (1996).
- [PaHa81] PAUL, B.; HASHEMI, J.: „Contact Pressures on Closely Conforming Elastic Bodies“. *Journal of Applied Mechanics*, Bd. 48(3) (1981), S. 543–548.
- [PeBh02] PENG, W.; BHUSHAN, B.: „Sliding Contact Analysis of Layered Elastic/Plastic Solids With Rough Surfaces“. *Journal of Tribology*, Bd. 124(1) (2002), S. 46–61.
- [Pöhl14] PÖHL, J. F.: „Randschichtbeanspruchung metallischer Werkstoffe durch Indentation und Kavitation“. Dissertation. Ruhr–Universität Bochum, 2014.
- [PoKe99] POLONSKY, I. A.; KEER, L. M.: „A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques“. *Wear*, Bd. 231(2) (1999), S. 206–219.
- [PoKe00] POLONSKY, I. A.; KEER, L. M.: „Fast Methods for Solving Rough Contact Problems: A Comparative Study“. *Journal of Tribology*, Bd. 122(1) (2000), S. 36–41.
- [Redd02] REDDY, J. N.: *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. 2. ed. Mechanical engineering. Hoboken, NJ: Wiley, 2002.
- [RoSa18] RODA-CASANOVA, V.; SANCHEZ-MARIN, F.: „Adaptive Mesh Refinement Strategy for the Semi-Analytical Solution of Frictionless Elastic Contact Problems“. *Contact and Fracture Mechanics*. Hrsg. von DARJI, P. H.; DARJI, V. P. InTech, 2018.
- [SJSR09] SADEGHI, F.; JALALAHMADI, B.; SLACK, T. S.; RAJE, N.; ARAKERE, N. K.: „A Review of Rolling Contact Fatigue“. *Journal of Tribology*, Bd. 131(4) (2009).

- [SaFl95] SALANT, R. F.; FLAHERTY, A. L.: „Elastohydrodynamic Analysis of Reverse Pumping in Rotary Lip Seals With Microasperities“. *Journal of Tribology*, Bd. 117(1) (1995), S. 53–59.
- [Sauc16] SAUER, B.: *Konstruktionselemente des Maschinenbaus 1*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016.
- [SJS19] SAUVAGE, P.; JACOBS, G.; SOUS, C.; LÜNEBURG, B.; BECKER, D.; PANTKE, K.: „On an Extension of the Fatemi and Socie Equation for Rolling Contact in Rolling Bearings“. *Proceedings of the 7th International Conference on Fracture Fatigue and Wear*. Hrsg. von ABDEL WAHAB, M. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Singapore: Springer Singapore, 2019, S. 438–457.
- [Scha15] SCHAEFFLER TECHNOLOGIES AG: *Die Wälzlagerpraxis: Handbuch für die Berechnung und Gestaltung von Lagerungen*. 4. Auflage. Vereinigte Fachverlage GmbH, 2015.
- [Scha58] SCHALLAMACH, A.: „Friction and abrasion of rubber“. *Wear*, Bd. 1(5) (1958), S. 384–417.
- [SBKT21] SCHOLLMAYER, T.; BURKHART, C.; KASSEM, W.; THIELEN, S.; SAUER, B.: „Verschleißanalyse an Radialwellendichtringen und weiteren Maschinenelementen mittels Laserprofilometrie“. *Gesellschaft für Tribologie e.V. (Hg.) 2021 – 62. Tribologie-Fachtagung*, Bd. (2021), S. 70/1-70–10.
- [SPS04] SHAKHVOROSTOV, D.; PÖHLMANN, K.; SCHERGE, M.: „An energetic approach to friction, wear and temperature“. *Wear*, Bd. 257(1-2) (2004), S. 124–130.
- [SiHu00] SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R.: *Computational inelasticity*. Corr. 2. print. Bd. 7. Interdisciplinary applied mathematics Mechanics and materials. New York, Heidelberg und Berlin: Springer, 2000.
- [Soci00] SOCIE, D.: *Multiaxial Fatigue*. 1st ed. Warrendale: SAE International, 2000.
- [SpAm12] SPINU, S.; AMARANDEI, D.: „Numerical Simulation of Slip-Stick Elastic Contact“. *Numerical Simulation - From Theory to Industry*. Hrsg. von ANDRIYCHUK, M. InTech, 2012.
- [SWZZ20] SUN, L.; WANG, Q. J.; ZHANG, M.; ZHAO, N.; KEER, L. M.; LIU, S.; CHEN, W. W.: „Discrete convolution and FFT method with summation of influence coefficients (DCS-FFT) for three-dimensional contact of inhomogeneous materials“. *Computational Mechanics*, Bd. 65(6) (2020), S. 1509–1529.
- [Swif52] SWIFT, H. W.: „Plastic instability under plane stress“. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Bd. 1(1) (1952), S. 1–18.

- [Teix12] TEIXEIRA ALVES, J.: „Definition analytique des surfaces de denture et comportement sous charge des engrenages spiro-coniques“. Dissertation. l’Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2012.
- [TGV10] TEIXEIRA ALVES, J.; GUINGAND, M.; VAUJANY, J.-P. DE: „Set of functions for the calculation of bending displacements for spiral bevel gear teeth“. *Mechanism and Machine Theory*, Bd. 45(2) (2010), S. 349–363.
- [TMS20] THIELEN, S.; MAGYAR, B.; SAUER, B.: „Thermoelastohydrodynamic Lubrication Simulation of Radial Shaft Sealing Rings“. *Journal of Tribology*, Bd. 142(5) (2020).
- [Tkac18] TKACHUK, M.: „A numerical method for axisymmetric adhesive contact based on kalker’s variational principle“. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Bd. 3(7 (93)) (2018), S. 34–41.
- [WäEs18a] WÄCHTER, M.; ESDERTS, A.: „On the estimation of cyclic material properties: Part 1: quality of known estimation methods : dedicated to Professor Dr.-Ing. Harald Zenner on the occasion of his eightieth birthday = Zur Abschätzung zyklischer Werkstoffkennwerte : Teil 1: Güte bekannter Abschätzmethode“. *Materials testing*, Bd. (2018).
- [WäEs18b] WÄCHTER, M.; ESDERTS, A.: „On the estimation of cyclic material properties: Part 2: introduction of a new estimation method : dedicated to Professor Dr.-Ing. Harald Zenner on the occasion of his eightieth birthday = Zur Abschätzung zyklischer Werkstoffkennwerte : Teil 2: Einführung einer neuen Abschätzmethode“. *Materials testing*, Bd. (2018).
- [WSZL20] WANG, Q. J.; SUN, L.; ZHANG, X.; LIU, S.; ZHU, D.: „FFT-Based Methods for Computational Contact Mechanics“. *Frontiers in Mechanical Engineering*, Bd. 6 (2020).
- [WWLZ15] WANG, T.; WANG, L.; LE GU; ZHENG, D.: „Stress analysis of elastic coated solids in point contact“. *Tribology International*, Bd. 86 (2015), S. 52–61.
- [WWWZ10] WANG, Z.-J.; WANG, W.-Z.; WANG, H.; ZHU, D.; HU, Y.-Z.: „Partial Slip Contact Analysis on Three-Dimensional Elastic Layered Half Space“. *Journal of Tribology*, Bd. 132(2) (2010).
- [WJZA13] WANG, Z.; JIN, X.; ZHOU, Q.; AI, X.; KEER, L. M.; WANG, Q.: „An Efficient Numerical Method With a Parallel Computational Strategy for Solving Arbitrarily Shaped Inclusions in Elastoplastic Contact Problems“. *Journal of Tribology*, Bd. 135(3) (2013), S. 031401.

- [WYW15a] WANG, Z.; YU, C.; WANG, Q.: „An efficient method for solving three-dimensional fretting contact problems involving multilayered or functionally graded materials“. *International Journal of Solids and Structures*, Bd. 66 (2015), S. 46–61.
- [WYW15b] WANG, Z.; YU, C.; WANG, Q.: „Model for Elastohydrodynamic Lubrication of Multilayered Materials“. *Journal of Tribology*, Bd. 137(1) (2015).
- [Wert39] WERTERGAARD, H. M.: „Bearing Pressures and Cracks“. *ASME Journal of Applied Mechanics*, Bd. ( 49) (1939), S. 4953.
- [Weyh16] WEYHMÜLLER, T.: „Fertigungstechnische und tribologische Wirkmechanismen beim Polymerlappen am Beispiel der Werkstoffpaarung einer Nockenwellenlagerung“. Dissertation. Karlsruher Instituts für Technologie, 2016.
- [Will20] WILLERT, E.: „Kontaktmechanische Grundlagen“. *Stoßprobleme in Physik, Technik und Medizin*. Hrsg. von WILLERT, E. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020, S. 17–93.
- [Will08] WILLNER, K.: „Fully Coupled Frictional Contact Using Elastic Halfspace Theory“. *Journal of Tribology*, Bd. 130(3) (2008).
- [Wrig01] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin und Heidelberg: Springer, 2001.
- [YZLL06] YANG, Z. G.; ZHANG, J. M.; LI, S. X.; LI, G. Y.; WANG, Q. Y.; HUI, W. J.; WENG, Y. Q.: „On the critical inclusion size of high strength steels under ultra-high cycle fatigue“. *Materials Science and Engineering: A*, Bd. 427(1-2) (2006), S. 167–174.
- [YWW14] YU, C.; WANG, Z.; WANG, Q. J.: „Analytical frequency response functions for contact of multilayered materials“. *Mechanics of Materials*, Bd. 76 (2014), S. 102–120.
- [YZLL17] YU, Z.-Y.; ZHU, S.-P.; LIU, Q.; LIU, Y.: „Multiaxial Fatigue Damage Parameter and Life Prediction without Any Additional Material Constants“. *Materials (Basel, Switzerland)*, Bd. 10(8) (2017).
- [ZCKW09] ZHOU, K.; CHEN, W. W.; KEER, L. M.; WANG, Q. J.: „A fast method for solving three-dimensional arbitrarily shaped inclusions in a half space“. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Bd. 198(9-12) (2009), S. 885–892.
- [ZJWW15] ZHOU, Q.; JIN, X.; WANG, Z.; WANG, J.; KEER, L. M.; WANG, Q.: „Numerical Implementation of the Equivalent Inclusion Method for 2D Arbitrarily Shaped Inhomogeneities“. *Journal of Elasticity*, Bd. 118(1) (2015), S. 39–61.

- 
- [ZJWW16] ZHOU, Q.; JIN, X.; WANG, Z.; WANG, J.; KEER, L. M.; WANG, Q.: „Numerical EIM with 3D FFT for the contact with a smooth or rough surface involving complicated and distributed inhomogeneities“. *Tribology International*, Bd. 93 (2016), S. 91–103.
- [ZJWY16] ZHOU, Q.; JIN, X.; WANG, Z.; YANG, Y.; WANG, J.; KEER, L. M.; WANG, Q.: „A mesh differential refinement scheme for solving elastic fields of half-space inclusion problems“. *Tribology International*, Bd. 93 (2016), S. 124–136.
- [ZLPZ18] ZHU, S.-P.; LIU, Q.; PENG, W.; ZHANG, X.-C.: „Computational-experimental approaches for fatigue reliability assessment of turbine bladed disks“. *International Journal of Mechanical Sciences*, Bd. 142-143 (2018), S. 502–517.

## Eigene Veröffentlichungen zur Dissertation

1. THIELEN, S.; MAGYAR, B.; FOKO FOKO, F.; SAUER, B.: „EHL Simulation of the Radial Shaft Sealing System“, 6th World Tribology Congress (WTC), Beijing, 2017.
2. THIELEN, S.; MAGYAR, B.; FOKO FOKO F.; SAUER, B.: „EHL simulation of radial shaft seals“, 58. Tribologie-Fachtagung. Göttingen: Gesellschaft für Tribologie e.V. (GfT), 2017, 22/1-22/7.
3. THIELEN, S.; MAGYAR, B.; FOKO FOKO, F.; SAUER, B.: „EHL simulation of the radial shaft sealing system“, 21st International Colloquium Tribology. Ostfildern: Technische Akademie Esslingen (TAE), 2018.
4. THIELEN, S.; FOKO FOKO, F.; MAGYAR, B.; SAUER, B.: „Sealing contact shaft structure design using EHL simulation“, in: Proceedings of the 17th EDF / PPRIME Workshop „Green Sealing“ (2018).
5. FOKO FOKO, F.; HEIMES, J.; MAGYAR, B.; SAUER, B.: „Reibenergiebasierte Verschleißsimulation für Radialwellendichtringe“, 60. Tribologie-Fachtagung. Göttingen: Gesellschaft für Tribologie e.V. (GfT), 2019.
6. FOKO FOKO, F.; HEIMES, J.; MAGYAR, B.; SAUER, B.: „Friction Energy Based Wear Simulation for Radial Shaft Sealing Ring“. *Lubricants* 2020, 8(2), 15; doi:10.3390/lubricants802001512.
7. RÜTH, L.; FOKO FOKO, F.; SAUER, B.; OSTERMAYER, P.; BLINN, B.; BECK, T.: „Experimental and simulative investigations into the fatigue life of cylindrical roller bearings under mixed lubrication with differently finished inner rings“, *STLE*, Orlando (2022).
8. FOKO FOKO, F.; BURKHART, C.; THIELEN, S.; SAUER, B.: „Analysis of the Sealing Capability of Radial Shaft Sealing Rings Using a Semi-Analytical Contact Model“, *Tribology Online* 17 (2022) 97-109.
9. FOKO FOKO, F.; RÜTH, L.; KOCH, O.; SAUER, B.: „Study of the Plastic Behavior of Rough Bearing Surfaces Using a Half-Space Contact Model and the Fatigue Life Estimation According to the Fatemi-Socie Model“. *Lubricants* 2023, 11(3), 133; doi:10.3390/lubricants11030133.
10. FOKO FOKO, F.; RÜTH, L.; KOCH, O.; SAUER, B.: „Multiskaliger Ansatz zur Lebensdauerabschätzung von Wälzlagern mit Hilfe des lokalen Ermüdungsmodells nach Fatemi-Socie“. *Forschung im Ingenieurwesen*; doi: 10.1007/s10010-023-00663-w.

## Studentische Arbeiten zur Dissertation

1. ÁLVAREZ BLANCO, M.: „Simulative Untersuchung der Kontakte im Zahnradgetriebe“, Bachelorarbeit, Nr. 1006/18, 2018.
2. BLESSING, P.: „Inverse Methode zu Bestimmung der Materialparameter mittels Nanoindentation“, Projektarbeit, Nr. 1064/19, 2019.
3. LANG, R.: „Ermittlung der Ermüdungsbruchdauer auf Basis der Fatemi und Socie Gleichung“, Studienarbeit, Nr. 1108/20, 2020.
4. TIWO NIMPA, B.: „Semi-analytische Simulation des Einflusses von Einschlüssen auf die Werkstoffbeanspruchung“, Studienarbeit, Nr. 1150/21, 2021.
5. ZIMMERMANN, P.: „Semi-analytische Kontaktmodellierung von beschichteten Körpern“, Masterarbeit, Nr. 1042/19, 2019.
6. ZIMMERMANN, P.: „Elastische Kontaktsimulation von beschichteten Körpern“, Studienarbeit, Nr. 961/17, 2017.
7. MAHESH, A.: „Extension of an analytical wear calculation tool for chain joints and implementation of the calculation steps in MATLAB“, Masterarbeit, Nr. 929/16, 2016.



# Lebenslauf

## **Persönliche Daten**

---

Name	Flavien Foko Foko
Geburtsort	Douala (Kamerun)
Nationalität	Deutsch

## **Ausbildung**

---

10/1999 - 07/2006	Technisches Gymnasium von Bafoussam (Kamerun) Abschluss: Allgemeine Hochschulreife
-------------------	---

## **Hochschulstudium und Sprachausbildung**

---

03/2014 - 10/2015	Technische Universität Kaiserslautern Masterstudium in Computational Engineering
05/2008 - 03/2014	Technische Universität Kaiserslautern Bachelorstudium in Allgemeiner Maschinenbau
01/2008 - 05/2008	Universität des Saarlandes Deutscher Sprachkurs, Abschluss: DSH-3
09/2006 - 07/2007	Goethe Institut (Kamerun) Deutscher Sprachkurs, Abschluss:Zertifikat Deutsch

## **Berufliche Tätigkeit und Erfahrungen**

---

11/2015 - 03/2022	Lehrstuhl für Maschinenelemente und Getriebetechnik Technische Universität Kaiserslautern Wissenschaftlicher Mitarbeiter
06/2010 - 10/2015	Lehrstuhl für Maschinenelemente und Getriebetechnik Technische Universität Kaiserslautern Hilfswissenschaftlicher Mitarbeiter
06/2010 - 10/2015	Lehrstuhl für Technische Mechanik Technische Universität Kaiserslautern Hilfswissenschaftlicher Mitarbeiter
10/2012 - 01/2013	Bosch-Rexroth AG (Homburg, DE), Praktikant

# Dissertationen am Lehrstuhl für Maschinenelemente und Getriebetechnik (MEGT) der TU Kaiserslautern

1. Gähje, Heino: Bewertung der Naßbagger und der sich anschließenden Transportkette im Schelfbereich unter Anwendung eines EDV-Modells. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1981
2. Kahle, Ulrich: Das Micro-CAD-System ein Beitrag zur Einführung einer rechnerunterstützten Konstruktionsweise in kleinen und mittleren Unternehmen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1983
3. Kreutz, Sax: Simulation von Vergleichsmässigungsprozessen auf stirnseitig abgebauten Massenschüttgutkreislagerplätzen mit Hilfe eines elektrischen Analogiemodells und eines gleichwertigen digitalen Modells. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1983
4. Rende, Hikmet: Ein Beitrag zur Untersuchung der elastischen Nachgiebigkeiten der verspannten Teile von Schraubenverbindungen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1984
5. Sponagel, Stefan: Gummi-Metall-Bauteile. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1987
6. Spaltowski, Ralf: Ein Beitrag zur Beurteilung der Trageigenschaften und des Reibungsverhaltens von nicht-newtonschen Flüssigkeiten in stationär und dynamisch bewegten Gleitlagerungen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1988
7. Britz, Stefan: Ein Beitrag zur Erfassung der Funktionsprinzipien dynamischer Wellendichtungen unter besonderer Berücksichtigung des Radialwellendichtrings. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1988
8. Hennerici, Horst: Ein Beitrag zur Berechnung der Beanspruchungen und der nicht-linearen Rückstellkräfte und -momente von dünnen Kreisringblechen als Wirkglieder von Membrankupplungen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1988
9. Jiang, Fuqing: Ratterschwingungen bei selbsthemmenden Schneckengetrieben. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1989
10. Endemann, Ulrich: Ein Beitrag zur theoretischen und experimentelle Untersuchung hydrodynamisch arbeitender Spirarillen-Radialgleitlager. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1989
11. Schlossarczyk, Jörg: Ein Beitrag zur Berechnung, Modellbildung und experimentellen Untersuchung drehelastischer Scheibenkupplungen unter Berücksichtigung des im Betrieb auftretenden Wellenversatzes. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1990

12. Lutz, Thomas: Ein Beitrag zur Berechnung druckbelasteter Elastomerlager. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1990
13. Lehnertz, Hermann: Ein Beitrag zur Berechnung hydrodynamisch arbeitender Radialgleitlager bei stationärem Betrieb mit Hilfe von Kleinrechnern. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1990
14. Maier, Martin: Experimentelle Untersuchung und numerische Simulation des Crashverhaltens von Faserverbundwerkstoffen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1990
15. Steiner, Matthias: Ein Beitrag zur theoretischen und experimentellen Erfassung der Funktionsmechanismen von axialen Gleitringdichtungen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1992
16. Stopp, Ralf: Elastomere Werkstoffe für Formdichtungen. Ein Beitrag zur Dimensionierung von Dichtsystemen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1993
17. Joo, Kwang-Taek: Beitrag zum Einfluß mechanischer Parameter auf das Spurverhalten von dreirädrigen fahrerlosen Transportfahrzeugen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1993
18. Fritzsche, Ralf: Ein Beitrag zur Untersuchung des Verhaltens von Radialwellendichtungen aus Elastomer- und Polytetrafluoräthylen-Material bei speziellen Betriebsbedingungen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1994
19. Becker, Matthias: Ein Beitrag zur Untersuchung der Temperaturentwicklung in einer drehelastischen Scheibenkupplung bei dynamischer Beanspruchung unter besonderer Berücksichtigung des im Betrieb auftretenden Winkelversatzes. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1994
20. Helfrich, Axel: Bestimmung der Kenngrößen von nicht-newtonschen Schmierstoffen für die Dimensionierung hydrodynamisch arbeitender Gleitlager. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1995
21. Mattheis, Fritz: Ein Beitrag zur theoretischen und experimentellen Untersuchung von Flachdichtungen am Beispiel von polymerbeschichteten Metallblechen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1995
22. Koch, Jürgen: Das Gleitlager endlicher Breite eine Lösung der Reynoldsschen Differentialgleichung. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1995
23. Spieth, Gottfried: Mechanische und werkstofftechnische Untersuchung von Verbindungen mit Schrauben aus thermoplastischem Kunststoff. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1995
24. Kramm, Georg: Ein Beitrag zur Modellierung von nicht-newtonschen Schmierstoffen und deren Verwendung für hydrodynamisch arbeitende Gleitlager. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1996

25. Berg, Michael: Untersuchungen zum Schmierstoffdurchsatz und zur Reibungsleistung dynamisch belasteter Radialgleitlager. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1996
26. Mán, László: Ein Beitrag zur Vorhersage von Freßschäden an tribologischen Wirkstellen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 1997
27. Gast, Stefan: Zielfunktionen zur Optimierung der Laufeigenschaften räumlicher Mechanismen auf der Grundlage ebener Kontaktverlustkriterien. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2000, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1, Nr. 331
28. Ruhl, Christian: Ein Beitrag zur Wirkungsweise von Radialwellendichtungen unter Berücksichtigung von rauheitsinduzierter Hydrodynamik und radialen Verlagerungen der Gegenauflfläche. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2000, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1, Nr. 339
29. Huber, Matthias: Ein Beitrag zur Untersuchung hydrodynamisch arbeitender Radialgleitlager unter Berücksichtigung der Schmierölverdünnung mit Rapsölmethylester. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2000, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 12, Nr. 453
30. Fuerst, Axel: Analytische Simulation von hydrodynamischen Gleitlagern in Wasserkraftanlagen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2000, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1, Nr. 343
31. Reif, Andreas: Entwicklung eines integrierten automatisiert schaltenden Getriebes zum Einsatz in Elektrostraßenfahrzeugen. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2000, Fortschritt-Bericht VDI, Reihe 1, Nr. 477
32. Lorreng, Dirk: Ein Beitrag zur Ermittlung und Beschreibung der Fließeigenschaften biologisch schnell abbaubarer Schmierstoffe. Dissertation, Universität Kaiserslautern, 2001, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 3, Nr. 741
33. Péteri, Szabolcs: Untersuchungen von Radialwellendichtringen unter Wellenschwingungen bei unterschiedlichen Temperaturen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2004, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 1, Nr. 379
34. Hahn, Kersten: Dynamik-Simulation von Wälzlagerkäfigen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2005, Skaker Verlag, Reihe Konstruktionstechnik, ISBN 3-83223-760-7
35. Teutsch, Roman: Kontaktmodelle und Strategien zur Simulation von Wälzlagern und Wälzführungen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2005, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 01/2005, ISBN 3-93689-073-0
36. Groß, Torsten: Ein Beitrag zur Entwicklung und Analyse serieller und paralleler Strukturen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2007, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 02/2007, ISBN 978-3-93943-246-3

37. Thullen, Carlo: Entwicklung und Validierung einer Universalprüfeinrichtung zur Untersuchung von dynamisch belasteten Radialwellendichtungen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2008, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 03/2008, ISBN 978-3-93943-289-0
38. Nicola, Andreas: Versuchsgestützte Dynamiksimulation hydraulisch gespannter Kettentriebe und Drehungleichförmigkeiten. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2008, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 04/2008, ISBN 978-3-93943-290-6
39. Aul, Eduard: Analyse von Relativbewegungen in Wälzlagersitzen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2008, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 05/2008, ISBN 978-3-93943-296-8
40. Bach, Peter: Umsturzicherheit von Doppeldeckeromnibussen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2008, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 06/2008, ISBN 978-3-93943-297-5
41. Scheuermann, Miguel: Dynamiksimulation zur virtuellen Produktentwicklung von Rollenschienenführungen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2010, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 07/2010, ISBN 978-3-94143-849-1
42. Wohlgemuth, Martin: Ein Beitrag zur Lebensdauererlängerung von feststoffgeschmierten Rillenkugellagern. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2010, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 08/2010, ISBN 978-3-94143-864-4
43. Lechner, Tim: Prognose der Dichtlippenfolgefähigkeit von RWDR bei dynamisch verlagter Welle. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2012, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 09/2012, ISBN 978-3-94143-891-0
44. Magyar, Balázs: Tribo dynamische Untersuchungen von Zylinderschneckengetrieben. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2012, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 10/2012, ISBN 978-3-94399-503-9
45. Babbick, Till: Wandern von Wälzlageringen unter Punktlast. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2012, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 11/2012, ISBN 978-3-94399-505-3
46. Gastauer, Tobias: Reibungs und Verschleißuntersuchungen von Elastomerwerkstoffen für Dichtungsanwendungen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2012, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 12/2013, ISBN 978-3-94399-516-9
47. Gummer, Alexander: Analytische Untersuchung des Geometrieinflusses auf das Verschleißverhalten von Antriebsketten. Dissertation, Technische Universität Kaiserslau-

- tern, 2013, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 13/2013, ISBN 978-3-94399-523-7
48. Aul, Viktor: Kontaktmodelle zur dynamischen Simulation vollrolliger Zylinderrollenlager. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2014, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 14/2014, ISBN 978-3-94399-555-8
  49. Marquart, Matthias: Ein Beitrag zur Nutzung feststoffgeschmierter Wälzlager. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2014, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 15/2014, ISBN 978-3-94399-552-7
  50. Buchmiller, Viktor: Wälzgelagerter Kurbeltrieb - Potenzial von Wälzlagern im Verbrennungsmotor. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2015, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 16/2015, ISBN 978-3-94399-579-4
  51. Kaiser, Fabian: Ein Simulationsmodell zur Analyse des Schmierfilms von Stangendichtungen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2015, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 17/2015, ISBN 978-3-95974-010-4
  52. Bajer, Peter: Einflussgrößen auf das Schlupfverhalten von Wälzlagern in Generatorgetrieben. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2016, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 18/2016, ISBN 978-3-95974-016-6
  53. Jennewein, Barbara: Integrierter Berechnungsansatz zur Prognose des dynamischen Betriebsverhaltens von Radialwellendichtringen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2016, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 19/2016, ISBN 978-3-95974-015-9
  54. Radnai, Benjamin: Wirkmechanismen bei spannungsbeaufschlagten Wälzlagern. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2016, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 20/2016, ISBN 978-3-95974-029-6
  55. Frölich, Daniel: Strategien und Modelle zur Simulation des Betriebsverhaltens von Radial-Wellendichtringen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2016, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 21/2016, ISBN 978-3-95974-030-2
  56. Sappok, Daniel: Experimentelle und simulative Methoden zur Untersuchung der Verschleißvorgänge im Kettengelenk von Antriebs- und Steuerketten. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2016, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 22/2016, ISBN 978-3-95974-033-3
  57. Kiekbusch, Timo: Strategien zur dynamischen Simulation von Wälzlagern. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2017, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 23/2017, ISBN 978-3-95974-043-2
  58. Kaiser, Christian: Entwicklung einer Prüfmethodik für Modelluntersuchungen an schmutzbeaufschlagten Radial-Wellendichtringen. Dissertation, Technische Univer-

- sität Kaiserslautern, 2017, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 24/2017, ISBN 978-3-95974-052-459
59. Fingerle, Thorsten: Experimentelle und simulative Untersuchung des Schlupfverhaltens von Kegelrollenlagern, Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2017, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 25/2017, ISBN 978-3-95974-054-8
  60. Eckstein, Christian: Ermittlung repräsentativer Lastkollektive zur Betriebsfestigkeit von Ackerschleppern. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2017, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 26/2017, ISBN 978-3-95974-064-7
  61. Fruth, Torben: Vom tribologischen Modellversuch zum Maschinenelement: Berücksichtigung des rheologischen Verhaltens von Schmierstoffen in der Wälzlagersimulation. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2018, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 27/2018, ISBN 978-3-95974-084-5
  62. Fábíán, Csaba: Verbesserung des Wirkungsgrades von Steuerkettentrieben durch bedarfsgerechte Kettenspannung. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2018, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 28/2018, ISBN 978-3-95974-091-3
  63. Oehler, Manuel: Methodische Ansätze zur Optimierung des Wirkungsgrades von Schneckengetrieben. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2018, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 29/2018, ISBN 978-3-95974-097-5
  64. Jürgen, Liebrecht: Technisch-mathematischer Ansatz zur Berechnung der hydraulischen Verluste in Wälzlagern. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2018, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 30/2018, ISBN 978-3-95974-103-3
  65. Krupp, Frederik: Reibleistungsreduzierung in Steuerkettentrieben. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2018, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 31/2018, ISBN 978-3-95974-107-1
  66. Herweg, Sören: Entwicklung und Validierung einer Methodik für erweiterte Ventiltriebssimulationen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2019, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 32/2019, ISBN 978-3-95974-106-4
  67. Pörsch, Sascha: Ansätze zur erweiterten Lebensdauerberechnung feststoffgeschmierter Wälzlager. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2019, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 33/2019, ISBN 978-3-95974-113-2
  68. Thielen, Stefan: Entwicklung eines TEHD-Tribosimulationsmodells für Radialwellendichtringe. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2019, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 34/2019, ISBN 978-3-95974-120-0

69. Weyrich, Dominik: Tribologisches Prüfsystem für Dichtungsanwendungen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2020, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 35/2020, ISBN 978-3-95974-131-6
70. Wiesker, Sebastian: Axialschub an nadelgelagerten Stützrollen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2020, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 36/2020, ISBN 978-3-95974-136-1
71. Bechev, Dani: Prüfmethodik zur Charakterisierung der elektrischen Eigenschaften von Wälzagerschmierstoffen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2020, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 37/2020, ISBN 978-3-95974-135-4
72. Zimmermann, Florian: Optimierung der Energieeffizienz von Kettenspannsystemen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2020, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 38/2020, ISBN 978-3-95974-138-5
73. Becker, Andre: Entwicklung einer Prüfmethodik für Verschleißuntersuchungen an Kettengelenken von Antriebs- und Steuerketten. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2021, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 39/2020, ISBN 978-3-95974-143-9
74. Dahiwal, Rahul: Contribution to the Influence of Cage Wear on the Bearing Life of Solid-Lubricated Rolling Bearings. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2021, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 40/2021, ISBN 978-3-95974-151-4
75. Hofmann, Markus: Auslegung von Berechnungsverfahren am Beispiel der Simulation von Mischreibung. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2022, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 41/2022 ISBN 978-3-95974-174-3
76. Burkhart, Christoph: Ein Beitrag zum Verständnis des Verschleißverhaltens im System Radialwellendichtring. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2022, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 42/2022, ISBN 978-3-95974-184-2
77. Mármol, Margarita: Development of a new bearing geometry to reduce friction losses. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2022, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 43/2022, ISBN 978-3-95974-189-7
78. Sebteini, Seiedardeshir: Kritische Schlupfzustände von Wälzlagern im Mindestlastbereich. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2023, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 44/2023
79. Meffert, Dominik: Einfluss der Bauteilkontur auf das Verschleiß- und Reibungsverhalten von Gelenkketten. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2023, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 45/2023



80. Foko Foko, Flavien: Semi-analytische Kontaktmodellierung in Maschinenelementen. Dissertation, Technische Universität Kaiserslautern, 2023, Maschinenelemente und Getriebetechnik Berichte Bd. 46/2023

