KOMMS Reports Nr. 17 (2022)

Reports zur Mathematischen Modellierung
in MINT-Projekten in der Schule

KOMMS
Kompetenzzentrum für
Mathematische Modellierung in
MINT-Projekten in der Schule

# Mathematische Modellierungswoche

Lena Leiß, Stefan Ruzika, Lisa Schneider, Paul Weber, Corinna Zurloh

Kofinanziert von der
Europäischen Union

RheinlandPfalz
MINISTERIUM FÜR BILDUNG

# 1 Die Felix-Klein-Modellierungswoche

Seit 1993 veranstaltet der Fachbereich Mathematik der TU Kaiserslautern jährlich die mathematischen Modellierungswochen. Die Veranstaltung erwuchs parallel zu der steigenden Relevanz angewandter mathematischer Forschungsgebiete, wie der Technomathematik und der Wirtschaftsmathematik. Sie soll dazu dienen, Schüler:innen die Bedeutung mathematischer Arbeitsweisen in der heutigen Berufswelt, insbesondere in Industrie und Wirtschaft, begreifbar zu machen. Darüberhinaus bietet die Modellierungswoche den teilnehmenden Lehrkräften einen Einblick in die Projektarbeit mit offenen Fragestellungen im Rahmen der mathematischen Modellierung.

## 1.1 Partner und Finanzierung

Seit 2014 wird die Modellierungswoche vom Kompetenzzentrum für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule (KOMMS) organisiert, welches im selben Jahr gegründet wurde. Seit 2022 ist die Veranstaltung ein Teil des Projekts Schulentwicklung für mathematische Modellierung in MINT-Fächern + (SchuMaMoMINT +) und wird durch den Europäischen Sozialfonds (ESF), das Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM), die TU Kaiserslautern sowie den Fachbereich Mathematik der TU Kaiserslautern finanziert. In diesem Zusammenhang gab es auch eine inhaltliche Weiterentwicklung der Modellierungswoche, innerhalb dessen der Aspekt einer Lehrkräftefortbildung stärker in den Vordergrund rückte.

Bereits zuvor war das Fraunhofer ITWM ein wichtiger Kooperationspartner und war an der Gestaltung der mathematischen Modellierungswoche wesentlich beteiligt. Im Jahr 2008 gründeten der Fachbereich Mathematik der TU Kaiserslautern und das ITWM den Verein *Felix-Klein-Zentrum für Mathematik*, um die gemeinsamen Aktivitäten besser steuern zu können. Die Modellierungswoche wurde daraufhin in Felix-Klein-Modellierungswoche umbenannt.

## 1.2 Zielgruppe und Intention

Die Veranstaltung richtet sich an Schüler:innen der gymnasialen Oberstufe in Rheinland-Pfalz, die an MINT-interdisziplinärem Arbeiten mit dem Schwerpunkt Mathematik interessiert sind. Begleitet werden diese von Lehrkräften oder Referendar:innen ihrer Schule, welche die Projektarbeit beobachten und die Projektleiter bei der Betreuung der Gruppen unterstützen.

Ziel ist es, sowohl bei den Schüler:innen als auch bei den Lehrkräften ein Bewusstsein dafür zu schaffen, wie das Arbeiten mit offenen Fragestellungen gelingen kann. Das KOMMS möchte dabei Wege aufzeigen, wie der Unterricht in den MINT-Fächern durch Konzepte wie *Forschendes Lernen* und *Eigenverantwortliche Projektarbeit* weiterentwickelt und bereichert werden kann.

## 1.3 Format und Durchführung

Die Modellierungswoche findet üblicherweise in Jugendherbergen in Rheinland-Pfalz statt. Von Montagmorgen bis Donnerstagabend arbeiten die Gruppen inhaltlich an ihren Projekten. Am Freitag endet die Veranstaltung mit der Präsentation der Ergebnisse.

Meist wird jede Projektgruppe von einer Mitarbeiterin oder einem Mitarbeiter der TU Kaiserslautern sowie einer Lehrkraft betreut. Dabei können sich die Schüler:innen selbst organisieren und auch den Arbeitsrhythmus eigenständig gestalten.

Eine wesentliche Komponente dabei ist die Arbeitsumgebung in der Jugendherberge oder einer vergleichbaren Tagungseinrichtung:

- Jede Projektgruppe arbeitet in ihrem eigenen Seminarraum.
- In den Pausen trifft man sich mit den anderen Gruppen, so dass es einen inhaltlichen Austausch gibt.
- Es gibt wenige Faktoren, die vom Arbeitsthema ablenken; sogar abends arbeiten viele Gruppen noch an ihren Projekten weiter.

## 1.4 Einführung in das mathematische Modellieren

Empirische Studien haben bereits gezeigt, dass Schüler:innen beim Lösen einer Modellierungsaufgabe strukturierter vorgehen, wenn sie eine Instruktion erhalten haben, wie ideal-typische Modellierungsprozesse ablaufen. Ein strukturiertes Vorgehen meint in diesem Kontext, dass die Schüler:innen dem ideal-typischen Ablauf im Modellierungskreislauf folgen. Durch eine solche Instruktion zum Modellieren sollen die Schüler:innen beim Bearbeiten ihrer Modellierungsprojekte unterstützt werden, weswegen wir ihnen dieses Wissen vermitteln, bevor sie mit der Arbeit an Modellierungsprojekten starten.

Zu Beginn erklären wir, was mathematische Modellierung ist und wieso es sinnvoll ist, Modelle zu erstellen. Da die Realität komplex ist und es nicht möglich ist, diese vollständig im mathematischen Modell abzubilden, soll nur ein bestimmter Aspekt der Wirklichkeit in das Modell integriert werden. Somit ergibt sich die Möglichkeit einer überschaubaren Verarbeitung der realen Daten. Im Anschluss illustrieren wir anhand eines Beispiels, wie ein Modellierungsprozess abläuft und wie die einzelnen Schritte aussehen. Dabei wird Bezug zu den Phasen des Modellierungskreislaufs von [KS13] (Abbildung 1) genommen, der im Anschluss vorgestellt wird. Abschließend wird das Vorgehen beim mathematischen Modellieren als Leitfaden formuliert, das an den Lösungsplan von [Bec19] angelehnt ist.

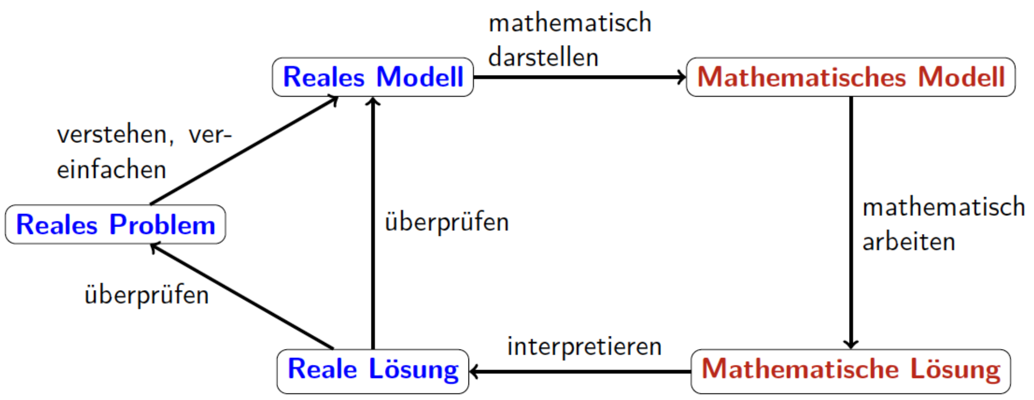



Abbildung 1: Der Modellierungskreislauf nach [KS13].

# 2 Themenauswahl

In dieser Modellierungswoche drehten sich die Projekte rund um das Thema „Winter“. Die folgenden Themen wurden bearbeitet:

1. Wie viel Willkür steckt in Kombi-Sportarten?
2. Gestaltung eines Ablaufplans für die Olympischen Winterspiele
3. Schlittenfahren: Vollgas sicher gebremst
4. Optimale Ausleuchtung einer Skipiste
5. Modellierung von Tageslängen im Jahresverlauf

Beim Thema **Wie viel Willkür steckt in Kombi-Sportarten** ging es darum, wie „fair“ die Bewertung bei Kombi-Sportarten, wie z.B. die Nordische Kombination, ist. Ergebnisse in der einen Disziplin werden mit denen in der anderen „verrechnet“. Unter anderem wurde mithilfe von mathematischen Methoden gezeigt, ob die genutzten Verrechnungsmodelle fair sind.

Im Projekt **Gestaltung eines Ablaufplans für die Olympischen Winterspiele** wurden zuerst Kriterien erstellt, die ein „guter“ Ablaufplan erfüllen muss. Anschließend wurde durch Recherchen ein Datensatz erstellt, der als Grundlage für die Gestaltung eines Sende- sowie Ablaufplans diente. Beide Pläne basieren auf Methoden der ganzzahligen Optimierung sowie dynamischer Programmierung.

Beim Projekt **Schlittenfahren: Vollgas sicher gebremst** wurde sich die Frage gestellt, wie man eigentlich beim Schlittenfahren richtig bremst. Bei der Beantwortung der Frage spielen unter anderem die Faktoren Geschwindigkeit, Hangneigung, Risikobereitschaft, Untergrund, Alter und Körperbau der rodelnden Person eine Rolle. Unter Zuhilfenahme der Physik und Differentialgleichungen konnte die Gruppe die Frage beantworten.

Beim Thema **Optimale Ausleuchtung einer Skipiste** ging es darum, für eine Skipiste einen Plan zur Beleuchtung zu erstellen. Dabei müssen die Vorgaben der FIS erfüllt werden, welche Anforderungen eine künstliche Beleuchtung einer Skiabfahrt erfüllen muss. Die Gruppe stellte sich bei der Lösung des Problems unter anderem die Fragen, was eine gleichmäßige Ausleuchtung bedeutet und wo Strahler entlang der Piste platziert werden sollen.

Die Gruppe **Modellierung von Tageslängen im Jahresverlauf** befasste sich mit der Analyse von Zusammenhängen der Tageslängen im Jahresverlauf. Auffallend ist, dass die Tageslängen im Frühling schneller zunehmen als im Herbst. Mithilfe von GeoGebra 3D wurde ein sphärengeometrisches Modell entwickelt, das die Tageslängen mit guter Genauigkeit berechnet hat.

# 3 Ergebnisse der Projektgruppen

## 3.1 Wie viel Willkür steckt in Kombi-Sportarten?

### 3.1.1 Problemstellung

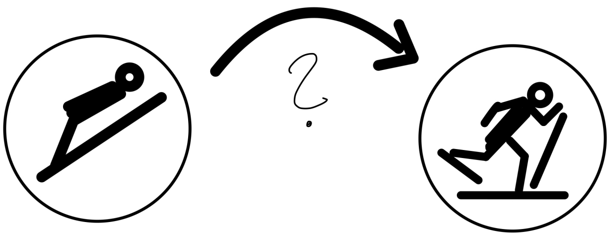
Manche Wintersportarten setzen sich aus zwei oder mehreren Teildisziplinen zusammen: Bei der Nordischen Kombination wird zum Beispiel erst von einer Schanze gesprungen und danach geht’s auf die Loipe. Aber auch beim Biathlon oder bei der Kombination im Ski Alpin gibt es Teilleistungen, die zu einem Gesamtergebnis verbunden werden müssen, also

Strafen in Folge von Schießfehlern oder Zeiten beim Abfahrt und Slalom.

Bei solchen Sportarten muss also festgelegt werden, wie die Ergebnisse in der einen Disziplin mit denen in der anderen Disziplin „verrechnet“ werden. So starten bei der Nordischen Kombination die Läufer:innen zeitversetzt in Abhängigkeit des Sprungergebnisses und es muss also festgelegt werden, wie die Sprungergebnisse in Zeitboni umgewandelt werden. In diesem Projekt sollen solche „Verrechnungsmodelle“ und deren Auswirkungen unter die Lupe genommen werden. Dazu wurde den Schüler:innen folgende Fragen gestellt.

- Wie kam es denn zu den genutzten Verrechnungsmodellen? Sind diese fair?
- Wie robust sind denn die Gesamtklassements in den letzten Jahren? Also: Was passierte mit den Ergebnislisten, änderte man dieses „Verrechnungsmodell“?
- Und kann man die Ergebnisse von diesen Kombi-Sportlern irgendwie mit den Ergebnissen von den Spezialisten (also z.B. reine Springer oder reine Läufer) vergleichen? Wie ist denn da das Leistungsverhältnis zu diesen Spezialisten? Hat dieses Verhältnis was mit dem Umrechnungsverfahren zu tun?

Diese Fragen dienten dazu, sich initial mit dem Thema auseinanderzusetzen, in die Materie einzusteigen und sich selbst weitere relevante Fragen zur Ausgangsproblematik zu stellen.




### 3.1.2 Vorüberlegungen

Zunächst sammelte die Gruppe Sportarten, die sich aus zwei Teildisziplinen zusammensetzen und recherchierte in Abhängigkeit der Sportart, wie die Ergebnisse in den Teildisziplinen zu einem Gesamtergebnis verrechnet werden. Dabei wurden drei prinzipielle Vorgehensweisen entdeckt und beschrieben:

1. Die Ergebnisse der Teildisziplinen werden in derselben physikalischen Einheit gemessen und das Gesamtergebnis besteht aus einer (gewichteten) Addition der Teilergebnisse. Ein Beispiel hierfür ist die Alpine Kombination bei der die Zeit des Slalomrennens zur Zeit des Abfahrtsrennens addiert wird.
2. Die Ergebnisse der Teildisziplinen werden gemäß einer festgelegten Funktionsvorschrift in Punktewerte umgewandelt und das Gesamtklassement über die erreichte Gesamtpunktzahl bestimmt. Dies wird zum Beispiel in der Leichtathletik beim Sieben- oder Zehnkampf so gemacht.
3. Die Ergebnisse von Teildisziplinen werden in die Einheit anderer Teildisziplinen nach einer gegebenen Funktionsvorschrift umgewandelt und mit den dort erzielten Ergebnissen (gewichtet) summiert. Dieses Vorgehen findet zum Beispiel bei der Nordischen Kombination Anwendung.

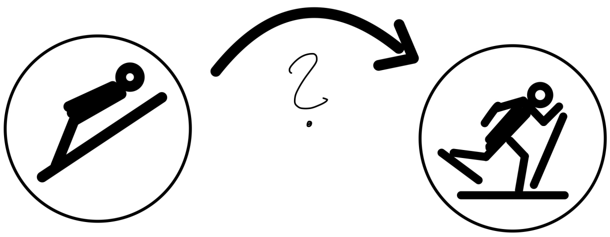
Aus gegebenem aktuellen Anlass entschied sich die Gruppe bei Wintersportarten zu bleiben und im Speziellen zunächst die Nordische Kombination genauer zu untersuchen und das dort angewendete „Verrechnungsschema“ genauer zu verstehen.

Der Titel dieses Projekts „Wie viel Willkür steckt in Kombi-Sportarten?“ suggeriert, dass eine Änderung des „Verrechnungsschemas“ der Teildisziplinen, z. B. durch Änderung der Gewichtung, zu anderen Gesamtklassements führen könnte. Möchte man die Auswirkungen von (kleineren) Änderungen der Gewichtungen auf erzielte Leistungen bei Wettbewerben in der Vergangenheit untersuchen, so ist eine gute Datengrundlage notwendig. Die Schüler:innen recherchierten also historische Ergebnisse in Wettbewerben der Nordischen Kombination, die Informationen über die Leitungen der Athlet:innen in den Teildisziplinen umfassen mussten. Leider stehen solche Daten nur sehr eingeschränkt zur Verfügung bzw. mussten mühsam aufbereitet werden. Dies erschwerte die angestrebte Sensitivitätsanalyse.

Die Schüler:innen befassten sich zudem mit der Gundersen-Methode, also dem „Verrechnungsschema“, das bei der Nordischen Kombination verwendet wird. Diese Methode wird erst seit den 1980er Jahren eingesetzt und so recherchierte die Gruppe auch die historisch zuvor benutzen Verfahren.

### 3.1.3 Ergebnisse

Zunächst analysierten die Schüler:innen historische Daten und stellten diese auf unterschiedliche Weisen als Punktemengen mit GeoGebra dar. GeoGebra nutzen sie auch, um sich „Gundersen-artigen“ Verrechnungsschemata graphisch darzustellen (s. Abbildung).




Durch das somit erlangte Verständnis, wurden dann verschiedene Vermutungen angestellt, welche Athlet:innen aufgrund der erzielten Leistungen überhaupt Gesamtsieger:innen werden konnten und welche garantiert nicht. Hierzu formulierten die Schüler:innen auch entsprechende mathematische Aussagen und bewiesen diese.

Die Gruppe nutzte diese Einsichten, um (vorsichtig) Kritik an der Gundersen-Methode zu üben. Sie konstruierte dazu ein Beispiel aus dem hervorging, dass Athlet:innen, die man „aus dem Bauch heraus“ gute Kombinierer nennen würden, mitunter den Wettbewerb nicht gewinnen können.

Die Schüler:innen präsentierten auch die Ergebnisse der durchgeführten Sensitivitätsanalyse, wobei diese nicht so umfänglich ausgefallen ist, wie ursprünglich erhofft. Interessant ist die historische Entwicklung der „Verrechnungsmethode“ bei der Nordischen Kombination, denn diese wurde mehrfach verändert. Bis 1948 hat quasi immer der beste Läufer den Gesamtwettbewerb gewonnen und dann bis 1984 in etwa dreiviertel aller Fälle der beste Springer. Ab 1984 hat dann in 15% aller Fälle der beste Läufer und in 35% aller Fälle der beste Springer gewonnen. Die Schüler:innen vermuteten, dass bei der Wahl bzw. der Änderung der „Verrechnungsmethode“ auch die Steigerung der Attraktivität der Sportart im Vordergrund stand.

## 3.2 Gestaltung eines Ablaufplans für die Olympischen Winterspiele

### 3.2.1 Problemstellung

Vom 4. bis 20. Februar 2022 fanden die Olympischen Winterspiele in Peking statt. Zahlreiche Wettbewerbe in den unterschiedlichsten Sportarten und Disziplinen wurden in dieser Zeit ausgetragen – ob auf der (Ski-)Piste, auf Rundlaufstrecken oder in Eishallen bzw. Eisstadien.

Bei der Erstellung eines Zeitplans für die unterschiedlichen Disziplinen in den verschiedenen Sportarten muss das jeweilige Regelwerk erfüllt werden. Neben der Beachtung des Regelwerks soll der Zeitplan außerdem für die Zuschauer:innen eine interessante, aber auch abwechslungsreiche Veranstaltung garantieren. Nicht nur die Zuschauer:innen vor Ort in den Spielstätten, sondern auch die Zuschauer:innen vor dem TV aus aller Welt sollen dabei auf ihre Kosten kommen. Dabei spielt die Zeitverschiebung der Länder eine Rolle, die bei beim Erstellen eines Ablaufplans miteinbezogen werden sollte.

Zusätzlich sollen die personellen und technischen Ressourcen bedacht werden, die sparsam eingesetzt werden sollen.

Ziel dieses Projektes ist die Erstellung eines Ablaufplans für die Olympischen Winterspiele in Peking. Das Verfahren zur Gestaltung eines Ablaufplans sollte so konzipiert sein, dass es auch auf weitere Olympische Spiele angewendet werden kann. Nachdem ein Plan erstellt wurde, kann dieser mit dem *offiziellen* Ablaufplan verglichen werden: Lässt sich der offizielle Ablaufplan mit Blick auf den erstellten Ablaufplan verbessern?

### 3.2.2 Vorüberlegungen

Die Erstellung eines Ablaufplans, d.h. einzelne Wettbewerbe der Disziplinen einer Uhrzeit zuordnen, erfordert mathematische Methoden. Bevor jedoch die Mathematik angewendet wird, sollte zuerst überlegt werden, welche Kriterien ein Ablaufplan erfüllen soll. Es muss also diskutiert werden, welche Kriterien obligatorisch sind, sodass der Ablaufplan *zulässig* ist. Dazu gehören beispielsweise, dass an einer Spielstätte nicht zwei Wettbewerbe zeitgleich stattfinden und dass deren Reihenfolge beachtet wird. Es muss also gewährleistet sein, dass das Finale nach dem Halbfinale ausgetragen wird. Nach dem Sammeln von Kriterien muss ein Datensatz erstellt werden, der als Basis für die Erstellung eines Zeitplans dient. Neben der Auflistung aller Sportarten samt deren Disziplinen ist es wichtig, wie lange ein Wettbewerb dauert und an welcher Spielstätte er ausgetragen wird. Als Datengrundlage können Ergebnisse vergangener Wettbewerbe dienen.

Nachdem die Kriterien formuliert und die Datengrundlage geschaffen wurde, geht es an die Erstellung eines *mathematischen Modells*: Falls es zu viele Kriterien bzw. Anforderungen an den Ablaufplan gibt, sollte entschieden werden, welche zuerst im Modell integriert werden. Das ist eine wichtige Entscheidung, denn es ist schwer machbar, alle Kriterien zu Beginn in ein mathematisches Modell zu übersetzen. An dieser Stelle muss der Gruppe verdeutlicht werden, dass sie nach dem (ersten) Erstellen eines mathematischen Modells, das dann auch eine plausible Lösung liefert, das Modell durch weitere Kriterien erweitern können. So kann verhindert werden, dass sich die Gruppe nicht übernimmt.

Eine mögliche mathematische Herangehensweise ist ein Verfahren aus der Optimierung anzuwenden. Um Ablaufpläne nach ihrer Qualität zu bewerten, muss definiert werden, wann ein solcher Plan als „gut“ bezeichnet wird. Zu überlegen ist also, was in der Zielfunktion maximiert bzw. minimiert werden soll und welche Nebenbedingungen gelten sollen.

Zur Vereinfachung des Problems werden die Disziplinen innerhalb einer Sportstätte betrachtet; die Dauer ist jeweils gleich. Haben die Disziplinen unterschiedliche zeitliche Längen, ist die Zuordnung schwerer. In einer Rangfolge werden die Disziplinen bepunktet: Für jede Disziplin wird eine Liste erstellt, wobei die Bepunktung für jede Uhrzeit gemacht wird. Die Bepunktung kann nach unterschiedlichen Kriterien erfolgen, die die Gruppe festlegt.

Eine optimale Lösung dieses Problems ist nicht möglich, da es *NP-schwer* ist. Folglich kann aber ein *Greedy-Algorithmus* formuliert werden: Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie schrittweise den nächsten Zustand auswählen, der zum Zeitpunkt der Wahl das beste Ergebnis liefert. Der Algorithmus startet mit einer bestimmten Disziplin, die für die Uhrzeit die beste Punktzahl hat. Die Liste wird nun durchlaufen und den Disziplinen werden Uhrzeiten zugeordnet.

### 3.2.3 Ergebnisse

Zu Beginn sammelte die Gruppe Daten, die für die Erstellung des Ablaufplans essentiell sind. Sie unterteilten die Sportarten in die jeweiligen Disziplinen und ordneten jeder Disziplin einen Austragungsort zu. Anhand von vergangenen Wettbewerben ermittelten sie die durchschnittliche Dauer für jede Disziplin. Die Recherche umfasste insgesamt 127 Disziplinen.

In einem nächsten Schritt sammelte die Gruppe Kriterien, die sie nach Relevanz in einer Mindmap priorisiert haben (Abbildung 2). Auf jeden Fall sollte sowohl die Dauer einzelner Disziplinen miteinbezogen werden als auch deren Reihenfolge und der Austragungsort. Andere Kriterien wie z.B. Nachholtermine und Pufferzeiten sollen in einem weiteren Schritt erst Beachtung im Modell finden.

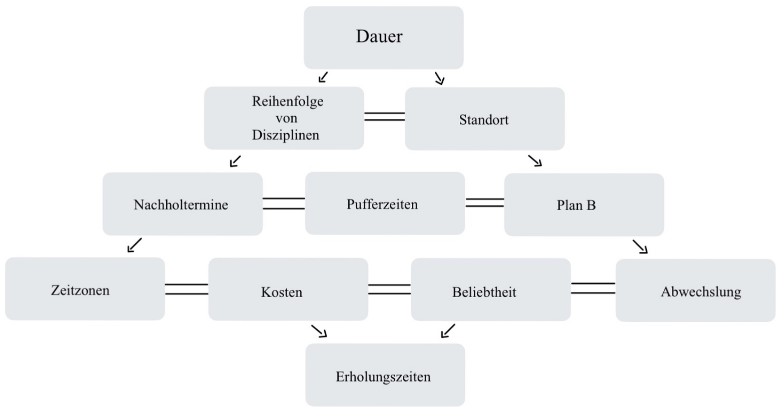



Abbildung 2: Kriterien, die der Ablaufplan erfüllen soll.

Um die Beliebtheit einzelner Sportarten herauszufinden, erstellte die Gruppe eine Umfrage, bei der angegeben werden sollte, wie oft man Olympia schaue und welche Sportarten einen interessieren (Abbildung 3).

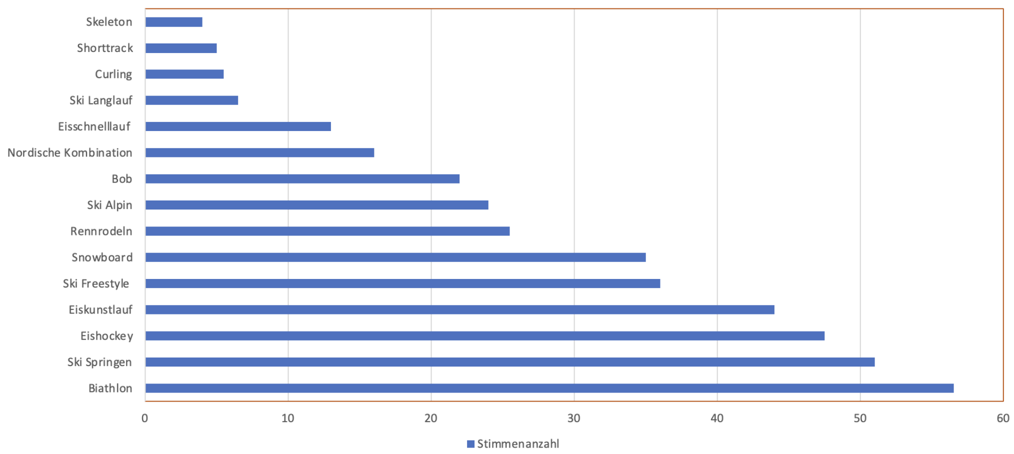



Abbildung 3: Ergebnisse der Umfrage.

Nach der Datenrecherche und der Erstellung eines realen Modells entschied sich die Gruppe, zum einen einen Sendeplan und zum anderen einen Ablaufplan zu erstellen, da für jeden Plan die Kriterien unterschiedlich stark gewichtet werden.
Mithilfe eines ganzzahligen Programms soll eine Möglichkeit für einen Sendeplan erstellt werden:

$$
\begin{aligned}
max \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \\
s.t. \sum_{i=1}^{n} d_i X_i \leq D \\
\sum_{i=1}^{n} X_i \leq m \\
X_i = 0, 1
\end{aligned}
$$

Die Disziplinen werden durch die Laufvariable $i = 1, \ldots n$ dargestellt, wobei $X_i = 0$, wenn die Disziplin aktuell nicht ausgewählt ist und $X_i = 1$, wenn sie ausgewählt ist. $d_i$ gibt die Dauer der jeweiligen Disziplin $i$ und $a_i$ die Attraktivität an.
In der Zielfunktion soll die Attraktivität der Disziplinen maximiert werden, wobei folgende Nebenbedingungen erfüllt sein müssen: Die Summe über die Dauer aller Disziplinen darf die Gesamtdauer nicht überschreiten und $X_i$ nimmt die Werte $0$ und $1$ an.
In Abbildung 4 befindet sich ein Ausschnitt einer Möglichkeit für einen Sendeplan, in dem die Reihenfolge der Disziplinen, die Attraktivität sowie die Abwechslung berücksichtigt wurde.


Abbildung 4: Ein möglicher Sendeplan.

Für die Erstellung des Abflaufplans werden die Daten komprimiert in einer Datei zusammengefasst, sodass der Algorithmus darauf zugreifen kann. In jeder Zeile wird angegeben, welche Sportart/Disziplin wie lange dauert und an welchem Austragungsort sie stattfindet (Abbildung 5).

```
"Eiskunstlauf, Kurzprogramm M"; 255; "HH"
"Eiskunstlauf, Kurzprogramm F"; 240; "HH"
"Eiskunstlauf, Kür M"; 265; "HH"
"Eiskunstlauf, Kür F"; 295; "HH"
"Eiskunstlauf, Eistanz Kür"; 200; "HH"
"Eiskunstlauf, Eistanz Rhythmustanz"; 210; "HH"
```

Abbildung 5: Datenstruktur für den Algorithmus.

Der Algorithmus wurde in Python implementiert und lässt sich folgendermaßen zusammenfassen: In einem ersten Schritt werden die Disziplinen in die Gruppen eingeteilt. Für jeden Austragungsort wird ein Zeitplan erstellt. Die Zeitpläne werden dann durchmischt und auf Validität überprüft. Die Zeitpläne werden nun je nach Beliebtheit überlagert. Ein möglicher Ablaufplan, der mithilfe des Algorithmus erstellt wurde, ist in Abbildung 6 zu sehen.

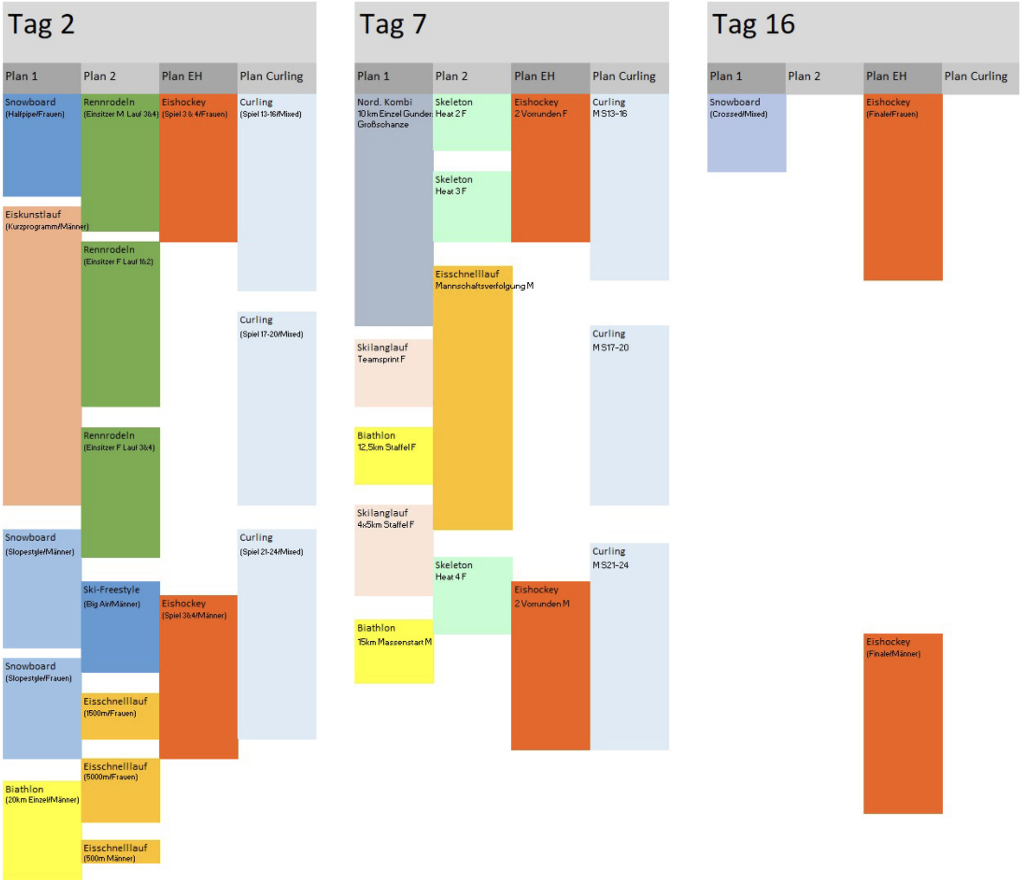



Abbildung 6: Ausschnitt eines möglichen Ablaufplans.

Innerhalb dieser Woche konnte schließlich ein Ablaufplan und sogar ein Sendeplan für die Olympischen Winterspiele mithilfe mathematischer Methoden erstellt werden, die teils gleiche, teils auch unterschiedliche Kriterien erfüllen (Abbildung 7).

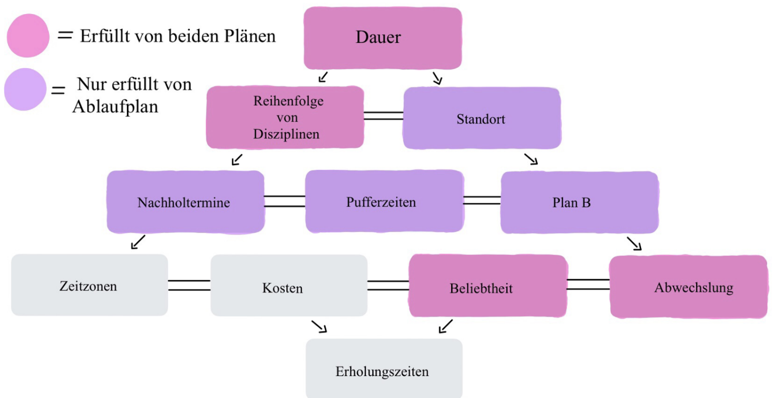



Abbildung 7: Erfüllte Kriterien für den Ablauf- und Sendeplan.

## 3.3 Schlittenfahren: Vollgas sicher gebremst

### 3.3.1 Problemstellung

Wie bremst man einen Schlitten eigentlich richtig? Mit dieser Frage haben sich sechs Schüler im Rahmen des Projektes „Schlittenfahren: Vollgas sicher gebremst“ beschäftigt. Folgt man der Empfehlung nach kurzer Internetrecherche (vgl. [Ges]), findet man den Rat, beide Füße flach und nahe an den Kufen auf den Boden zu drücken. Dagegen spricht jedoch eine Studie von Medizinern [Kra21] festgestellt haben. Schaut man sich an, wie die Profisportler zum Beispiel bei Olympia bremsen, stellt man fest, dass sie sich aufrichten und mit den Händen das Vorderteil des Schlittens greifen, den Schlitten zu sich ziehen und damit die Kufen in den Schnee (bzw. im Eiskanal ins Eis) drücken und so langsamer werden.

### 3.3.2 Vorüberlegungen

Das Schlittenfahren und der Bremsvorgang lässt sich mithilfe einer Bewegungsgleichung physikalisch beschreiben. Dazu sind die auf den Schlittenfahrer wirkenden Kräfte zu bestimmen. Die resultierende Kraft ergibt sich aus der Summe aller wirkenden Kräfte.

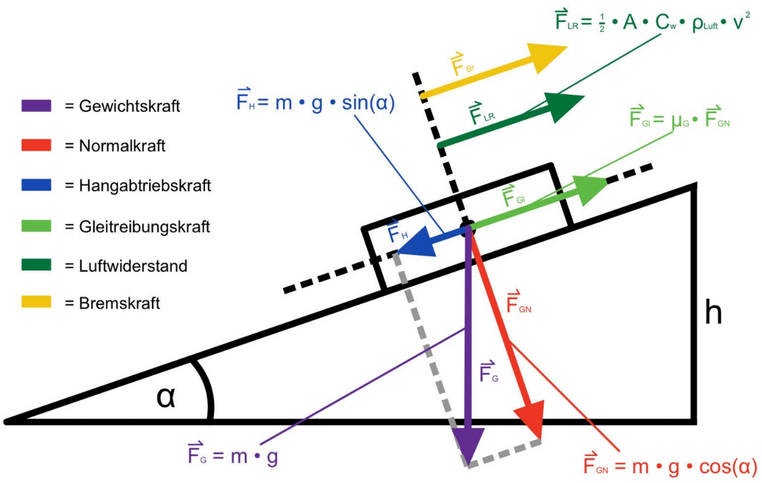



Abbildung 8: Schematische Darstellung der wirkenden Kräfte bei einer Schlittenfahrt.

Um die Bewegungsgleichung zu lösen, benötigt man mathematische Methoden für das Lösen von Differentialgleichungen, da sowohl die Geschwindigkeit als auch die Beschleunigung in der Gleichung auftritt. Bei der Beschleunigung handelt es sich aufgrund der physikalischen Zusammenhänge um die Ableitung der Geschwindigkeit, weshalb man die im folgenden stehende Bewegungsdifferentialgleichung erhält

$$F_{res}(v) \stackrel{!}{=} m \cdot \dot{v}, \text{ mit } F_{res}(v) = F_H - F_{Gl} - F_{Lr} - F_{Br}.$$

Eine Möglichkeit zum Lösen der Differentialgleichung ist die Verwendung des expliziten Euler-Verfahrens, welches durch folgende Iterationsvorschrift für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und kleine

$\Delta t$ gegeben ist:

$$x_{k+1} = x_k + v_k \cdot \Delta t,$$
$$v_{k+1} = v_k + \frac{F_{res}(v_k)}{m} \cdot \Delta t.$$

Dafür müssen der Anfangsort $x_0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ des Schlittenfahrers bekannt sein.

### 3.3.3 Ergebnisse

Wie in Abbildung 8 dargestellt, wurde die Gesamtkraft, die auf den Schlittenfahrer wirkt, zunächst von den Schülern bestimmt. Sie setzt sich zusammen aus der Hangabtriebskraft, die den Schlittenfahrer beschleunigt und Kräften, die ihn bremsen und daher ein negatives Vorzeichen haben. Dazu gehört die Bremskraft durch den Luftwiderstand, durch die Reibung und durch die verwendete Bremsmethode.

Die zunächst offen gelassene Bremskraft lässt sich in verschieden Fällen unterschiedlich vervollständigen:

- Beim Bremsen mit den Füßen ist dies eine Gleitreibungskraft zwischen Fuß und Oberfläche.
- Beim Bremsen mit den Schlittenkufen durch das Zurücklehnen wird die Kompressionskraft des Schnees wirksam (Abbildung 9).
- Ein dritter Fall, bei dem mit beiden Methoden gebremst wird (hier wirken beide der genannten Kräfte auf einmal).

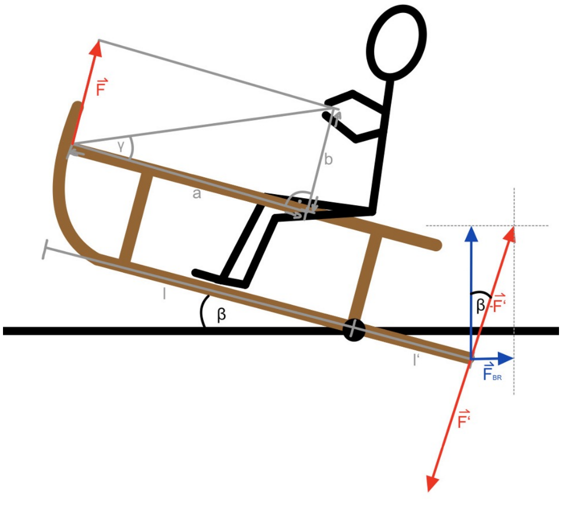


Abbildung 9: Kompressionskraft vom Schnee, wodurch sich die Bremswirkung bei der Kufenmethode ergibt.

Der oben beschriebene Ansatz des expliziten Euler-Verfahrens wurde in Python implementiert und man erhält Weg-Zeit und Geschwindigkeits-Zeit Diagramme. Zum genaueren Verständnis der Methode kann man sich folgendes überlegen: In einem beliebig kleinen Zeitintervall wird die Geschwindigkeit als konstant angenähert, und der Schlitten legt somit linear einen bestimmten Weg zurück. Da sich die Geschwindigkeit von Zeitintervall zu Zeitintervall stets ändert, wird diese als Bestandteil einer beschleunigten Bewegung modelliert und ändert sich um den Quotienten aus Kraft und Masse des Schlittenfahrers.

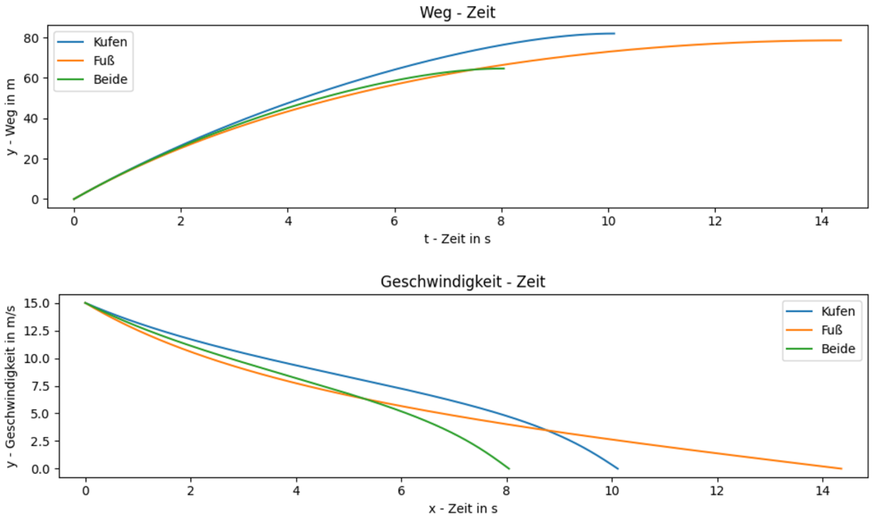



Abbildung 10: Simulationsergebnisse.

Zur Beantwortung der Ausgangsfrage und Bewertung der Verletzungsgefahr wurden folgende Überlegungen gemacht: Aus der Physik ist bekannt, dass sich die Aufprallkraft in einer möglichen Unfallsituation als zeitliche Änderung des Impulses errechnen lässt. Das lässt sich wiederum annähern durch die Geschwindigkeit vorher und nachher, wobei $v_{nachher} = 0$ geeignet ist und $\Delta t$ sinnvoll gewählt werden muss:

$$\frac{dp}{dt} = F \approx \frac{m(v_{vorher} - v_{nachher})}{\Delta t}$$

Man erhält das folgende Diagramm für die theoretischen Aufprallkräfte im Falle eines Unfalls bei den vorherigen Simulationen.

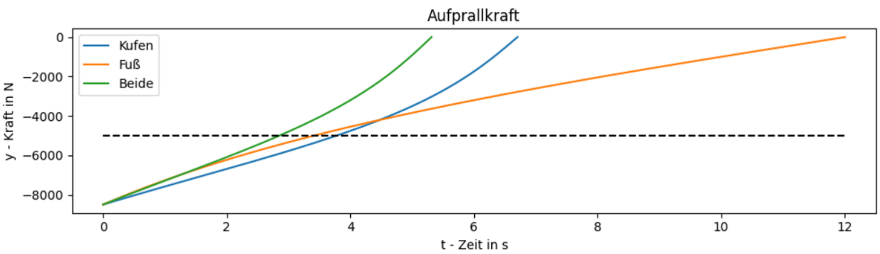



Abbildung 11: Momentane Aufprallkraft im Falle eines Unfalls.

Im Extremfall müsste der Schlittenfahrer diese Kraft gänzlich mit seinen Beinen absorbieren. Mithilfe dieser Vereinfachung und den Ergebnissen der folgenden Unfallstudie lässt sich eine genaue Bremsempfehlung formulieren.

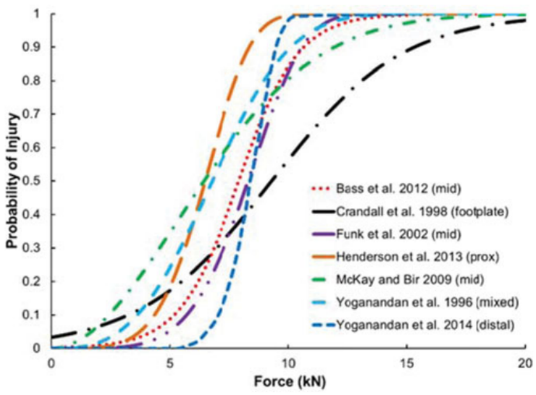



Abbildung 12: Verletzungswahrscheinlichkeit des Schienbeins in Abhängigkeit von der Aufprallkraft aus einer Unfallstudie. (vgl. [Bai])

Ab einer Aufprallkraft von 2,5kN steigt das Verletzungsrisiko des Schienbeins erheblich. Ab 5kN ist ein Schienbeinbruch fast unvermeidbar, vgl. Abbildung 12. Bei hohen Geschwindigkeiten (etwa ab 20km/h) ist daher das Bremsen mit den Füßen nicht zu empfehlen. Hier soll zunächst ausschließlich mit den Kufen gebremst werden. Sobald die Geschwindigkeiten 20km/h unterschreitet, können die Füße zusätzlich eingesetzt werden, um schneller zum Stillstand zu kommen.

## 3.4 Optimale Ausleuchtung einer Skipiste

### 3.4.1 Problemstellung

Bei der Ausleuchtung einer Skipiste müssen verschiedene Faktoren beachtet werden. Wie eingangs beschrieben stellt die FIS – die Fédération Internationale de Ski – verschiedene Anforderungen an eine Piste, die für Wettkämpfe genutzt werden soll. Dazu gehören zum einen eine Mindestbeleuchtungsstärke, aber auch die Ausgeglichenheit der Lichtverhältnisse auf der Piste spielt eine Rolle. Weiterhin möchte der Betreiber der Skipiste sparsam mit den Ressourcen umgehen. Dies bedeutet, dass so wenig Masten und Leuchtquellen wie möglich genutzt werden sollen, die aber trotzdem noch alle Anforderungen der FIS erfüllen. Um dies zu erreichen, soll für eine beliebige Piste ein Entscheidungsunterstützungssystem entwickelt werden, welches vorgibt, wo die Masten für die Leuchtquellen entlang der Piste platziert werden sollen. Weiterhin sollen auch die Leuchtquellen selbst spezifiziert und deren Aufhängung an den Masten gezeigt werden. Dabei soll dieses System unabhängig von der gewählten Piste eine Entscheidungsunterstützung liefern.

### 3.4.2 Vorüberlegungen

Um die Aufgabe sinnvoll zu lösen, müssen zunächst notwendige Informationen recherchiert werden. Dazu gehört es, die Anforderungen, die von der FIS an eine Piste gestellt werden, herauszufinden. Diese sind im Regelwerk beschrieben und geben neben einer an jedem Punkt zu erreichenden Beleuchtungsstärke auch vor, dass die Beleuchtung auf der Piste gleichmäßig sein soll.

Man wird hier schnell an einen Punkt gelangen, an dem man sich mit der Physik des Lichts auseinandersetzen muss. Es gilt, die physikalischen Modelle zu verstehen und die Größen und Einheiten im Zusammenhang mit der Beschreibung von Licht zu erfassen und zu nutzen. Es werden insbesondere folgende Größen benötigt:

- Lichtstrom $\Phi_v$ in Lumen (lm)
- Lichtmenge $Q_v$ in Lumensekunde (lm · s)
- Lichtstärke $I_v = {}^{\Phi_v}/_{\Omega}$ in Candela (cd) als Lichtstrom durch Raumwinkel
- Leuchtdichte $L_v$ in Candela pro Quadratmeter ($^{\mathrm{cd}}/_{\mathrm{m}^2}$)
- Beleuchtungsstärke $E_v = {}^{\Phi_v}/_{A}$ in Lux (lx) als Lichtstrom durch Fläche

Neben diesen physikalischen Grundlagen ist es zusätzlich nötig, dass die Gruppe sich mit den Lichtquellen selbst auseinander setzt. Diese sind bezüglich der oben genannten Größen vom Hersteller beschrieben. Weiterhin findet man auf diesen Seiten Informationen darüber, wie die einzelnen Lichtquellen das Licht ausstrahlen. Hierzu werden Diagramme bereitgestellt. Diese müssen zunächst verstanden und anschließend interpretiert werden. Ablesbar sind hier vor allem der horizontale und der vertikale Abstrahlwinkel der Lampe. Außerdem lässt sich aus den Diagrammen ablesen, wie sehr die Lichtquelle das Licht streut.

Sind die notwendigen Informationen gesammelt, kann die Gruppe mit der Erstellung des mathematischen Modells beginnen. Da die Piste variabel bleiben soll, sollten zunächst die Größen identifiziert werden, die eine Piste bestimmen. Hierzu gehören zum Beispiel die Breite, die Länge und das Gefälle der Piste. Außerdem muss aus den gefundenen Angaben bezüglich der Leuchtquelle ein (dreidimensionales) Modell des Lichtkegels erstellt und mittels mathematischer Ausdrücke beschrieben werden. Die Beleuchtungsstärke, die diese Quelle dann auf der Piste erzeugt, muss in Abhängigkeit aller Größen – der Breite, Länge und Neigung der Piste und der Spezifikationen der Leuchte – mathematisch ermittelt werden. Im Prozess der Erstellung des mathematischen Modells ist es unerlässlich, einige Angaben und Informationen zu vereinfachen, oder sogar im ersten Durchgang zu vernachlässigen, um ein mathematisches Modell zu entwickeln, welches für die Gruppe noch handhabbar und zu bewältigen ist. Kommt die Gruppe mit dem Modell zurecht und hat mathematische Werkzeuge gefunden oder entwickelt, um darin mathematisch zu arbeiten, können nach und nach weitere Informationen und Feinheiten in das Modell eingebunden werden. Somit wird das mathematische Modell sukzessive erweitert und der Realität angepasst.

### 3.4.3 Ergebnisse

Die Gruppe – bestehend aus 5 Schülern – hat zu Beginn der Arbeitsphase am ersten Tag mit einem Brainstoming gestartet. Es wurden nach einiger Diskussion die folgenden Punkte festgehalten, die nach Abschluss der Woche bearbeitet, beziehungsweise im Modell beachtet sein sollten:

- Form der Piste
- Helligkeit der Lampe
  - Wie viele
  - Form
- Kosten?
- Position
- Tageslicht/Wetter?

Items mit Fragezeichen geben hierbei eine niedrigere Priorisierung an, der letzte Punkt wurde im Verlauf der weiteren Tage verworfen.

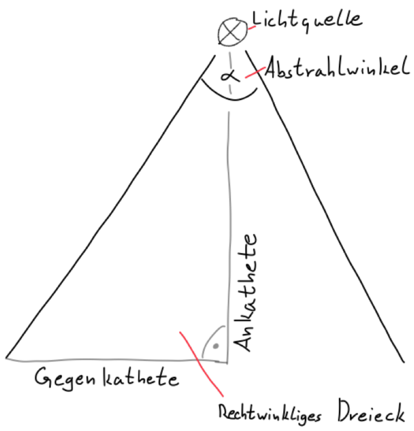
Ausgehend von diesen Überlegungen recherchierte die Gruppe zunächst auf der Seite der FIS nach den Standards für die Pistenbeleuchtung für Wettkämpfe mit künstlicher Beleuchtung. Hierbei wurden die folgenden – für die Gruppe als relevant eingestuften – Regeln gefunden [Fé18]:

- Die Lichtstärke muss überall mindestens $80$lx betragen.
- Die Ausleuchtung soll möglichst gleichmäßig sein.
- Die Scheinwerfer müssen so platziert sein, dass das Licht die Topographie der Piste nicht ändert.
- Das Licht darf keinen Schatten des Wettkämpfers in den Fahrlinienbereich werfen und den Wettkämpfer nicht blenden.

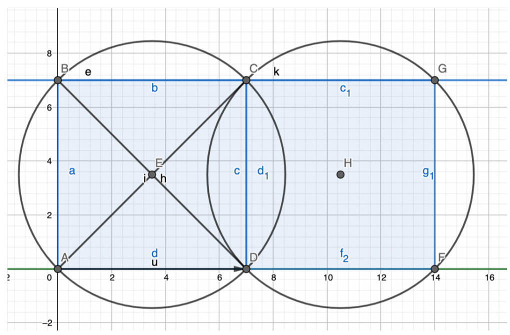
Die physikalischen Grundlagen, die zur Arbeit am Projekt gebraucht wurden, wurden anschließend erarbeitet. Um einen Überblick zu erhalten, erstellte die Gruppe eine Zusammenfassung zu den Einheiten und den Formeln, die für den späteren Verlauf als wichtig eingestuft wurden.

Um ein mathematisches Modell zu erstellen, wurden zunächst einige Annahmen getroffen. Zum einen wurde die Piste als Rechteck, das von zwei Variablen „Breite“ und „Länge“ bestimmt ist, approximiert. Weiterhin vernachlässigten die Schüler die Neigung der Piste, da sie davon ausgingen, dass die Lichtquellen parallel zur Strecke an den Masten befestigt werden können. Unebenheiten in der Piste wurden ebenfalls nicht berücksichtigt. Alle diese getroffenen Annahmen sind sinnvoll, um das mathematische Modell wie eingangs beschrieben überschaubar zu halten.

Im ersten Ansatz platzierte die Gruppe die Leuchten nun einfach direkt über der Piste, da sie von einer kegelförmigen Ausbreitung des Lichtes in alle Richtungen und – aufgrund der getroffenen Annahmen – dadurch von einer kreisförmig ausgeleuchteten Fläche auf der Piste ausgingen. Über die variable Höhe der Leuchten konnte dann die Fläche bestimmt werden, die von einer Lichtquelle ausgeleuchtet wird. Über diese Fläche und die Gesamtfläche der Piste wurde die Anzahl der benötigten Lampen berechnet. Dieser Ansatz wurde dann in GeoGebra umgesetzt. Die Vorüberlegungen (Abbildung 13a) und ein Ausschnitt aus dem GeoGebra-Programm (Abbildung 13b) ist im Folgenden zu sehen.




(a) Vorüberlegungen.



(b) Ausschnitt aus GeoGebra.

Abbildung 13: Ausarbeitungen zum ersten Ansatz

Der erste Ansatz wurde aufgrund verschiedener Überlegungen dann wieder verworfen.

Im nächsten Schritt informierten sich die Schüler über verschiedene Lichtquellen, um die Ausbreitung des Lichts von der Beleuchtungsquelle weg genauer modellieren zu können. Um die Angaben der Hersteller bezüglich der Leuchten zu nutzen, mussten Diagramme – bzw. Lichtverteilungskurven – der Art wie in Abbildung 14 ausgewertet werden.

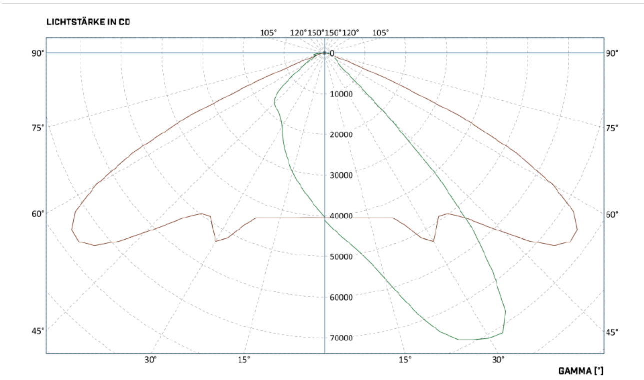



Abbildung 14: Lichtverteilungskurve eines LED Flutlichtstrahlers, welches die Lichtstärke angibt [Aug]

Anhand dieser Verteilungen haben die Schüler horizontale und vertikale Abstrahlwinkel ausgelesen. Diese wurden als weitere Variablen in das Modell aufgenommen. Das verbesserte Modell der Ausbreitung des Lichts ergab ein Dreieck als Fläche, welche auf der Piste ausgeleuchtet wird. Die Maße und Winkel des Dreiecks hängen von verschiedenen Faktoren ab. Hierzu zählen neben den beiden genannten Abstrahlwinkeln auch der Winkel der Aufhängung am Mast und die Entfernung des Masts vom Rand der Piste. Abbildung 15 zeigt eine schematische Darstellung der Schüler.

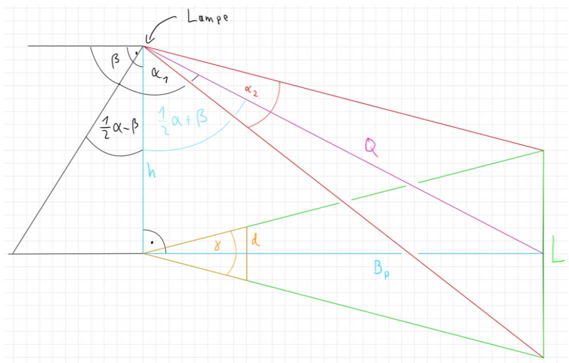



Abbildung 15: Schematische Darstellung des Lichts, welches von einem Strahler ausgeht.

Diese Form haben die Schüler genutzt, um durch ein geschickt gewähltes Muster die Skipiste auszuleuchten. Zu beachten ist hierbei, dass die Schüler angenommen haben, dass die Leuchtstärke am „Rand“ der beleuchteten Fläche nicht abnimmt. Dies hat es erlaubt, das Mustser so zu gestalten, dass ausgeleuchtete Flächen angrenzend aneinander ohne Überschneidung ohne Verlust von Leuchtkraft platziert werden konnten. Das Muster gibt vor, dass die Masten neben der Piste zu platzieren sind und das immer zwei Masten ge-

genüber voneinander aufgestellt werden. Anhand dieser Überlegungen ist es den Schülern dann gelungen, eine Formel aufzustellen, die für ebendieses Muster berechnet, wie weit die Masten von der Skipiste entfernt aufgestellt werden müssen, um die Skipiste auszuleuchten. Weiterhin kann die Höhe der Leuchte über der Piste bestimmt werden und wie weit die Masten entlang der Piste auseinander stehen müssen. Die so bestimmten Formeln wurden dann erneut in GeoGebra übertragen. Hier haben die Schüler es geschafft, verschiedene Variablen als Schieberegler zur Verfügung zu stellen und durch die hinterlegten Formeln die genannten Werte zu bestimmen. Ein Ausschnitt aus GeoGebra ist in der folgenden Abbildung zu sehen.

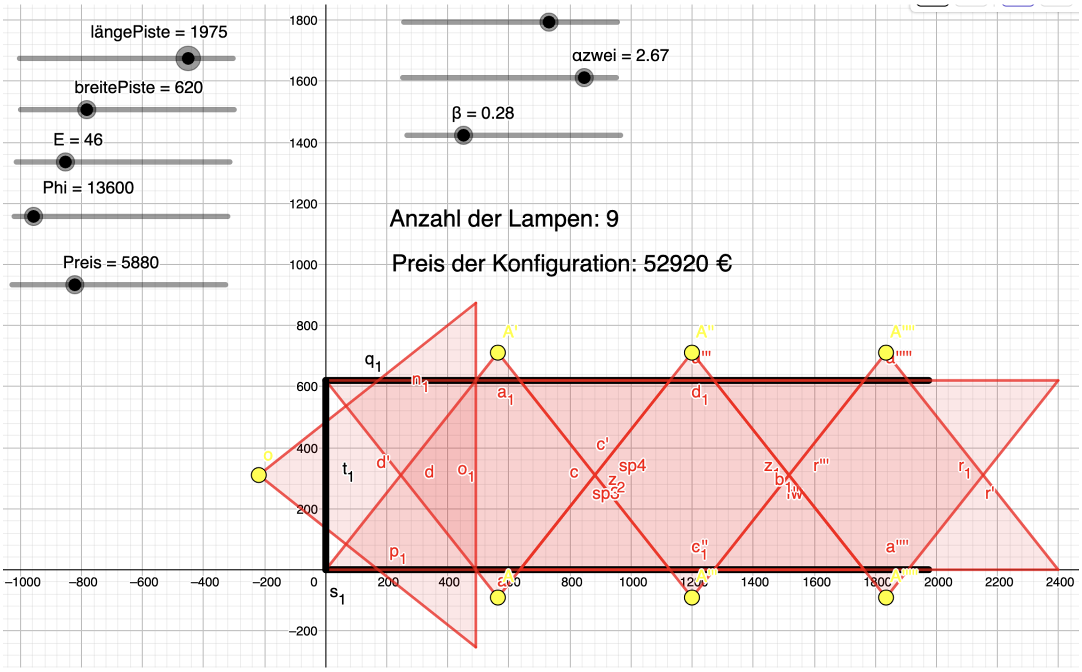



Abbildung 16: Ausschnitt aus GeoGebra für den zweiten Ansatz.

Eine Untergrenze für die Anzahl der benötigten Leuchtmittel kann – wie im Ansatz 1 beschrieben – über die von einer Lampe ausgeleuchtete Fläche im Verhältnis zur Gesamtfläche der Piste berechnet werden. Man kann an der Abbildung weiterhin erkennen, dass für den Start der Piste eine einzelne Lampe geplant wird. Dies verhindert, dass der Anfang der Strecke nicht genügend ausgeleuchtet wird, was durch das erarbeitete Platzierungsmuster der Gruppe sonst passieren würde. Anhand der Preisangabe für eine einzelne Leuchte kann eine ungefähre Kostenkalkulation für die Leuchtmittel vorgenommen werden.

## 3.5 Modellierung von Tageslängen im Jahresverlauf

### 3.5.1 Problemstellung

Den Winter nennt man auch die dunkle Jahreszeit, weil die Tageslängen kürzer als im Sommer sind. Tageslängen unterlaufen im Jahresverlauf eine regelmäßige Änderung. Im Winter sind sie kurz, über das Frühjahr hinweg werden sie länger, bis sie am 21. Juni zur Mitsommerwende ein Maximum erreichen und dann wieder bis zum 21. Dezember abnehmen. Dieser Verlauf wiederholt sich jedes Jahr. Bei genauem Beobachten der Tageslängen können

einem dabei noch einige Details auffallen: Im Frühling werden die Tage schneller länger und im Herbst werden die Tage schneller kürzer als im Sommer und im Winter.
Ziel des Projekts ist es, diese Zusammenhänge zu analysieren und mit einem mathematischen Modell zu erklären. Das Modell soll von den Schülerinnen und Schülern möglichst so entwickelt werden, dass die daraus berechneten Tageslängen geringe Abweichungen zu den tatsächlich gemessenen Tageslängen in der Vergangenheit aufweisen.

### 3.5.2 Vorüberlegungen

Für die Entwicklung eines Modells zur Berechnung der Tageslängen im Verlauf des Jahres kann unterschiedlich vorgegangen werden. Ein grundsätzliches Verständnis über die astronomischen Zusammenhänge ist aber bei allen Vorgehensweisen obligatorisch. So hängt die Tageslänge immer von der geografischen Breite und dem genauen Zeitpunkt im Jahresverlauf ab. Ausschlaggebend für die unterschiedlichen Tageslängen abhängig von diesen beiden Größen ist einerseits die Schiefe der Ekliptik, das heißt des Winkels von $23,44°$ zwischen der Ebene des Erdäquators und der Ebene, in der die Erde die Sonne umläuft und andererseits die Dauer von $365\frac{1}{4}$ Tagen des Erdumlaufs um die Sonne.
Zuerst scheint es naheliegend zu sein, ein sphärengeometrisches Modell aufzustellen. Hierzu muss analysiert werden, welche astronomischen Zusammenhänge benötigt und welche für das Modell vereinfacht werden können. So spielt es für ein geometrisches Modell zum Beispiel eine untergeordnete Rolle, dass die Erde ein Geoid ist. Sie kann zu einer mathematisch leichter darstellbaren Kugel vereinfacht werden. Auch die elliptische Umlaufbahn der Erde kann zu einer Kreisbahn vereinfacht werden. Sowohl die Variation der Geschwindigkeit der Erdrotation als auch die des Erdumlaufs kann vernachlässigt werden. Mit diesen Vereinfachungen kann ein geometrisches Modell mithilfe der analytischen Kugelgeometrie aufgestellt werden. Zur Darstellung eines solchen Modells kann das Programm *GeoGebra 3D* behilflich sein, dass die Schülerinnen und Schüler teilweise aus dem Schulunterricht kennen könnten.
Es ist aber auch ein weiterer Ansatz möglich, der keine sphärengeometrischen Zusammenhänge verwendet. Es können Daten von Tageslängen aus der Vergangenheit gesammelt werden, um zukünftige Tageslängen zu prognostizieren. Hierfür ist es nötig, eine trigonometrische Funktion aufzustellen, die von der geografischen Breite und dem Tag im Jahr abhängig ist. Zur Erfassung der Daten und Approximation mithilfe einer Funktion muss eine Statistiksoftware genutzt werden.

### 3.5.3 Ergebnisse

Die sechs Schüler in der Gruppe verschafften sich zuerst einen Überblick über die astronomischen Beziehungen zwischen der Erde und der Sonne. Hierzu sammelten sie Daten der Erdumlaufbahn und -geschwindigkeit, der genauen Entfernungen zwischen Erde und Sonne, des Winkels der Erdachse und der Form des Erdkörpers. Nachdem sie schnell merkten, dass sie sehr viele Daten generierten, die für die Tageslängen aber nicht entscheidend sind, überlegten sie im nächsten Schritt, welche der erhobenen Größen überhaupt wichtig für die Modellbildung sind.
Hierzu arbeitete die Gruppe zur Veranschaulichung immer wieder mit dem Globus. Dabei stellte sie fest, dass für die Bestimmung der Tageslänge besonders wichtig ist, welcher Teil der Erde von der Sonne beleuchtet wird und welcher Teil der Erde im Schatten liegt. Daraus leitete die Gruppe die Idee ab, dass die Tageslänge eines Ortes auf einer bestimmten

geografischen Breite durch das Verhältnis des beleuchteten Teils des zum Ort passenden Breitenkreises zum unbeleuchteten Teil des Breitenkreises bestimmt werden kann. Um diese Idee zu veranschaulichen, bekam die Gruppe eine kleine Einführung in das Programm *GeoGebra 3D*, das zur grafischen Darstellung von kugelgeometrischen Zusammenhängen verwendet werden kann. Auch in die passenden algebraischen Rechenmethoden auf Ebene der analytischen Geometrie bekam die Gruppe eine kurze Einführung.
Danach implementierte die Gruppe ein passendes geometrisches Modell in *GeoGebra 3D*. Durch die grafische Veranschaulichung konnte die Gruppe nun gut entscheiden, welche astronomischen Größen in das Modell miteinbezogen werden müssen und welche vernachlässigt werden können. So stellten sie fest, dass insbesondere die Darstellung der geografischen Breite über den passenden Breitenkreis und des Zeitpunktes über den zur Jahreszeit passenden Winkel der Erdachse zur Ebene der Erdumlaufbahn variabel mit einbezogen werden müssen. Deswegen erstellte die Gruppe für diese beiden Größen Schieberegler, um sie je nach Ort und Tag anpassen zu können (Abbildung 17).

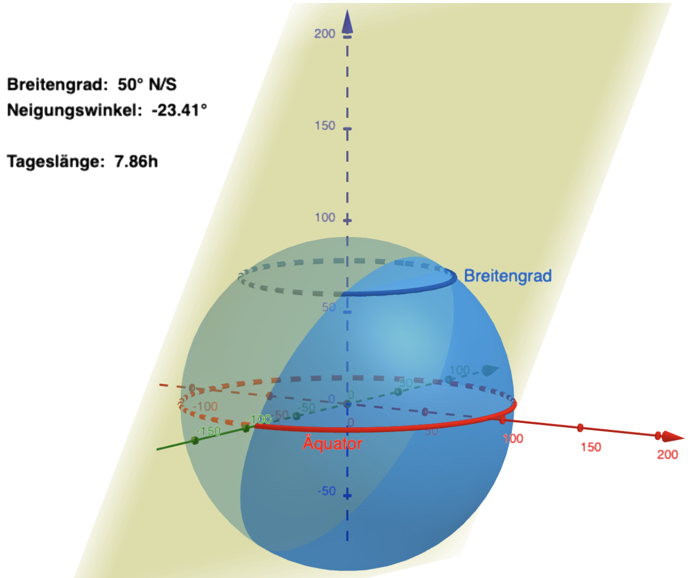



Abbildung 17: *GeoGebra 3D*-Modell mit dem Breitengrad und dem Neigungswinkel als Schieberegler. Rechts ist der von der Sonne beleuchtete Teil der Erde und links der im Schatten liegende Teil.

Auf algebraischer Ebene konnte die Gruppe mithilfe von Schnittkreisen von Ebenen und Kugel eine Formel für die Tageslängen $T$ an einem bestimmten Breitengrad $\beta$ abhängig vom Neigungswinkel $\alpha$ herleiten:

$$T_\beta(\alpha) = 24 \cdot \frac{180 - 2 \cdot \arcsin(-\tan(\beta) \cdot \tan(\alpha))}{360}.$$

In dieser Formel wird der Neigungswinkel $\alpha$ verwendet, um den Tag im Jahr darzustellen. Dieser Winkel schwankt im Jahresverlauf zwischen $-23,44°$ und $23,44°$. Zuerst nahm die Gruppe an, dass sich dieser Winkel im Jahresverlauf linear ändert. Unter dieser Annahme stellten sie allerdings relativ große Abweichungen zu den tatsächlichen Werten der Tageslänge fest. Nach Analyse des Modells vermuteten sie hier einen Fehler und stellten eine Sinusfunktion zur Berechnung des Neigungswinkels auf. Hierzu verwendeten sie den 21.

Dezember als Maximum, den 21 . Juni als Minimum und den 21. März sowie den 23. September jeweils als Nullstelle und erhielten für den Neigungswinkel $\alpha$ für den Tag $x$ im Jahr die Formel $\alpha = \sin(0,01688x - 7,6336)$.

Mithilfe der gefundenen Formel programmierte die Gruppe sowohl mit *Python* als auch mit *C++* ein kleines Programm. Die beiden Programme geben nach Eingabe eines Breitengrades und des Tags im Jahr die passende Tageslänge aus. Der Pythoncode wurde im Anschluss noch mithilfe einer App anwenderfreundlich dargestellt.
Die Qualität des Modells überprüfte die Gruppe mit einem Abgleich mit gemessenen Kontrollwerte. Tatsächlich waren die Abweichungen nicht größer als ca. 10 Minuten. Das Diagramm in Abbildung 18 verdeutlicht die guten Annäherungswerte des Modells.

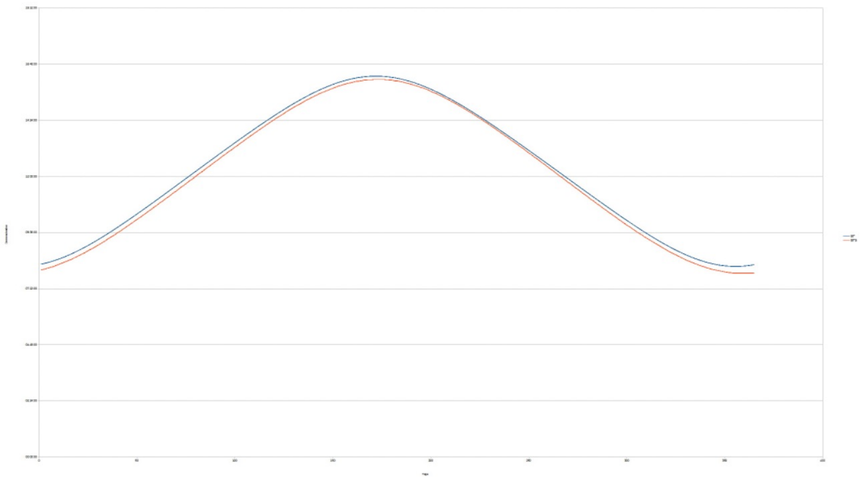


Abbildung 18: Rot: Tageslängen der Prognosen des Modells; blau: gemessene Kontrollwerte.

Während der Großteil der Gruppe an der Umsetzung des geometrischen Ansatzes und der Programmierung des Codes arbeitete, verfolgten zwei Schüler den Ansatz, aus Daten von vergangenen Tageslängen eine Formel herzuleiten. Diese Formel sollte einerseits zur Kontrolle des geometrischen Modells und andererseits zur Prognose der Tageslängen dienen. Um einen funktionalen Zusammenhang in den Tageslängendaten zu finden, zeichneten die Schüler zuerst mit recherchierten Daten händisch Funktionen, die einen trigonometrischen Zusammenhang nahelegen. In Abbildung 19 sind erste Entwürfe der Gruppe zu sehen.

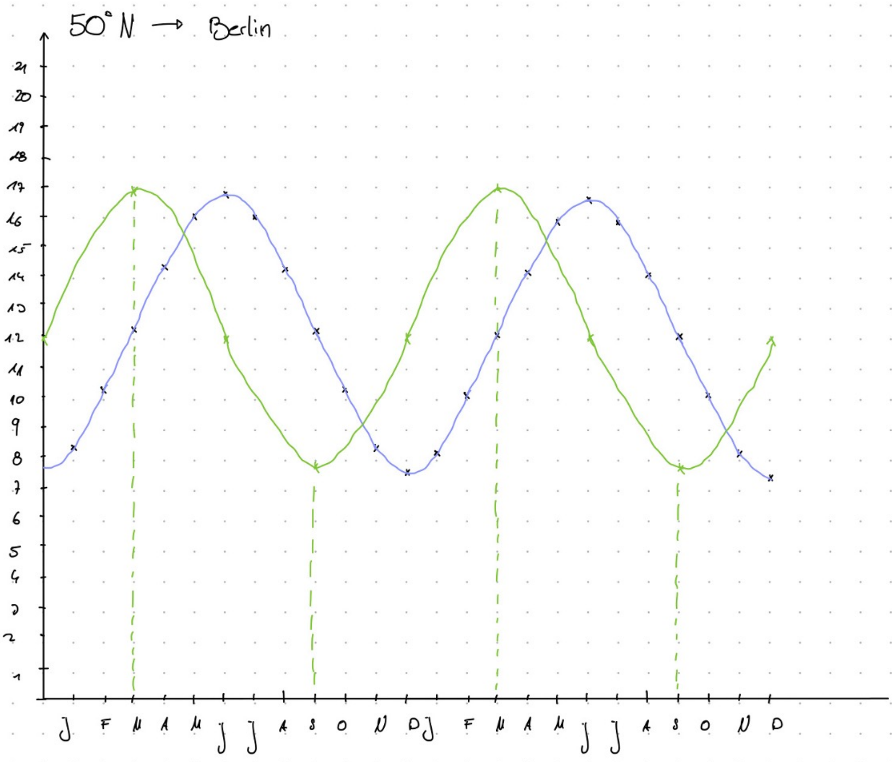



Abbildung 19: Erste Schülerskizze mithilfe gesammelter Daten.

Nachdem die Schüler etliche Daten von Tageslängen an bestimmten Orten und Zeitpunkten in *Excel* übertrugen, stellten sie schnell fest, dass die Periode und Verschiebung auf der $y$-Achse der Sinusfunktion stets gleich ist und lediglich die Amplitude variiert. Je größer bzw. kleiner die geografische Breite, desto größer ist die Amplitude. Bei geografischen Breiten, die sich $0°$ annähern, wird die Amplitude immer flacher. Diesen Zusammenhang erkennt man gut in Abbildung 20.

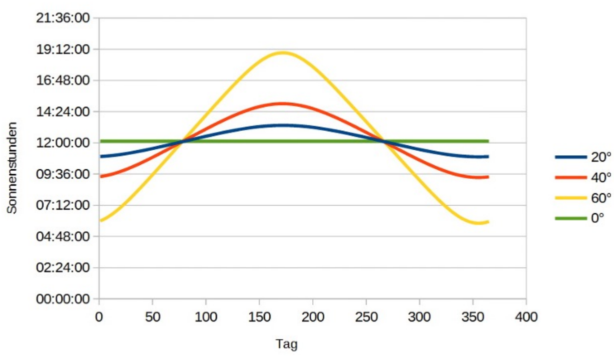



Abbildung 20: Unterschiedliche Amplituden in Abhängigkeit des geografischen Breite ermittelt aus den gesammelten Daten.

Um den Parameter abhängig vom Breitengrad zu finden, übertrugen die Schüler die Amplituden für jeden zehnten Breitengrad in ein Koordinatensystem. In Abbildung 21 sind die eingetragenen Werte zu sehen. Die Schüler stellten einen funktionalen Zusammenhang fest und näherten die Punkte mit einem Polynom fünften Grades an. Damit hatten sie die Amplitude abhängig vom Breitengrad $a$ dargestellt und konnten eine trigonometrische Funktion zur Berechnung der Tageslänge an einem bestimmten Tag $x$ im Jahr aufstellen:

$$f_a(x) = (0,00037a^5 + 0,60395a)\left(-\cos\left(\frac{1}{182,5}\pi \cdot x\right)\right) + 12 + \frac{a}{18}.$$

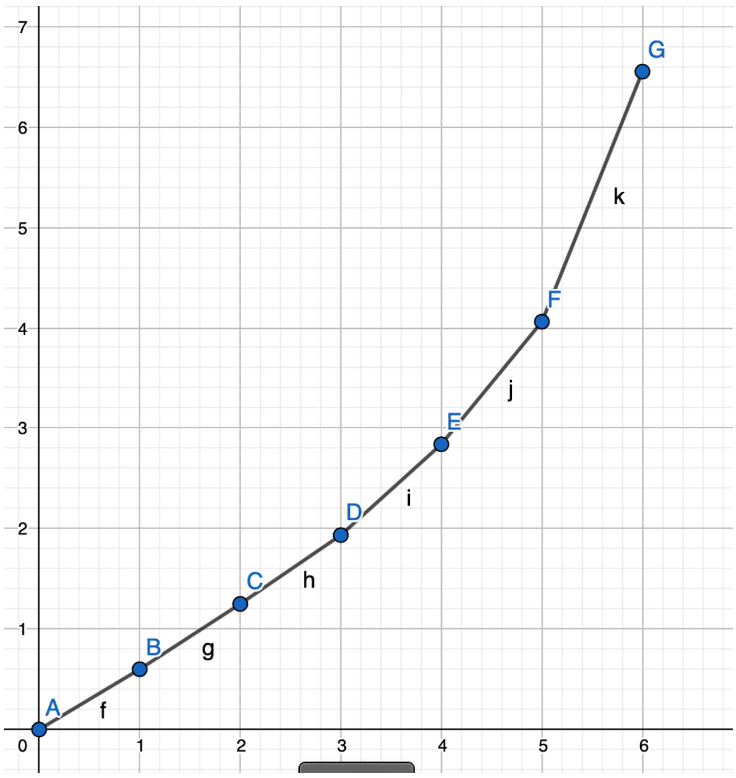



Abbildung 21: Amplitudenwerte für jeden zehnten Breitengrad.

## Literatur

[Aug] August Müller Lichttechnik: *Lichtverteilungskurve LED Flutlichtstrahler*. `https://www.augustmuellerlichttechnik.de/shop/led-flutlichtstrahler-flhp-1000w-4000k/`

[Bai] Bailey, A. M. et al.: *Survival Model for Foot and Leg High Rate Axial Impact Injury Data*. `https://www.researchgate.net/figure/Comparison-of-the-current-injury-risk-function-to-the-models-/presented-by-Funk-et-al_fig4_282890947`

[Bec19] Beckschulte, C.: *Mathematisches Modellieren mit Lösungsplan*. Springer Verlag, 2019

[Fé18] Fédération Internationale de Ski: *Internationale Skiwettkampfordnung (IWO)*. 7 2018. – Band IV Gemeinsame Bestimmungen Ski Alpin

[Ges] Gesundheitsmedizin, AOK: *Richtig rodeln: Tipps für ein unfallfreies Schlittenvergnügen*. `https://www.aok.de/pk/magazin/sport/sportverletzung/tipps-fuer-unfallfreies-rodeln-auf\protect\discretionary{\char\hyphenchar\font}{}{}dem-schlitten/`

[Kra21] Kraus, S. et a.: Das unterschätzte Verletzungsrisiko beim Rodeln im Freizeitsport. In: *Unfallchirurg* (2021), S. 1–7

[KS13] Kaiser, G. ; Stender, P.: Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In: *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (2013), S. 277–293