Th al.

FORSCHUNG - AUSBILDUNG - WEITERBILDUNG

BERICHT NR. 27

ZEITREIHEN UND MODALANALYSE

GERALD CHRISTMANN

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
FACHBEREICH MATHEMATIK
ERWIN-SCHRÖDINGER-STRASSE
D - 6750 KAISERSLAUTERN

AUGUST 1987

MAT 144/620-27

UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK KAISERSLAUTERN UB

88g-443

Einleitung und Aufgabenstellung

Die Systemidentifikation (= experimentelle Analyse eines Systems) ist die Aufgabenstellung der Physik schlechthin. Wegen der Vielfalt der auftretenden Probleme ist es nicht verwunderlich, daß die Thematik bis an die Grenzen der momentanen Forschung führt. Große Schwierigkeiten bereitete lange Zeit der Begriff der Wahrscheinlichkeit. Erst Kolmogorov lieferte um 1930 mit seinen Axiomen eine befriedigende Definition der Wahrscheinlichkeit als Maß (Messen von Unsicherheit), die es gestattete die Wahrscheinlichkeitstheorie im Rahmen der Maßtheorie in ein fundamentiertes mathematisches Modell einzubetten. Gerade die Wahrscheinlichkeitstheorie ist aber ein unentbehrliches Werkzeug der Identifikation, denn sie liefert Kriterien für "beste" Approximation fehlerhaft beobachteter Abbildungen. Weitere Schwierigkeiten tauchen bei der Behandlung nicht korrekt gestellter Probleme auf.

Ein Hauptanwendungsgebiet ist die Identifikation elastomechanischer, schwingungsfähiger technischer Systeme, auf die sich diese Arbeit beschränkt. Das in Deutschland in diesem Bereich am meisten zitierte Werk ist das Buch von Natke: Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse. Es ist von einem Mathematiker für Ingenieure geschrieben und deshalb für interessierte Leser anderer Fachrichtungen nicht leicht zugänglich. Weiter geht Natke auf die von ihm verwendeten wahrscheinlichkeitstheoretischen Modelle nicht ausführlich ein, so daß es auch bei Maschinenbauingenieuren einige Schwierigkeiten im Verständnis geben wird.

Das Ziel dieser Arbeit soll sein, meine im doppelten Studium (Maschinenbauwesen und Mathematik) erworbenen Kenntnisse auszunutzen diese Schwierigkeiten abzubauen.

Geschildert werden soll letztlich der komplette Weg von der Modellbildung bis hin zur Identifikation und dies verständlich (so hoffe ich) für die beiden Fachrichtungen Maschinenbau und Mathematik. Es läßt sich hierbei nicht umgehen einiges zu erwähnen, was dem Angehörigen der einen oder anderen Fachrichtung schon bekannt ist.

Hinter diesem Vorhaben verbirgt sich eine sehr reichhaltige Theorie, z.B. sind fundamentierte Kenntnisse

der Theoretischen Mechanik
der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungs-Systeme mit konstanten Koeffizientenmatrizen
der Numerik
der Wahrscheinlichkeitstheorie
der Elastomechanik

unbedingt erforderlich. Es wird nicht möglich sein jedes angeschnittene Thema zu vertiefen, daher habe ich versucht aus allen notwendigen Gebieten das für ein grobes Verständnis Wesentliche herauszuziehen um dann im jeweiligen Gebiet weiterführende Literatur anzugeben.

Für die praktische Identifikation ist die von Natke gemachte Beschränkung auf diskretisierte Signale im endlichen Zeitintervall einleuchtend. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Konsequenz ist die Beschränkung auf diskrete Prozesse mit endlicher Zeit also Zufallsvektoren und letztlich Hilbertraumapproximation, denn es wird ermöglicht die altbekannten Schätzverfahren (Gauß-Markov-Schätzer oder Maximum-Likelihood-Schätzer) zur Identifikation heranzuziehen. Die verwendeten Schätzer lassen sich alle als sehr gut charakterisieren (siehe z.B. Schach-Schäfer Regressions- und Varianzanalyse).

Dies kann letztendlich als <u>die</u> Grundidee der indirekten Identifikation von Natke bezeichnet werden. Ich empfand es als weder nötig noch sinnvoll all seine Modellbildungen vorzuführen, zumal sehr viele mit relativ komplizierten Formeln enden. Stellvertretend habe ich zwei einfache Modelle ausgesucht um die Idee zu illustrieren.

Für den Statistiker bleibt dies ein wenig unbefriedigend. Ich hatte deshalb ursprünglich vor wenigstens ein kontinuierliches Modell (in einem gewissen Sinne die natürliche Verallgemeinerung des diskreten Modells mit normalverteiltem Fehlervektor), den Ornstein-Ulenbeck-Prozess vorzustellen. Um diesen Prozess einigermaßen verständlich zu erklären wäre jedoch zu viel an Theorie notwendig. Ich verweise daher auf das Buch von Arnold (Stochastic-Differential-Equations). Außerdem war dies auch nicht das Thema meiner Arbeit.

Kurz:

Die Arbeit ist zu verstehen als ein Teil im großen Projekt der Universität Kaiserslautern, das sich unter dem Namen "Technomathematik" um die dringend erforderliche Verständigung zwischen Technik und Mathematik bemüht.

Der große Leitfaden war das Buch von Natke: Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse, Schilderung der wesentlichen dort verwendeten Ideen der indirekten Systemidentifikation sowie des wahrscheinlichkeitstheoretischen und physikalisch-technischen Hintergrundes.

INHALTSVERZEICHNIS

I ALLGEMEINE PROBLEMSTELLUNG 1

II DER BEGRIFF DER VARIATION - DAS LAGRANGE HAMILTONSCHE INTEGRALPRINZIP 2

1. Variation 2
2. Das Lagrange-Hamiltonsche Integralprinzip . . 6

III MODELLBILDUNG IM MASCHINENBAU - ERMITTLUNG VON FEDERKONSTANTEN EINFACHER SYSTEME 9

1. Balkenstatik (Lagerreaktionen) 9
2. Innere Kräfte und Momente am Balken 12
3. Zugversuch - Hooke'sches Gesetz 14
4. Die Gleichung der Biegelinie (am Balken) . . . 20
5. Torsion 21
6. Ermittlung von Federkonstanten 23

IV ANALYSIS NORMALER MATRIZEN 26

1. Normale Matrizen 26
2. Spektralsatz 26
3. Operatornorm einer Matrix 28
4. Operatornorm als maximaler Singulärwert . . . 28
5. Der Satz von Poincare, Fischer 29
6. Der Satz von Courant 32
7. Funktionen normaler Matrizen 35

V SCHWINGUNGEN UM GLEICHGEWICHTSLAGEN AUFSTELLUNG DER SCHWINGUNGSGLEICHUNG 40

1. Gleichgewichtspunkte bei Systemen mit holonom-skleronomem Zwang und strikt konservativen äußeren Kräften 42
2. Elastomechanische Systeme 43
3. Lagrangegleichung der viskosen Dämpfung . . . 44
4. Schwingungsgleichung eines elastomechanischen Systems um seine Ruhelage 44

VI LÖSUNG DER SCHWINGUNGSGLEICHUNG 50

1. Die Exponentialfunktion für beliebige Matrizen 50

2. Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems . . 51
3. Simultane Diagonalisierbarkeit selbstadjungierter Matrizen 52
4. Lösung der gedämpften skalaren Schwingungsgleichung 53
5. Lösung des Anfangswertproblems für die schwach gedämpfte Schwingung 61

VII STABILITÄT VON EIGENWERTEN 65

1. Ableitung von $\det \circ C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 65
2. Koeffizienten des verallgemeinerten charakteristischen Polynoms 69
3. Koeffizienten des speziellen charakteristischen Polynoms 71
4. Produktformeln 74
5. Abhängigkeiten der Eigenwerte von der Matrix . 75
6. Das charakteristische Polynom einer gestörten Matrix 77
7. Das spezielle charakteristische Polynom einer gestörten Matrix $A+sB$ 79
8. Nullstellen algebraischer Funktionen 81
9. Stabilität einfacher Eigenwerte 1 (Eigenwertwanderung) 82
10. Stabilität einfacher Eigenwerte 2 91
11. Stabilität kleiner und großer Eigenwerte . . . 94
12. Wanderung eines einfachen Eigenwertes 0 . . . 96
13. Störung hermite'scher Matrizen 1 98
14. Störung hermite'scher Matrizen 2 101

VIII INDIREKTE IDENTIFIKATION 106

1. Korrektur des Rechenmodells unter Verwendung von MGS 120
2. Beispiel (1) – Zeitbereichskorrektur 122
3. Beispiel (2) – Korrektur des ungedämpften Systems mittels Eigenwerten . . 124

IX LITERATURVERZEICHNIS 136

PARAMETRISCHE IDENTIFIKATION ELASTOMECHANISCHER SYSTEME

I. ALLGEMEINE PROBLEMSTELLUNG

Gegeben ist eine reale technische Konstruktion (System). Gesucht wird ein möglichst gut angepaßtes mathematisches Modell zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens dieses Systems.

Hierzu wird zunächst aufgrund der wesentlichen technisch-physikalichen Gegebenheiten ein physikaliches Modell aufgestellt.

Dieses physikaliche Modell wird in ein mathematisches Modell (d.h. eine Modellgleichung) übersetzt und anschließend im sog. Strukturversuch (d.h. in experimenteller Analyse am System) mit der Konstruktion verglichen. Falls dieser Vergleich nicht zufriedenstellende Ergebnisse liefert, wird das mathematische Modell nachträglich angepaßt.

Die parametrische Identifikation bedarf eines Modells mit Struktur. Die zu identifizierenden Größen sind die Modellparameter.

Man unterscheidet:
(1) Direkte Modellparameter: Trägheits-, Dämpfungs- und Steifigkeitsdaten.
(2) Indirekte Modellparameter: Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen.

Die Behandlung komplizierter schwingungsfähiger Systeme erfolgt überwiegend mit diskreten Modellen.

Innerhalb der Systemanalyse führen die Finite-Element-Methode und das Rayleigh-Ritz-Verfahren auf diskrete Modelle. Hinzu kommt, daß die digitale Verarbeitung letztlich eine Diskretisierung des Problems beinhaltet.

Wir beschränken die Problemstellung auf Hermite'sche Probleme,
d.h. lineare, zeitinvariante, gedämpfte elastomechanische Systeme ohne Kreiselwirkung und nichtkonservative Lagekräfte.

Die parametrische Identifikation diskreter linearer Systeme (Systeme mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden) basiert auf der Kenntnis der theoretischen Zusammenhänge zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen, den direkten und indirekten Systemparametern, also demzufolge zwischen Ein-, Ausgangs- und Eigenschwingungsgrößen.

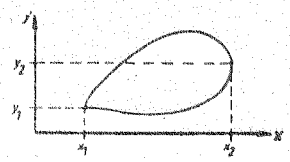
Es wird deshalb nützlich sein, einen Abschnitt über die Schwingungstheorie linearer, zeitinvarianter Mehrfreiheitsgradsysteme mit deterministischer Erregung voranzustellen.

Vorher wird in kurzen Zügen der Begriff der Variation und die Lagrangeformulierung der Mechanik eingeführt, um mit diesem Prinzip die Schwingungsgleichung herzuleiten.

II. DER BEGRIFF DER VARIATION - DAS LAGRANGE HAMILTONSCHE INTEGRATIONSPRINZIP

1. Variation

Motivation: Wir stellen uns das Problem, die kürzeste Verbindung zweier Punkte (x_1,y_1) und (x_2,y_2) in der Ebene $\mathbb{R}^2$ zu ermitteln.



Die mathematische Formulierung führt auf

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx \qquad \dot{y} := \frac{dy}{dx}$$

dabei ist $y(x)$ eine differenzierbare Kurve in $[x_1,x_2]$ mit $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$

Gesucht wird:

$\inf\limits_{y \in D} I(y)$ $\qquad$ $D :=$ Definitionsbereich des Funktionals I

Allgemeiner betrachten wir gleich

$$\boxed{I(y) := \int_{x_1}^{x_2} f(y,\dot{y},x)\,dx \qquad \dot{y} := \frac{dy}{dx}}$$

Um den gewohnten Apparat der Differentialrechnung anwenden zu können, machen wir folgende (wenig einschränkende) Voraussetzung.

$$\boxed{D = \{y(x,\alpha) \mid y(x,\alpha) = y(x,0) + \alpha\eta(x),\ \eta \in C^2(\mathbb{R}),\ \eta(x_1) = \eta(x_2) = 0\}}$$

Im Hinterkopf haben wir folgende Idee:

$y(x,0)$ sei die, oder besser eine Extremale von I und die anderen Kurven lassen sich aus dieser in D angegebenen Homotopie erzeugen.

Unser I-Funktional wird damit abhängig von α

$$I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x,\alpha),\ \dot{y}(x,\alpha),\ x]\,dx$$

Die Extremalenbedingung lautet:

$$\delta I = o \qquad \text{wobei} \quad \delta I := \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{|\alpha=0}$$

Setzt man analog

$$\delta y := \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{|\alpha=0} = \eta$$

und beachtet

$$\delta \dot{y} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{d}{dx}(y(x,o)+\alpha\eta(x))\right)_{|\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(\dot{y}(x,o)+\alpha\dot{\eta}(x))_{|\alpha=0} = \dot{\eta}(x)$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(y(x,o)+\alpha\eta(x))_{|\alpha=0}\right] = \frac{d}{dx}(\delta y)$$

so folgt mit Vertauschung von Integration und Differentiation

$$\delta I = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\int_{x_1}^{x_2} f(y,\dot{y},x)\, dx\right)_{|\alpha=0} = \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(y,\dot{y},x)\, dx\right)_{|\alpha=0}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) dx_{|\alpha=0}$$

Da $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = o$ gilt

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\delta y\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\, dx$$

Partielle Integration im zweiten Integral liefert

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\frac{d}{dx}(\delta y)\, dx = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\delta y\, dx$$

Da die Variation $\delta y = \eta$ an den Rändern x_1, x_2 verschwindet $(\eta(x_1) = \eta(x_2) = o)$ erhalten wir:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y}\delta y\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\delta y\, dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right)\right]\delta y\, dx$$

Definiere: $\boxed{\frac{\delta f}{\delta y} := \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}}$ dann gilt

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(y,\dot{y},x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(y,\dot{y},x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta f}{\delta y}\delta y\, dx$$

Wir nehmen an, daß $\frac{\delta f}{\delta y}$ stetig in $[x_1, x_2]$ ist. Weiterhin war $\eta = \delta y$ beliebig zweimal stetig differenzierbar mit $\eta(x_1) = \eta(x_2) = o$. Daraus folgt schon

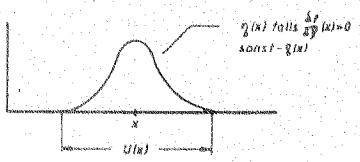
$$\frac{\delta f}{\delta y} \equiv o \text{ in } [x_1, x_2] .$$

Denn wäre dies nicht der Fall (d.h. es gäbe ein $x \in (x_1, x_2)$ mit $\frac{\delta f}{\delta y}(x) \neq 0$) so existierte wegen der Stetigkeit von $\frac{\delta f}{\delta y}$

sogar eine ganze Umgebung $U(x)$ so daß $\frac{\delta f}{\delta y}$ in $U(x)$ sein Vorzeichen nicht wechselt. $\eta(x)$ wie im nachstehenden Bild würde aber

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta f}{\delta y}\, \delta y \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta f}{\delta y}\, \eta \, dx \neq 0$$

zur Folge haben.



Also gilt: $\delta I = 0 \iff \frac{\delta f}{\delta y} = 0$

Wenden wir dieses Ergebnis auf unser einleitendes Beispiel an, so erhalten wir mit

$$f(y,\dot{y},x) = \sqrt{1+\dot{y}^2}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0$$

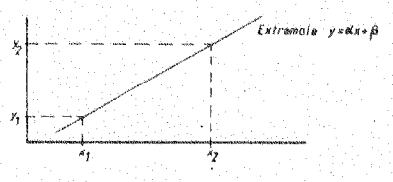
$$\iff \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\right) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = c \qquad c = \text{konstant}$$

$$\iff \frac{2\dot{y}}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = c \implies \frac{\dot{y}^2}{1+\dot{y}^2} = c^2 \implies \dot{y}^2 = c^2(1+\dot{y}^2)$$

$$\implies (1-c^2)\,\dot{y}^2 = c^2 \underset{|c|\neq 1}{\implies} \dot{y}^2 = \frac{c^2}{1-c^2} =: a^2 \implies \dot{y} = |a| =: \alpha$$

Also $\dot{y} = \alpha = \frac{dy}{dx} \implies y = \alpha x + \beta$

Die Bedingungen $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ liefern die Konstanten α und β. Die Extremale wird gerade die affine Funktion durch die beiden Punkte (x_1,y_1) (x_2,y_2) und liefert ersichtlich minimale Weglänge.



Diese heuristischen Vorbetrachtungen führen jetzt zum Begriff der Variationsableitung und der Definition einer Extremalen. Zu beachten ist hierbei, daß eine Extremale (falls existent) natürlich noch lange kein Minimum oder

Maximum sein muß. Hinreichende Kriterien für solche Unterscheidungen findet man im Werk von "Courant-Hilbert Methoden der mathematischen Physik Band I, II Heidelberger Taschenbücher".

Wir hingegen benötigen solche Unterscheidungen im folgenden nicht.

Def u. Satz II.1 Variationssatz

Es sei:

(1) $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) := \{f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \mid f \text{ ist zweimal stetig differenzierbar}\}$

(2) $q \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$

(3) $V(q) := \{q+\alpha\eta \mid \eta \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N),\ \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$

(4) $L: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar

(5) $I: V(q) \to \mathbb{R} \quad I(q) := \int_{t_0}^{t_1} L(q(t),\dot{q}(t),t)dt \qquad \dot{q} := \frac{dq}{dt}$

Dann heißt

$V(q)$ der Variationsraum von q

$\delta I := \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} I(q+\alpha\eta)\right]_{\alpha=0}$ die erste Variation von I an der Stelle q längs η

Wir sagen:

Eine Kurve $\gamma := \{q(t) : t_0 \leq t \leq t_1$ heißt Extremale wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

a) $\delta I = 0$ für alle $\eta \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ mit $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$

b) $\frac{\delta L}{\delta q^t} := \frac{\partial L}{\partial q^t} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^t} = 0$ Euler'sche Variationsgleichung

Dabei ist: $\frac{\partial L}{\partial q^t} := \left(\frac{\partial L}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial L}{\partial q_N}\right) = \nabla_q L$

Satz II.2 Kovarianzprinzip der Variationsableitung für C^2-Diffeomorphismen

Es sei:

(1) Die Voraussetzung des Variationssatzes gegeben

(2) $\mathbb{R}^N_q \leftrightarrow \mathbb{R}^N_{\bar{q}}$ ein C^2-Diffeomophismus $q=q(\bar{q},t)$
[d.h.: $q \longleftrightarrow \bar{q}$ zweimal stetig differenzierbar bijektiv]

(3) $\bar{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) := L\left[q(\bar{q}(t),t), \frac{d}{dt} q(\bar{q}(t),t), t\right]$ "Einsetzen der Parametrisierung $\bar{q}$"

Dann gilt: $\frac{\delta \bar{L}}{\delta \bar{q}^t} = \frac{\delta L}{\delta q^t}\frac{\partial q}{\partial \bar{q}^t}$ Kettenregel für Variationsableitung

Satz II.3 Variation unter Nebenbedingungen

Es seien wieder die Voraussetzungen des Variationssatzes gegeben und zusätzlich

(1) $f: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^K$ $(K<N)$ zweimal stetig differenzierbar

(2) $\operatorname{rang}\left(\frac{\delta f}{\delta q^t}\right) = K$ (maximal)

Dann sind die Variationsprobleme

a) $\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q,\dot{q},t)dt = 0$ und $f(q,\dot{q},t) = 0$

b) $\delta \int_{t_0}^{t_1} L_K(q,\lambda,\dot{q},t)dt = 0$

wobei $L_K(q(t),\lambda(t),\dot{q}(t),t) := L(q(t),\dot{q}(t),t)+\lambda(t)^t f(q(t),\dot{q}(t),t)$

äquivalent.

Die Sätze II.1, II.2, II.3 findet man z.B. bei G.H. Goedecke, Am. J. Phys. 34, 571 (1966)

2. Das Lagrange-Hamilton'sche Integralprinzip

Geg.: Ein System von n Massepunkten $m_1,\ldots,m_n$ mit den Ortskoordinaten $\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n$ und den Krafteinwirkungen $\vec{F}_1,\ldots,\vec{F}_n$

Wir nennen F_i (verallgemeinert) konservativ, falls ein Potential $U = U(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1,\ldots,\dot{\vec{r}}_n, t)$ existiert mit $\vec{F}_i = -\frac{\delta U}{\delta \vec{r}_i{}^t}$

Definiert man $\vec{p}_i := m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$ (Impuls des i-ten Massepunktes), so erhält man als Newton'sche Bewegungsgleichungen im Inertialsystem (= nicht rotierendes, ruhendes oder gleichförmig transliertes Koordinatensystem) die Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

Setzt man

$$r^t := (\vec{r}_1^{\,t},\ldots,\vec{r}_n^{\,t}) \in R^{3n}$$

$$p^t := (\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n^{\,t}) \in R^{3n}$$

$$M := \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_n \end{pmatrix} \qquad M_j := \begin{pmatrix} m_j & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 \\ 0 & 0 & m_j \end{pmatrix}$$

dann lauten die Newtongleichungen

$$\dot{p} = F \qquad p = M\dot{r} \qquad p,F,r \in \mathbb{R}^N \qquad N := 3n$$

Im verallgemeinert konservativen Fall gilt:

$$F^t = -\frac{\delta U}{\delta r^t} \qquad U = U(r,\dot{r},t)$$

Definiert man weiter:

$$T := \frac{1}{2}\,\dot{r}^t\, M\, \dot{r} \qquad \text{kinetische Energie des Systems } (M=M^t)$$

So gilt:

$$\frac{\delta T}{\delta r} = \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = -\frac{d}{dt}M\dot{r} = -\frac{dp}{dt} = -\dot{p}$$

Also

$$\dot{p}=F \Longleftrightarrow -\dot{p}+F=0 \Longleftrightarrow \frac{\delta T}{\delta r}+F=0 \Longleftrightarrow \frac{\delta T}{\delta r}-\frac{\delta U}{\delta r}=0 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\delta L}{\delta r}=0}$$

wobei $\boxed{L := T-U}$

Andererseits:

$$\dot{p}=F \Longleftrightarrow \frac{\delta T}{\delta r}+F=0 \Longleftrightarrow \frac{\delta T}{\delta r^t}+F^t=0$$

$$\underset{\text{Kovarianz-prinzip}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{\delta T}{\delta r^t}\frac{\partial r}{\partial q^t}+F^t\frac{\partial r}{\partial q^t}=0 \Longleftrightarrow \frac{\delta T}{\delta q^t}+Q^t=0$$

wobei $\quad Q^t := F^t\,\dfrac{\partial r}{\partial q^t}$

Also $\boxed{\dfrac{\delta T}{\delta q}+Q=0}$ $\boxed{Q := \dfrac{\partial r^t}{\partial q}F}$ <u>Q heißt generalisierte Kraft</u>

Wir haben damit eine sehr elegante Möglichkeit gefunden die Newton'schen Bewegungsgleichungen für einen beliebigen nichtkarthesischen Koordinatensatz q (d.h. eine beliebige Parametrisierung der Bewegung) hinzuschreiben.

Im Fall des konservativen Systems

$$F = -\frac{\delta U}{\delta r} \Longrightarrow Q = \frac{\partial r^t}{\partial q}F = -\frac{\partial r^t}{\partial q}\frac{\delta U}{\delta r} = -\frac{\delta U}{\delta q}$$

haben wir lediglich T und U zu ermitteln (d.h. zwei skalare Funktionen, keine aufwendige Vektorrechnung mehr) und erhalten sofort aus

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0 \Longleftrightarrow \frac{\delta L}{\delta q} = 0 \qquad L := T-U$$

unsere Newton'sche Bewegungsgleichungen. Die Scheinkraft

$\frac{\delta T}{\delta r} = -\dot{p} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right)$ heißt "D'Alembert'sche Trägheitskraft"

$Q = -\frac{\delta U}{\delta q}$ heißt "Generalisierte Kraft"

Weiter können wir das Integralprinzip auch (zumindest formal) auf nichtkonservative Kräfte erweitern, indem wir schreiben:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+W)\,dt = 0 \qquad T := \frac{1}{2}\dot{r}^t M \dot{r} \qquad W := F^t r$$

<u>Dabei ist zu beachten:</u>

$$\delta W = F^t \delta r = F^t \frac{\partial r}{\partial q^t}\,\delta q$$

falls $r=r(q)$ und $r \leftrightarrow q$ ein C^1-Diffeomorphismus ist (d.h. F ist bei der Variation als konstant anzusehen).

Der Ausdruck: $\delta W := F^t \delta r$ ist in der Statik wohlbekannt und heißt Virtuelle Arbeit.

Wir können zusammenfassen:

<u>Das Hamilton-Lagrange'sche Integralprinzip</u>

In der oben geschilderten Situation gilt:
Die Bewegung des Systems zwischen den Zeitpunkten t_0 und t_1 verläuft derart, daß

a) Im konservativen Fall $\delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$

$L := T-U \qquad T = \frac{1}{2}\dot{r}^t M \dot{r} \qquad F = -\frac{\delta U}{\delta r} \qquad U = U(r,\dot{r},t)$

b) Im beliebigen Fall $\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+W)\,dt = 0$

$T = \frac{1}{2}\dot{r}^t M \dot{r} \qquad W = F^t r \qquad F =$ konstant bei Variation

<u>Der Spezialfall der viskosen Dämpfung (Dissipationsfunktion)</u>

Besteht unsere äußere Kraft F zum Teil aus konservativem, zum Teil aus nichtkonservativem Anteil, so ergeben sich die Lagrangegleichungen zu

$$\boxed{\frac{\delta L}{\delta q} + Q = 0}$$

wobei $L := T-V$ $\quad V :=$ Potential der konservat. Kräfte
$Q :=$ Generalisierte Kraft der nichtkonservativen Kräfte

Betrachtet man jetzt eine nichtkonservative Dämpfung der Form

$$\boxed{F = -B\dot{r} \quad \Big| \quad B = B^t} \qquad \underline{\text{Viskose Dämpfung}}$$

so bildet man die Dissipationsfunktion

$$\boxed{\dot{F}_D := \frac{1}{2}\,\dot{r}^t\,B\dot{r}} \qquad \underline{\text{Dissipationsfunktion der viskosen Dämpfung}}$$

und es folgt:

$$F^t = -\dot{r}^t\,B = -\frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{r}^t}$$

$$\text{also: } Q^t = F^t\,\frac{\partial r}{\partial q^t} = -\frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{r}^t}\,\frac{\partial r}{\partial q^t} = -\frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{r}^t}\,\frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}^t} = -\frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{q}^t}$$

$$\text{d.h.: } Q = -\frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{q}}$$

Die Lagrangegleichung im Fall der viskosen Dämpfung lautet daher

$$\boxed{\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{q}} = 0} \qquad \underline{\text{Lagrangegleichung der viskosen Dämpfung}}$$

III MODELLBILDUNG IM MASCHINENBAU ERMITTLUNG VON FEDERKONSTANTEN EINFACHER SYSTEME

1. Balkenstatik (Lagerreaktionen)

Def. III.1 Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Statik

Eine ebene Kräftegruppe $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$ (Eben bedeutet: Alle Kraftvektoren verlaufen in einer Ebene) befindet sich im Gleichgewicht, wenn ihr Moment in Bezug auf einen beliebig gewählten Punkt O verschwindet und die mathematisch resultierende Gesamtkraft (alle Kraftvektoren denkt man sich in O angreifend) verschwindet.

In Formeln:

$$\vec{F} := \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad \vec{M}_O := \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$

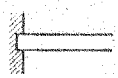
wobei $\vec{r}_i$ der Vektor vom Punkt O zum Angriffspunkt der Kraft $\vec{F}_i$ ist.

Als Balken bezeichnet man einen stabförmigen Körper, der Lasten quer zu seiner geraden Achse aufnehmen kann.

Man unterscheidet folgende Stützungsarten:

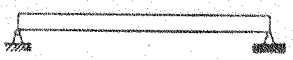
Festes Gelenk - statisch zweiwertig
(kann Kraft beliebiger Richtung, jedoch kein Moment übertragen)

Rollenlager - statisch einwertig
(kann nur Kraft senkrecht zu den Rollen übertragen, Rollen in Zeichn. oft weggel.)



Feste Einspannung - statisch dreiwertig
(kann beliebige Kraft und beliebiges Moment übertragen)

Allgemein ist ein Körper mit n Fesseln (n-wertige Lagerung) n-3 fach statisch unbestimmt (n - 3), z.B.



n=3 statisch bestimmt

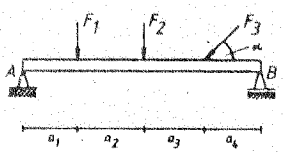
n=4 einfach statisch unbestimmt

n=6 dreifach statisch unbestimmt

$$n = \sum_{j=1}^{k} n_j \qquad n_j := \text{Fesselzahl des j-ten Lagers}$$

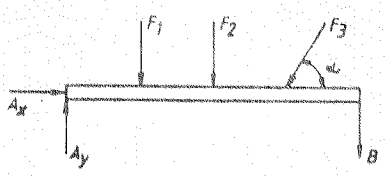
Mit den Gleichgewichtsbedingungen der ebenen Statik lassen sich nur Lagerreaktionen für statisch bestimmte Systeme lösen. Statisch unbestimmte Systeme werden mit den Mitteln der Festigkeitslehre angegangen.

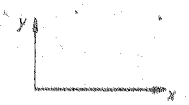
Ermittlung der Lagerreaktionen statisch bestimmter Balken



$$b_j := \sum_{k=1}^{j} a_k \qquad j=1,2,3 \qquad b_4 := 1$$

1. Schritt: Anstelle der Lager bringe Zwangskräfte und falls das Lager Momente übertragen kann Zwangsmomente beliebiger Richtung an (Freischneiden des Balkens).





Positive Momentenrichtung

2. Schritt: Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen

$\sum x_i = 0$ Summe aller Kräfte in Richtung x ist 0

$$A_x - F_3 \cos\alpha = 0 \implies A_x = F_3 \cos\alpha$$

$\sum Y_i = 0$ Summe aller Kräfte in Richtung Y ist 0

$$A_Y - F_1 - F_2 - F_3 \sin\alpha - B = 0$$

$\sum M_A = 0$ Summe aller Momente um Punkt A (Lager A) ist 0

$$- F_1 b_1 - F_2 b_2 - F_3 \sin\alpha\, b_3 - Bl = 0$$

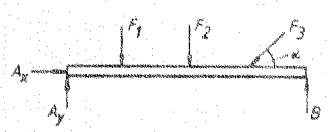
$$\implies B = - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{2} F_i\, b_i - \frac{1}{l} F_3 \sin\alpha$$

Damit erhalten wir:

$$A_x = F_3 \cos\alpha \qquad B = - \frac{F_1 b_1 + F_2 b_2 + F_3 \sin\alpha}{l}$$

$$A_Y = B + F_1 + F_2 + F_3 \sin\alpha$$

Da A_x, $A_y > 0$ und $B < 0$ war die Richtung von A_x, A_Y richtig gewählt, die von B falsch. Also ergibt sich folgende Lösung:



$$A_x = F_3 \cos\alpha$$
$$A_Y = F_1 + F_2 + F_3 \sin\alpha - B$$
$$B = \frac{F_1 b_1 + F_2 b_2 + F_3 \sin\alpha}{l}$$

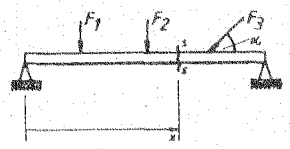
Für eine Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit (unter Verwendung des Satzes von Euler) sei auf das Buch von

István Szabó : Höhere Technische Mechanik Seite 2-5

verwiesen.

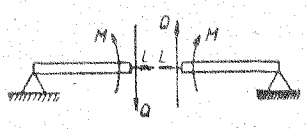
2. Innere Kräfte und Momente am Balken

Die auf einen Balken einwirkenden äußeren Kräfte und Momente erzeugen "innere" Kräfte und Momente (Schnittkräfte, Schnittmomente), zu deren Ermittlung man den Balken durch einen gedachten Schnitt zerlegt, auf die abgeschnittenen Balkenstücke werden dann die Gleichgewichtsbedingungen angewandt.



s-s bedeutet Schnitt an der Stelle x

Vorzeichendefinition:



Positive Schnittreaktionen

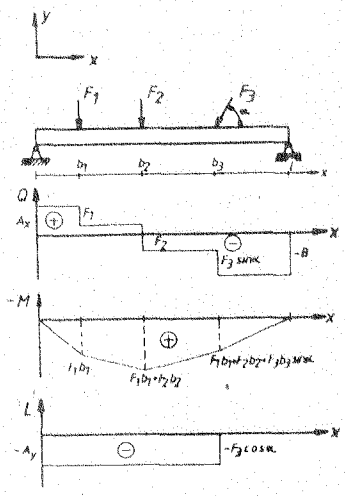
L := Längskraft (oft N=L Normalkraft)
M := Biegemoment
Q := Querkraft

Die am linken Schnittufer wirkenden Reaktionen stehen mit denen am rechten Schnittufer im Gleichgewicht. Werden die Balken wieder zusammengefügt, so heben sich die Schnittgrößen auf.

Man geht folgendermaßen vor:

1. Ermittlung der Lagerreaktion
2. Ermittlung der Schnittkräfte und -momente

Im Beispiel:



Q positiv ≙ Q zeigt am rechten Schnittufer in y-Richtung

M positiv ≙ Durchbiegung nach unten

L positiv ≙ Zug

Die Längskraft ist meist nicht von Bedeutung und man betrachtet daher den folgenden Belastungsfall.

Parallele Krafteinwirkung der Kräfte F_k an den Stellen a_k $k=0,\dots,n$

Wir ordnen der Kraftverteilung den Linienduck

$$q(x) := \sum_{i=0}^{n} q_i \delta_{a_i}(x) \quad \text{mit} \quad q_i := \begin{cases} F_i & \text{falls } F_i \text{ in positiver y-Richtung wirkt} \\ -F_i & \text{falls } F_i \text{ in negativer y-Richtung wirkt} \end{cases}$$

zu, d.h. wir verstehen q als Maß mit den Gewichten q_i an den Stellen a_i

$$\delta_{a_i}(x) := \left\{ \begin{matrix} 1 & x=a_i \\ 0 & \text{sonst} \end{matrix} \right\} \text{ ist das Punktmaß in } a_i$$

Die Querkraft Q ergibt sich durch Integration

$$Q(x) = \int_{-\infty}^{x} q(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \sum_{i=0}^{n} q_i \delta_{a_i}(t)dt = \sum_{i=0}^{n} q_i \int_{-\infty}^{x} \delta_{a_i}(t)dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n} q_i \int_{-\infty}^{x-a_i} \delta_0(t)dt = \sum_{i=0}^{n} q_i \theta(x-a_i)$$

wobei $\theta(y) := \left\{ \begin{matrix} 1 & y>0 \\ 0 & y<0 \end{matrix} \right\}$ die Heaviside'sche Sprungfunktion ist.

Das Biegemoment ergibt sich durch nochmalige Integration

$$M(x) = \int_{-\infty}^{x} Q(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \sum_{i=0}^{n} q_i \theta(t-a_i)dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n} q_i \int_{-\infty}^{x} \theta(t-a_i)dt = \sum_{i=0}^{\max\{i:a_i \le x\}} q_i \int_{a_i}^{x} dt$$

$$= \sum_{i=0}^{\max\{i:a_i \le x\}} q_i (x-a_i)$$

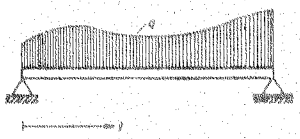
<u>Damit ergeben sich die Beziehungen</u>

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad \frac{dQ}{dx} = q$$

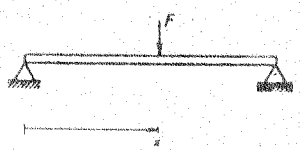
Beachte: Die Vorzeichendefinition von q ist in vielen Lehrbüchern umgekehrt gewählt, so daß dort die Gleichungen

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad \frac{dQ}{dx} = -q \qquad \text{oft auftauchen.}$$

Diese Gleichungen gelten auch für den Fall eines eingeleiteten absolutstetigen (bezüglich Lebesguemaß) Liniendruckes,



wobei man die Lagerreaktionen wie bisher aus dem folgenden Ersatzsystem berechnen kann.



$$F := \int_0^l q(t)dt \qquad l := \text{Gesamtlänge des Balkens}$$

$$x := \frac{1}{F}\int_0^l tq(t)dt$$

F wird dann die Gesamtkraft des Liniendruckes q
x wird der Momentenschwerpunkt des Liniendruckes q

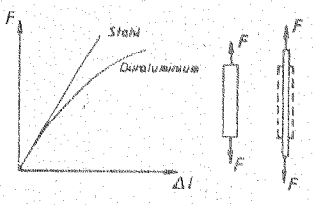
Also benötigen wir lediglich die Beziehungen

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = Q \qquad \frac{dQ}{dx} = q \qquad \text{(beachte Vorzeichendefinition von } q\text{)}}$$

um nach Ermittlung der Lagerreaktionen unsere Querkraft- und Biegemomentdiagramme berechnen zu können.

3. Zugversuch - Hookesches Gesetz

Ein genormter Probestab wird in einer Zerreißmaschine einem Zugversuch unterworfen. Die Belastung wird langsam (quasistatisch) aufgebracht und der Zusammenhang zwischen Last und Stabverlängerung wird gemessen.

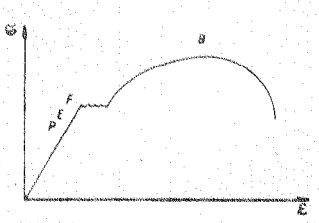


Bildet man die bezogenen Größen

$$\sigma := \frac{F}{A_0} \qquad A_0 := \text{Ausgangsquerschnitt}$$

$$\varepsilon := \frac{\Delta l}{l_0} \qquad l_0 := \text{Ausgangslänge}$$

so nennt man σ die Zugspannung, ε die Dehnung des Stabes. Trägt man σ über ε ab, so erhält man das Spannungs-Dehnungsdiagramm, das z.B. für Stahl folgendes qualitative Verhalten zeigt:



P := Proportionalitätsgrenze (reine Proportionalität)

E := Elastizitätsgrenze (bei Entlastung keine bleibende Verformung)

F := Fließ- oder Streckgrenze

B := Bruchgrenze (größte aufgenommene Kraft)

P und E fallen praktisch zusammen

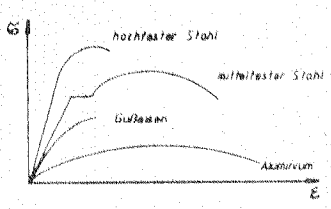
Nach Überschreiten der Streckgrenze, genauer bei Erreichen der Bruchgrenze tritt an einer Stelle des Probestabes eine Einschnürung auf. Am Ende des Versuches zerreißt der Stab an dieser Stelle mit einem Knall.

Wird die Spannung jeweils auf den momentan kleinsten Querschnitt A_{mom} bezogen

$$\sigma' = \frac{F}{A_{mom}}$$

so erhält man die wirkliche Spannungs-Dehnungskurve, die dann ab der Fließgrenze einen monoton steigenden Verlauf hat.

Die $\sigma - \varepsilon$ Kurve hängt vom Werkstoff ab.

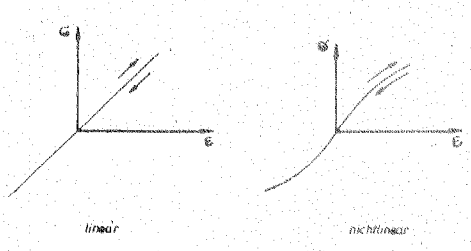


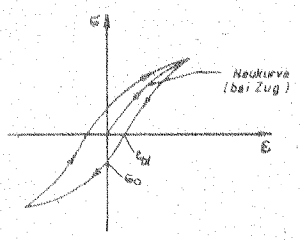
Bei zahlreichen Nichteisenmetallen fehlt eine ausgeprägte Streckgrenze, man legt dann sogenannte Dehngrenzen fest

$\sigma_E \longrightarrow \sigma_{0,01}$ Spannung bei ε = 0,01 % bleibender Dehnung

$\sigma_F \longrightarrow \sigma_{0,2}$ Spannung bei ε = 0,2 % bleibender Dehnung

Verschiedenes Materialverhalten





Elastisch

(Bel.-kurve = Entl.-kurve)

auch im Druckbereich
$\sigma < 0$ da $F < 0$

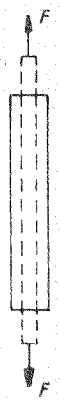
Nichtelastisch

(Bel.-kurve = Entl.-kurve)

Erstbelastung: (σ, ε) durchläuft Neukurve, bei Entlastung bleibt ε_{bl} (bleibende Dehnung) zurück. Erst bei Druck $\sigma_0 < 0$ wird die Ausgangslänge l_0 wieder erreicht. Die Neukurve wird dann nie wieder durchlaufen. Bei jeder weiteren Last ob Zug oder Druck durchläuft (σ, ε) die Randkurve oder Hysterese. Die von der Hysterese umschlossene Kurve ist ein Maß für die Werkstoffdämpfung.

Das Hookesche Gesetz sagt aus: Für nicht zu große Belastung gilt:

Für Zug:



$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$ E := Elastizitätsmodul (Proportionalitätskonst.)

$$\boxed{\varepsilon_l := \frac{\Delta l}{l_0}}$$ heißt Längsdehnung

$$\boxed{\varepsilon_q := \frac{\Delta d}{d}}$$ heißt Querdehnung

Zusammenhang

$$\boxed{\varepsilon_l = -\mu\varepsilon_q}$$ μ := Poissonsche Querkontraktionszahl ($\mu_{Stahl} \approx 0{,}3$)

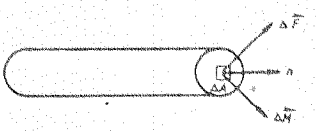
Analog gilt für Schub:

$$\boxed{\tau := \frac{F}{A}}$$ Schubspannung
γ := Verformungswinkel

$$\boxed{\tau = G\gamma}$$ Hooke'sches Gesetz
G := Gleitmodul

Zusammenhang: $$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}}$$

Das Hooke'sche Gesetz beim allgemeinen 3-achsigen Zustand



An einem Flächenelement ΔA mit Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ der Schnittfläche wirken

1) eine innere Kraft $\Delta\vec{F}$
2) ein inneres Moment $\Delta\vec{M}$

Man definiert als Spannungsvektor

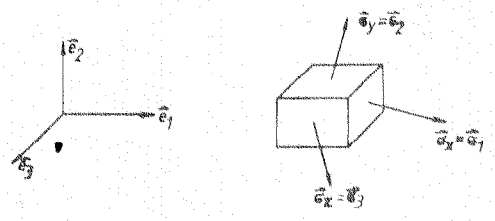
$$\boxed{\vec{\sigma} := \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}}{dA}}$$

und setzt in der sogenannten "klassischen" Elastizitätstheorie

$$\boxed{\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{M}}{\Delta A} = 0}$$

In einer allgemeinen Theorie bleibt dieser Grenzwert endlich, dann treten sogenannte Momentenspannungen auf (Theorie des Cosserat-Kontinuums).

Der oben definierte Spannungvektor hängt von der Orientierung des Flächenelementes (also $\vec{n}$) ab, er wird deshalb mit $\vec{\sigma}_{\vec{n}}$ bezeichnet. Der Spannungszustand in einem Punkt ist bekannt, wenn die Spannungsvektoren für 3 orthogonale Flächenelemente bekannt sind. Die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 beschreiben ein karthesisches Koordinatensystem x, y, z. Der Spannungsvektor $\vec{\sigma}_x$ wikt z.B. am Flächenelement x=konstant (äußere Normale e_1)



Zerlegen in Richtung der Vektoren e_1 e_2 e_3

liefert $\vec{\sigma}_x = \sigma_{xx}\vec{e}_1 + \sigma_{xy}\vec{e}_2 + \sigma_{xz}\vec{e}_3$

Allgemeiner:

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} e_j$$

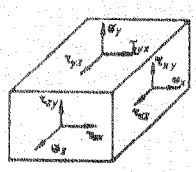
wobei in σ_{ij} i das Flächenmoment und j die Richtung angibt.

Die Matrix $\boxed{\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,3}}$ <u>heißt Spannungstensor</u>

Die Komponenten $\sigma_i := \sigma_{ii}$ $\quad i=1,2,3$ heißen Normalspannungen

$\tau_{ij} := \sigma_{ij}$ $\quad i \neq j$ heißen Schubspannungen

Man kann die Spannungen an einem Würfelelement veranschaulichen.



Die Spannungsfunktionen sind stetig, d.h. $\sigma = \sigma(x,y,z)$ ist eine stetige Matrizenfunktion. Außerdem ist wegen $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ σ symetrisch (keine Momentenspannung). Hauptachsentransformation führt auf die Hauptspannungen

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

Aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen folgt:

1) Momentengleichgewicht: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ für $i<j$ liefert 3 Bed.

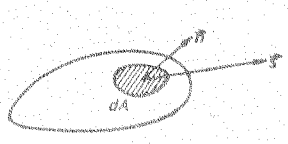
2) Kräftegleichgewicht: $\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} = 0$ für $i \in \{1,2,3\}$ liefert 3 Bed.

(dabei ist $\vec{r} := (x,y,z)^t$ und r_j die j-t_e Komponente von r)

An den Oberflächen muß ein stetiger Übergang der Spannungen zu den äußeren Belastungen erfolgen, es folgen die GG-Bedingungen am Rand.

3) Oberflächenstetigkeit: $\sum_j \sigma_{ij} n_j = s_i$ "Formel von Canchy" (3 Bed.)

wobei s der Randspannungsvektor ist.



Die 6 kinematischen und 3 statischen Beziehungen reichen zur Berechnung der 15 unbekannten Funktionen

3 Verschiebungen
6 Verzerrungen
6 Spannungen

nicht aus. Die zusätzlichen Gleichungen liefert der kausale Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen (Stoff-

gesetz). Dieser physikaliche Zusammenhang muß experimentell ermittelt werden.

Für linear-elastisches Verhalten gilt das Hooke'sche Gesetz $\sigma = \varepsilon E$ im eindimensionalen Fall. Glücklicherweise zeigen Metalle als technisch wichtigste Werkstoffe linear-elastisches Verhalten innerhalb gewisser Grenzen.

Das erweiterte Hooke'sche Gesetz für isotrope Körper (oder auch Poissonsche Gleichung) lautet:

$$\boxed{\sigma = 2G\left(\varepsilon + \frac{\mu e}{1-2\mu} E_3\right)}$$ <u>Hooke'sches Gesetz des 3-achsigen Spannungszustandes</u>

dabei ist: G := Gleitmodul

μ := Poissonsche Querkontraktionszahl

ε := Verzerrungstensor $\varepsilon = \varepsilon^t$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

e := Spur $(\varepsilon) = \frac{\Delta V}{V}$ Volumenelilation

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$ Dehnung

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy}$$ Verschiebung

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma_{xz}$$

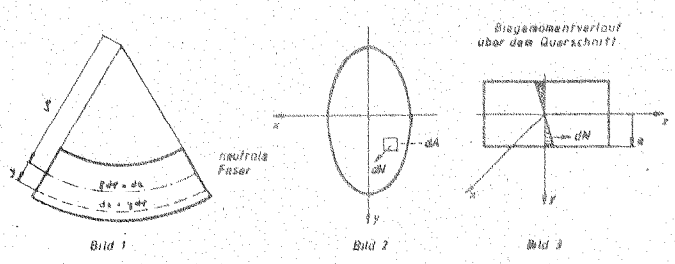
und $(u(\vec{r}), v(\vec{r}), w(\vec{r}))^t$ die Verschiebung des Punktes $\vec{r} = (x,y,z)^t$

Auch zwischen den Verzerrungen existieren noch Verträglichkeitsbedingungen (ST. VENANT). Zu diesen Ausführungen vgl etwa:

"Höhere Technische Mechanik von István Szabó S. 14-18"
(Herleitung aus Prinzip der virtuellen Verrückung)

"Technische Mechanik V von G.H. Hahn S. 2-11"

4. Die Gleichung der Biegelinie (am Balken)



Wir betrachten wieder den einfachsten Fall der Biegung (Biegemomentvektor liegt in einer Symetrieebene des Balkenquerschnittes, sogen. Hauptachse)

Es gilt:

$$dN = \sigma(y)dA \underset{\text{Hook}}{=} \varepsilon(y)EdA \underset{\text{Bild 1}}{=} \frac{dz + yd\varphi - dz}{dz} EdA = \frac{yd\varphi}{\rho d\varphi} EdA = \frac{y}{\rho} EdA$$

$$= \frac{E}{\rho} ydA$$

Also folgt zunächst:

$$N = \frac{E}{\rho}\int_A ydA = 0 \qquad \text{da } y \text{ - Flächenschwerpunktskoordinate}$$

Weiter: $$dM_{b_x} \underset{\text{Bild 3}}{=} ydN = \frac{E}{\rho} y^2 dA$$

Also: $$M_{b_x} = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x \qquad I_x := \int_A y^2 dA$$

Wir erhalten:

$$\boxed{M_b = \frac{E}{\rho} I_b}$$ wobei I_b das zu M_b gehörende Flächenträgheitsmoment

$\vec{M}_b$ zeigt in Hauptachse x $\Rightarrow M_b = M_{b_x}$, $I_{b_x} = \int_A y^2 dA$

$\vec{M}_b$ zeigt in Hauptachse y $\Rightarrow M_b = M_{b_y}$, $I_{b_y} = \int_A x^2 dA$

Beachte $x \perp y$ hierfür erforderlich

Weiter: $$\sigma_{max} = \sigma_b \underset{\text{Bild 3}}{=} \sigma(e) =: \frac{M_b}{W_b}$$

wobei $\boxed{W_b := \frac{I_b}{e}}$ W_b heißt Biegewiderstand

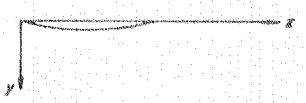
Also: $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_b}{EI_b} = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$

Dabei gilt letzteres nach Definition des Krümmungsradius ϱ, das negative Vorzeichen resultiert aus der Lage der y-Achse, die wegen der am häufigsten vorkommenden Durchbiegungsrichtung nach unten zeigt.

Damit erhalten wir:

$$-\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M_b}{EI_b}$$

und für die Näherung
Durchbiegung << Längenabmessung
folgt $y' \ll 1 \Rightarrow (y')^2 \ll 1$ sofort



$$\boxed{y'' = -\frac{M_b}{EI_b}}$$ <u>Gleichung der Durchbiegung</u>

Bei der schiefen Biegung ist der Sachverhalt wiederum komplizierter, es tritt ein Flächenträgheitstensor auf

$$\boxed{I := \int_A (r^t r E_2 - r r^t)\,dA = \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{pmatrix} \qquad r := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \quad \boxed{E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

I hängt ab vom verwendeten Koordinatensystem (x,y) weiter folgt sofort aus Canchy-Schwartzscher Ungleichung

I positiv definit (eigentlich zunächst nur semidefinit)

und es gilt: I symmetrisch.

Die Eigenwerte von I heißen Hauptträgheitsmomente. Eine Basis orthonormaler Eigenvektoren von I heißt Hauptachsenbasis. Wir haben oben den Fall der reinen Biegung um eine Hauptachse betrachtet.

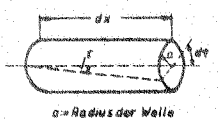
5. <u>Torsion</u>

<u>Vor:</u>

1) Querschnitte verdrehen sich wie starre Scheiben (quasi-starr) und sie bleiben unverzert (dies gilt für alle Querschnittsformen)

2) Keine Querschnittsverwölbung (d.h. Querschnitte bleiben eben). Dies gilt nur für Kreisquerschnitte.

Bild links

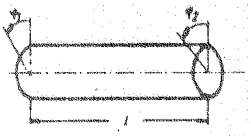


$$\gamma \approx \tan\gamma = \frac{a\,d\varphi}{dx} \quad , \quad \gamma = a\,\frac{d\varphi}{dx}$$

allgemeiner für $0 \leq r \leq a$ $\qquad \gamma = r\,\frac{d\varphi}{dx}$

Bei reiner Torsion ist $\frac{d\varphi}{dx}$ konstant längs der Welle.

Für eine Welle der Länge l ist die Gesamtverdrehung $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ (vgl. hierzu Bild)



$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

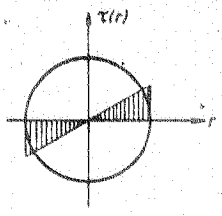
und daher ist bei reiner Torsion

$\boxed{\vartheta := \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\varphi}{l}}$ konstant $\qquad \vartheta$ heißt spezifischer Drehwinkel oder Verdrillung

<u>Für die Schubverformung γ gilt daher:</u>

$\gamma = r\vartheta = r\,\frac{\varphi}{l}$ $\qquad$ mit Hooke'schem Gesetz $\tau = G\gamma$ folgt

$\boxed{\tau = Gr\vartheta}$ d.h. lineare Spannungsverteilung über dem Radius.



Maximale Schubspannung tritt am Rand auf

$$\tau_a = G\vartheta a$$

und es gilt $\qquad \tau(r) = \frac{r}{a}\,\tau_a$

Das Drehmoment der Schubspannung entspricht dem Schnittdrehmoment, d.h. es folgt:

$$M_t = \int_A r\tau(r)\,dA = \int_A rG\vartheta r\,dA = G\vartheta \int_A r^2\,dA = G\vartheta I_p$$

$\boxed{I_p := \int_A r^2\,dA}$ <u>polares Flächenträgheitsmoment</u> $\boxed{I_p = I_x + I_y}$

und damit $\qquad \vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p} \qquad \boxed{\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_p}}$

Verallgemeinerung auf Verdrillung beliebiger Querschnitte (Querschnittsverwölbung) liefert:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_t}}$$ I_t := Torsionsflächenträgheitsmoment

Die Bestimmung von I_t kann im allgemeinen Fall recht kompliziert werden,

<u>elementar abhandelbar:</u> Verdrillung dünnwandiger Hohlquerschnitte (Bredt'sche Formeln)

<u>etwas komplizierter:</u> Verdrillung einfach zusammenhängender Vollquerschnitte

<u>sehr kompliziert:</u> Verdrillung von Vollquerschnitten mit Löchern

Man kann die Bestimmung von I_t zurückführen auf die Bestimmung einer Verwölbungsfunktion bzw. einer Spannungsfunktion und erhält I_t indem man eine Potentialgleichung mit entsprechender Randbedingung für diese Funktion löst.

<u>Vgl. hierzu:</u>

István Szabó: Höhere Technische Mechanik §14 S. 272 ff.
H.G. Hahn: Technische Mechanik V S. 19 ff.

6. <u>Ermittlung von Federkonstanten</u>

Die ersten 5 Punkte dienen lediglich dem Verständnis der jetzt dargestellten Ermittlung von Federkonstanten und damit auch den Problemen der Modellbildung des Maschinenbaus. Ich habe hierbei versucht, so kurz als möglich, die wesentlichen Materialkonstanten der Werkstofftechnik (für Elastizitätsuntersuchungen) einzuführen um die Modellbildung, die ein ganz wesentlicher Bestandteil der Systemidentifikation ist, etwas illustrieren zu können. Daß dies natürlich immer noch sehr starke (und unzulässige) Vereinfachungen zur Folge hat ist mir klar. Dennoch habe ich mich dazu entschlossen, vor allem um dem "Nicht-Maschinenbauer" einen Einblick in die dort auftauchenden Probleme anzudeuten und die Identifikation nicht auf den rein mathematischen Teil zu beschränken.

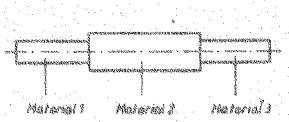
Über den Begriff der Formänderungsenergie (Elastische Energie) und die Sätze von Castigliano (vgl. Technische Mechanik II H.G. Hahn §7 S. 87 ff.) kann man einem belasten System Federkonstanten zuordnen. Dies geschieht folgendermaßen:

Die innere Energie oder Formänderungsenergie ist gegeben durch:

$$W_i = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_1} \int_{C_1^{(k)}} \frac{L^2(x)}{EA(x)}dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_2} \int_{C_2^{(k)}} \frac{M_b^2(x)}{EI_b(x)}dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_3} \int_{C_3^{(k)}} \frac{M_t^2(x)}{EI_t(x)}dx$$

falls an dem durch x-parametrisiertem System eine äußere Kraft oder ein äußeres Moment wirkt. Dabei sind $L^2(x)$, $M_b^2(x)$, $M_t^2(x)$ die Normal- oder Längskraft, Biegemoment bzw. Torsionsmoment-Schnittreaktionen an der Schnittstelle x. E ist der Elastizitätsmodul, G der Gleitmodul, A der Stabquerschnitt, I_b das Flächenträgheitsmoment der Biegung und schließlich I_t das Torsionsflächenträgheitsmoment.

Die Kurvenstücke $C_j^{(k)}$ $k=1,\ldots,n_j$, $j=1,2,3$ sind dabei so zu wählen, daß der Integrand auf $C_j^{(k)}$ stetig ist. (Z.B. sind die Festigkeitswerte E bzw. G auf $C_j^{(k)}$ konstant aber nicht auf dem ganzen System.)



Lassen wir statt der wirklichen Belastung die Kraft oder das Moment 1 wirken, dann erhalten wir andere Schnittreaktionen L_1, M_{b1}, M_{t1} an der entsprechenden Schnittstelle x und es folgt

$$W_{i_1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_1} \int_{C_1^{(k)}} \frac{L_1^2}{EA}dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_2} \int_{C_2^{(k)}} \frac{M_{b1}^2}{EI_b}dx + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_3} \int_{C_3^{(k)}} \frac{M_{t1}^2}{GI_t}dx$$

als innere Energie der Belastung 1. Die äußere Arbeit, die von der Belastung L (Kraft oder Moment) bei der Verschiebung n_1 geleistet wird, ist

$$W_a = \int_0^{u_1} L(u)du = \int_0^{u_1} cudu = c\int_0^{u_1} udu = c\,\frac{u_1^2}{2} = cu_1\,\frac{u_1}{2} = L(u_1)\frac{u_1}{2}$$

speziell: Falls $L(u_1) = cu_1 = 1$

$$W_{a_1} = \frac{1}{2}\,u_1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{c}$$ (dabei ist c die gesuchte Federkonstante)

Gleichsetzen der geleisteten Arbeiten liefert:

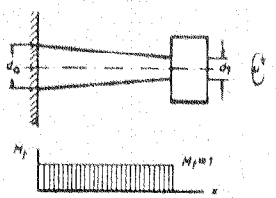
$$\boxed{\frac{1}{c} = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{C_1^{(k)}} \frac{L_1^2(x)}{EA(x)}dx + \sum_{k=1}^{n_2} \int_{C_2^{(k)}} \frac{M_{b1}(x)}{EI_b(x)}dx + \sum_{k=1}^{n_3} \int_{C_3^{(k)}} \frac{M_{t1}^2(x)}{GI_t(x)}dx}$$

<u>Die vorstehende Formel soll nun an einigen Beispielen erläutert werden:</u>

a) <u>Torsionsstab mit unterschiedlichem Querschnitt</u>

$$I_t(x) = I_p(x) = \int_{A(x)} r^2 dA = \frac{\pi}{32} d^2(x)$$

$$d(x) = d_0 - \frac{d_0 - d_1}{l} x$$



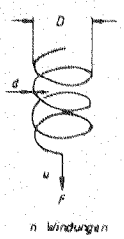
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c_t} = \frac{1}{G} \int_0^l \frac{dx}{\frac{\pi}{32}\left(d_0 - \frac{d_0 - d_1}{l} x\right)^4}}$$

Speziell: $d(x) = d_0 = d_1 = d = \text{konstant}$ liefert

$$\boxed{c_t = \frac{G}{l} \frac{\pi d^4}{32} = \frac{GI_t}{l}}$$

b) <u>Schraubenfeder</u>

Es bleibt als Belastung hier nur Torsion, geringe Längskräfte vernachlässigbar.



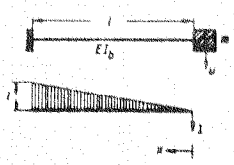
$$M_t = 1 \cdot \frac{D}{2} \quad \text{konstant}$$

$$\frac{1}{c_t} = \int_0^l \frac{M_{t1}^2}{GI_t} dx = \frac{D^2}{4} \frac{1}{GI_t} \int_0^l dx \quad \text{und mit}$$

$$\int_0^l dx = l = n\pi D = \text{Drahtlänge, folgt}$$

wegen $I_t = I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ $\quad \boxed{c_t = \frac{Gd}{8n} \left(\frac{d}{D}\right)^3}$

c) <u>Biegestab</u>



$$\frac{1}{c_b} = \frac{1}{EI_b} \int_0^l M_{b1}^2(x)dx = \frac{1}{EI_b} \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{EI_b} \frac{l^3}{3}$$

$$\boxed{c_b = 3 \frac{EI_b}{l^3}}$$

Univ.-Bibl.
Kaiserslautern

IV ANALYSIS NORMALER MATRIZEN

Notation

$\mathbb{R}^{nxn} := \{\text{reelle nxn Matrizen}\} = \{(a_{ij})_{i,j=1,..,n} : a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}^{nxn} := \{\text{komplexe nxn Matrizen}\} = \{(a_{ij})_{i,j=1,..,n} : a_{ij} \in \mathbb{C}\}$

Für $z \in \mathbb{C}$ sei $\bar{z}$ die komplexkonjugierte Zahl $\overline{a+ib} := a-ib$

Für $A \in \mathbb{C}^{nxn}$ sei $A^* := \bar{A}^t := (\bar{a}_{ij})^t = (\bar{a}_{ji})$ die adjungierte Matrix

$E_n := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{K}^{nxn}$ $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$\mathbb{K} := \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ je nachdem in welchem Körper wir rechnen.

$A \in \mathbb{K}^{nxn}$ heißt positiv definit: $\overset{d.}{\Longleftrightarrow} \forall_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ x \neq 0}} \; x^* A x > 0$

$A \in \mathbb{K}^{nxn}$ heißt positiv semidefinit: $\overset{d.}{\Longleftrightarrow} \forall_{x \in \mathbb{K}^n} \; x^* A x \geq 0$

Def IV.1 Normale Matrizen

$$\boxed{A \in \mathbb{C}^{nxn} \text{ heißt normal } \overset{d.}{\Longleftrightarrow} A^* A = A A^*}$$

Spezielle normale Matrizen

$A \in \mathbb{C}^{nxn}$ unitär (d.h. $A^* = A^{-1}$) $\Longrightarrow$ A normal

$A \in \mathbb{R}^{nxn}$ orthogonal (d.h. $A^t = A^{-1}$) $\Longrightarrow$ A normal

$A \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch (d.h. $A^t = A$) $\Longrightarrow$ A normal

$A \in \mathbb{C}^{nxn}$ hermitesch (d.h. $A^* = A$) $\Longrightarrow$ A normal

Satz IV.2 Spektralsatz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) A ist normal
2) Es gibt eine Orthonormalbasis (bezüglich des kanonisch Skalarproduktes) aus Eigenvektoren von A
3) Es gibt eine unitäre Matrix S, so daß $S^* A S$ eine Diagonalmatrix ist

   Ist A sogar hermitesch, dann sind alle Eigenwerte von A reell

Ist A orthogonal, dann kann S aus 3) sogar orthogonal gewählt werden.

Die Transformationsmatrix S kann wie folgt berechnet werden:

a) Bilde das charakteristische Polynom $p_A(t) := \det(A-tE)$

b) Berechne die Nullstellen von p_A d.h. die Linearfaktorzerlegung

$$p_A(t) = \pm (t-\lambda_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{r_k} \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j \text{ und } \sum_{j=1}^{k} r_j = n$$

Die komplexen Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ heißen Eigenwerte von A der Vielfachheit $r_1, \ldots, r_k$

Ist A hermitesch, dann sind alle Eigenwerte reell

Ist A orthogonal oder unitär, dann sind alle Eigenwerte vom Betrag 1

c) Für $i=1,\ldots,k$ bestimme eine Basis $v_1^{(i)}, \ldots, v_r^{(i)}$ von

$$\mathrm{Eig}(A,\lambda_i) := \mathrm{Kern}(A-\lambda_i E_n) := \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = \lambda_i x\}$$

d) Für $i=1,\ldots,k$ orthonormalisiere die Basisvektoren $v_1^{(i)}, \ldots, v_{r_i}^{(i)}$ nach dem Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren

e) Sei $w_1^{(i)}, \ldots, w_{r_i}^{(i)}$ die nach d) erhaltene Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A,\lambda_i)$

dann ist

$$W := \{w_1^{(1)}, \ldots, w_{r_1}^{(1)}, w_1^{(2)}, \ldots, w_{r_2}^{(2)}, \ldots, w_1^{(k)}, \ldots, w_{r_k}^{(k)}\}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A

f) Die gesuchte Transformationsmatrix S lautet:

$$S := [w_1^{(1)} | \ldots | w_{r_1}^{(1)} | w_1^{(2)} | \ldots | w_{r_2}^{(2)} | \ldots | w_1^{(k)} | \ldots | w_{r_k}^{(k)}]$$

(spaltenweise die Basis w aufgeschrieben)

S ist unitär (sogar orthogonal falls A symmetrisch war)

und es gilt:

$$S^* A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k E_{r_k} \end{pmatrix}$$

<u>Beweis:</u> Fischer Lineare Algebra §6.4 – §6.6 Seite 199-213

Def IV.3 Operatornorm einer Matrix

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m} := \left\{ (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} : a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$

dann heißt $\|A\| := \sup \left\{ \|Ax\|_2 : \|x\|_1 = 1 \right\}$

die von $\|\cdot\|_1 : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{R}_+$ und $\|\cdot\|_2 : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$

induzierte Operatornorm von A. Dabei sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ beliebige Normen auf $\mathbb{K}^m$ bzw. $\mathbb{K}^n$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \inf \left\{ C > 0 : \|Ax\|_2 \leq C\|x\|_1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \|Ax\|_2 : \|x\|_1 \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} : \|x\|_1 \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

Weiterhin

$$\left.\begin{aligned} \|Ax\|_2 &\leq \|A\| \cdot \|x\|_1 \\ \|A \cdot B\| &\leq \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}\right\} \text{ Verträglichkeit der Operatornorm}$$

Satz IV.4 Die Operatornorm als maximaler Singulärwert

Es sei

(1) $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$

(2) $\lambda_1' \geq \lambda_2' \geq \dots \geq \lambda_n' \geq 0$ die Eigenwerte von $A^* A$ (positiv semidefinit, hermitesch)

Dann heißen die Werte

$\sigma_i := \lambda_i'$ $i=1,\dots,n$ die Singulärwerte der Matrix A

und es gilt

$$\|A\| = \max_{x=0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1'}$$

dabei ist $\|\cdot\|_2 := \sqrt{x^* x}$ für $x \in \mathbb{K}^n$ oder $x \in \mathbb{K}^m$

Insbesondere gilt für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, A hermitesch

$$\boxed{\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ Eigenwert von } A\}}$$

<u>Beweis:</u>

$B := A^*A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ ist wegen $B^* = (A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A = B$ hermitesch (oder selbstadjungiert). Als Spezialfall des Satzes von Courant, der im Anschluß bewiesen wird, folgt:

$\lambda_1' = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\langle x,Bx\rangle}{\langle x,x\rangle}$ wobei $\langle x,x\rangle := x^*x$ das kanonische Skalarprodukt.

Damit $\lambda_1' = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\langle x,Bx\rangle}{\langle x,x\rangle} = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\langle x,A^*Ax\rangle}{\langle x,x\rangle} = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\langle Ax,Ax\rangle}{\langle x,x\rangle}$

$$= \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \underset{(+)}{=} \left(\max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)^2 = \|A\|^2$$

Dabei gilt Gleichung (+) weil $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ monoton wachsend ist.

Also folgt: $\sqrt{\lambda_1'} = \sigma_1 = \|A\|$

Die Zusatzaussage folgt mit $A^*=A$ aus $B=A^2$ und der Tatsache, daß B die Eigenwerte λ_i^2 besitzt falls A die Eigenwerte λ_i besitzt

<u>Satz IV.5 Poincaré, Fischer</u>

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert
(d.h. im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ $A^t=A$ im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ $A^*=A$)
mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

Dann gilt: $$\lambda_k = \max_{\substack{H_k \subseteq H \\ \dim H_k = k}} \; \min_{\substack{x\in H_k \\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle$$

wobei $H := (\mathbb{K}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der mit dem kanonischen Skalarprodukt versehene Hilbertraum.

Beweis:

Sei $x_1,\dots,x_n$ ein Satz zugehöriger orthonormaler Eigenvektoren zu $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, dann bilden diese eine ONB des $\mathbb{K}^n$.

Sei $\hat{H}_k := [x_1,\dots,x_k] := \{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j : \alpha_j \in \mathbb{K}\}$

dann ist $\hat{H}_k \subseteq H$ und $\dim H_k = k$.

Also gilt $\max\limits_{\substack{H_k \subseteq H \\ \dim H_k = k}} \min\limits_{\substack{x \in H_k \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle \geq \min\limits_{\substack{x \in \hat{H}_k \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle$

Für $x \in \hat{H}_k$ gilt
$$\begin{aligned}
\langle x, Ax\rangle &= \langle \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j , \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A x_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i \bar{\alpha}_j \langle x_j, A x_i\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i \bar{\alpha}_j \lambda_i \langle x_j, x_i\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i \bar{\alpha}_j \lambda_i \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \bar{\alpha}_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |\alpha_i|^2 \\
&\geq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2
\end{aligned}$$

und
$$\begin{aligned}
\|x\|^2 = \langle x, x\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i , \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{k} \bar{\alpha}_i \alpha_j \langle x_i, x_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{k} \bar{\alpha}_i \alpha_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2
\end{aligned}$$

Daher gilt für $x \in \hat{H}_k$ beliebig $\langle x, Ax\rangle \geq \lambda_k \|x\|^2$

und deshalb $\min\limits_{\substack{x \in \hat{H}_k \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle \geq \lambda_k$

Speziell für $x=x_k$: $\quad \langle x_k, Ax_k\rangle = \langle x_k, \lambda_k x_k\rangle = \lambda_k \|x_k\|^2 = \lambda_k$

Also:
$$\min_{\substack{x\in\hat{H}_k\\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle = \lambda_k$$

Es ist daher gezeigt:

$$\max_{\substack{H_k\subseteq H\\ \dim H_k=k}} \min_{\substack{x\in H_k\\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle \geq \min_{\substack{x\in\hat{H}_k\\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle = \lambda_k$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei

$$H_k := [z_1,\ldots,z_k] := \left\{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j z_j \;:\; \alpha_j \in \mathbb{K}\right\}$$

ein beliebiger Unterraum der Dimension k. Wähle $z\in H_k$ mit

$$\langle z, x_j\rangle = 0 \quad \text{für} \quad j = 1,\ldots,k-1 \quad \text{(leere Bedingung für } k=1)$$

und $\quad \|z\| = 1$

Ein solches z existiert und läßt sich berechnen aus

$$z = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j z_j \quad \text{und} \quad \langle z, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} \bar{\alpha}_i \langle z_i x_j\rangle = 0 \qquad j=1,\ldots,k-1$$

Nun ist $x_1,\ldots,x_n$ eine ONB von H und daher besitzt z eine Darstellung der Form $z = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$.

Da
$$\langle z, x_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_j \langle x_j, x_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{\beta}_j \delta_{ji} = \bar{\beta}_i$$

folgt
$$\beta_i = \overline{\langle z, x_i\rangle} = \langle x_i, z\rangle.$$

Also gilt:
$$z = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, z\rangle x_j$$

Damit folgt:

$$\langle z, Az\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, z\rangle \langle z, Ax_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, z\rangle \lambda_j \langle z, x_j\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x_j, z\rangle \overline{\langle x_j, z\rangle} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\langle x_j, z\rangle|^2$$

und da $\langle x_j, z\rangle = 0$ für $j=1,\dots,k-1$ gilt

$$\langle z, Az\rangle = \sum_{j=k}^{n} \lambda_j |\langle x_j, z\rangle|^2 \leq \lambda_k \sum_{j=k}^{n} |\langle x_j, z\rangle|^2$$

$$= \lambda_k \sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, z\rangle|^2 = \lambda_k \langle z, z\rangle = \lambda_k \|z\|^2 = \lambda_k$$

denn $\langle z, z\rangle = \sum_{j=1}^{n} |\langle x_j, z\rangle|^2$ und $\|z\| = 1$

Also: $\min\limits_{\substack{x\in H_k \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle \leq \langle z, Az\rangle \leq \lambda_k$ und da H_k beliebig

$$\max_{\substack{H_k \subseteq H \\ \dim H_k = k}} \min_{\substack{x\in H_k \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle \leq \lambda_k$$

<u>Zusammen:</u> $\lambda_k = \max\limits_{\substack{H_k \subseteq H \\ \dim H_k = k}} \min\limits_{\substack{x\in H_k \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle$ <u>q.e.d.</u>

<u>Satz IV.6 - Courant</u>

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert mit den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$

dann gilt: $\lambda_k = \min\limits_{\substack{H_{k-1} \subseteq H \\ \dim H_{k-1} = k-1}} \max\limits_{\substack{x \perp H_{k-1} \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle$

wobei $H := (\mathbb{K}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der mit dem kanonischen Skalarprodukt versehene Hilbertraum.

Im Spezialfall $k=1$ ist $H_0 = \{0\}$ der einzige Unterraum der Dimension 0

und $\lambda_1 = \max\limits_{\substack{x \perp \{0\} \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle = \max\limits_{\substack{x\in H \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle$

d.h. die im Beweis von Satz IV.4 benötigte Gleichung.

Nun zum Beweis:

Sei wieder $x_1,\dots,x_n$ ein Satz von orthonormalen Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ und $\hat{H}_k := [x_1,\dots,x_k]$ für $k=1,\dots,n$

Dann gilt:

$$\boxed{\max_{\substack{x\perp H_{k-1}\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle = \lambda_k}$$

denn $\quad x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \quad$ und $\quad \langle x_l,x\rangle = \alpha_l = 0 \quad$ für $\quad l=1,\dots,k-1$

Also $\quad x \in H_{k-1}^{\perp} \Longleftrightarrow x = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j x_j$

Daher
$$\langle x,Ax\rangle = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j \langle x,Ax_j\rangle = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j \langle x,\lambda_j x_j\rangle$$
$$= \sum_{j=k}^{n} \lambda_j \alpha_j \langle x,x_j\rangle = \sum_{j=k}^{n} \lambda_j \alpha_j \bar{\alpha}_j = \sum_{j=k}^{n} \lambda_j |\alpha_j|^2$$
$$\le \lambda_k \sum_{j=k}^{n} |\alpha_j|^2 = \lambda_k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 = \lambda_k \|x\|^2$$

Andererseits $\langle x_k,Ax_k\rangle = \lambda_k \|x_k\|^2 = \lambda_k$ und $x_k \in H_{k-1}^{\perp}$

Somit
$$\max_{\substack{x\perp \hat{H}_{k-1}\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle = \lambda_k$$

Da $\hat{H}_{k-1} \subseteq H$ und $\dim \hat{H}_{k-1} = k-1$ folgt die erste Ungleichung

$$\min_{\substack{H_{k-1}\subseteq H\\ \dim H_{k-1}=k-1}} \max_{\substack{x\perp H_{k-1}\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle \le \max_{\substack{x\perp \hat{H}_{k-1}\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle = \lambda_k$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei $H_{k-1} = [z_1,\dots,z_{k-1}]$ ein beliebiger $k-1$ dimensiomaler Unterraum von H.

Wir behaupten:

$$\boxed{\exists_{\substack{\bar{x}\in \hat{H}_k\\ \|\bar{x}\|=1}} \quad \bar{x}\perp H_{k-1}}$$

Zum Beweis setze: $Z_{k-1} := [z_1 | \ldots | z_{k-1}] \in \mathbb{K}^{n \times (k-1)}$

$$X_k := [x_1 | \ldots | x_k] \in \mathbb{K}^{n \times k}$$

dann ist $Z^*_{k-1} X_k \in \mathbb{K}^{(k-1) \times k}$ also $\operatorname{rang} Z^*_{k-1} X_k \leq k-1$

Nach der Dimensionsformel (vgl. etwa Fischer Lineare Algebra Satz 2.2.4 , Seite 66)

folgt $\dim \operatorname{Kern} Z^*_{k-1} X_k = \dim \mathbb{K}^k - \operatorname{rang} Z^*_{k-1} X_k$

$$\geq k - (k-1) = 1$$

Also besitzt die Gleichung $Z^*_{k-1} X_k \alpha = 0$ eine nichttriviale Lösung $\bar{\alpha} \neq 0$ und daher auch eine Lösung

$$\alpha \text{ mit } \|\alpha\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2 = 1$$

Setze $\bar{x} := X_k \alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$

dann ist $\bar{x} \in \hat{H}_k$ und $\|\bar{x}\| = \|\alpha\| = 1$

wegen $0 = Z^*_{k-1} X_k \alpha = Z^*_{k-1} \bar{x} \iff \langle z^*_j, \bar{x} \rangle = 0$ für $j = 1, \ldots, k-1$

ist $\bar{x} \perp H_{k-1}$ und der Beweis der obigen Zwischenbehauptung erbracht.

Damit folgt jetzt aber

$$\langle \bar{x}, Ax \rangle \underset{x \in \hat{H}_k}{=} \langle \bar{x}, A \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, \bar{x} \rangle x_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, \bar{x} \rangle \langle \bar{x}, Ax_i \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \langle x_i, \bar{x} \rangle \lambda_i \langle \bar{x}, x_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |\langle x_i, \bar{x} \rangle|^2$$

$$\geq \lambda_k \sum_{i=1}^{k} |\langle x_i, \bar{x} \rangle|^2 = \lambda_k \|\bar{x}\|^2 = \lambda_k$$

Daher $\max\limits_{\substack{x \perp H_{k-1} \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax \rangle \geq \max\limits_{\substack{\bar{x} \perp H_{k-1} \\ \|\bar{x}\|=1}} \langle \bar{x}, A\bar{x} \rangle \geq \lambda_k$

und da H_{k-1} beliebig mit $\dim H_{k-1} = k-1$

$$\min_{\substack{H_{k-1}\subseteq H \\ \dim H_{k-1}=k-1}} \; \max_{\substack{x\perp H_{k-1} \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax\rangle \geq \lambda_k$$

Also ist die zweite Ungleichung ebenfalls gezeigt und der Satz ist bewiesen.

<u>Satz IV.7 Funktionen normaler Matrizen</u>

Es sei

(1) $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$

(2) $A\in\mathbb{K}^{n\times n}$ normal, d.h. $A^*A = AA^*$

(3) $f : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analytisch $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ mit Konvergeneradius r

(4) $A^0 := E_n$

Dann existiert die Matrixpotenzreihe

$$\boxed{f(A) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k \quad \text{falls} \quad \|A\|<r}$$

Man kann diese Matrix wie folgt berechnen

$$\boxed{f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\, A_i}$$

wobei $\boxed{A_i := a_i a_i^*}$ <u>der Projektor auf $[a_i] := \mathbb{K}a_i = \{ta_i : t\in\mathbb{K}\}$</u>

und $\{a_1,\ldots,a_n\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$

Inbesondere hat <u>$f(A)$ die Eigenwerte $f(\lambda_i)$</u> und die <u>zugehörigen Eigenvektoren a_i</u>. Ist A sogar <u>selbstadjungiert</u> dann ist <u>$\|A\| = r$ der Konvergenzradius</u> der Potenzreihenfunktion

$$f : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$$

Beweis:

(1) $f(Z) = z^0 = 1$ analytisch in $\mathbb{C}$

$f(A)=A^0=E_n$ existiert nach Definition für alle A mit $\|A\|<\infty$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)A_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Also zeige: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} A_i = E_n}$ "Zerlegung der Eins"

Sei hierzu $x \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Da $\{a_1,\dots,a_n\}$ eine ONB des $\mathbb{K}^n$ ist, besitzt x eine Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \qquad x_i \in \mathbb{K}$$

Damit $(\sum_{i=1}^{n} A_i)x = \sum_{i=1}^{n} A_i x = \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = \sum_{ij=1}^{n} x_j A_i a_j$

$$= \sum_{ij=1}^{n} x_j a_i a_i^* a_j = \sum_{ij=1}^{n} x_j a_i \langle a_i, a_j\rangle$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} x_j a_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = x = E_n x$$

Also $(\sum_{i=1}^{n} A_i)x = E_n x$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$ und damit ist (1) gezeigt

(2) $f(z) = z$ analytisch in $\mathbb{C}$

$f(A) = A$ existiert für alle A mit $\|A\| < \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)A_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

Also zeige: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = A}$ Darstellungssatz eines normalen Operators

Dies folgt am einfachsten so:

$$A = AE_n \underset{(1)}{=} A\sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} AA_i = \sum_{i=1}^{n} Aa_i a_i^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i a_i^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$$

(3) $f(z) = z^m$ $m \geq 0$ analytisch in $\mathbb{C}$

$f(A) = A^m$ existiert für alle A mit $\|A\|<\infty$ und es gilt

wegen der Verträglichkeit der Operatornorm $\|A^m\| \leq \|A\|^m$

$$\sum_{i=1}^{m} f(\lambda_i)A_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m A_i$$

Also ist zu zeigen: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m A_i = A^m}$

Dies zeigen wir durch Induktion über m, $m=0$ und $m=1$ ist schon gezeigt. Die Behauptung gelte für $m-1$

$$A^m = AA^{m-1} \underset{IV}{=} A\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{m-1} A_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{m-1} AA_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{m-1} Aa_i a_i^*$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{m-1} \lambda_i a_i a_i^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m a_i a_i^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m A_i$$

(4) $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ analytisch in $\mathbb{C}_r := \{x \in \mathbb{C} : |x| < r\}$

Zunächst beachte $\max\{|\lambda_i| : \lambda_i$ ist Eigenwert von $A\} \leq \|A\|$ und für selbstadjungiertes A gilt das Gleichheitszeichen nach Satz IV.4.

Die erste Aussage sieht man folgendermaßen:
Sei λ irgend ein Eigenwert von A dann gibt es einen Vektor

$$\bar{y} \in \mathbb{K}^n - \{0\} \text{ mit } A\bar{y} = \lambda y \Rightarrow \|A\bar{y}\|_2 = \|\lambda\bar{y}\|_2 = |\lambda|\,\|y\|_2$$

Also $\dfrac{\|A\bar{y}\|_2}{\|\bar{y}\|_2} = |\lambda|$ und $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \geq \dfrac{\|A\bar{y}\|_2}{\|\bar{y}\|_2} = |\lambda|$

Da λ beliebig war folgt $\max\{|\lambda| : \lambda \text{Eigenwert von } A\} \leq \|A\|$

Ist daher $\|A\| < r$ dann gilt $\forall_i\ |\lambda_i| \leq \|A\| < r$ und somit ist

$f(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda_i^k$ eine wohldefinierte Zahl in $\mathbb{K}$

Die Potenzreihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

Daher existiert:

$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)A_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda_i^k A_i$ und die Reihe konvergiert

absolut. Man darf daher Umordnung vornehmen.

Wir erhalten:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)A_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda_i^k A_i = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k A_i \underset{(3)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k = f(A)$$

(5) <u>$f(A)$ ist normal und besitzt die Eigenwerte $f(\lambda_i)$ mit den Eigenvektoren a_i</u>

$$f(A)a_i = (\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)A_j)a_i = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)A_j a_i = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)a_j a_j^* a_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)a_j \langle a_j, a_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)a_j \delta_{ji} = f(\lambda_i)a_i$$

Da die a_i $i=1,\dots,n$ eine ONB des $\mathbb{K}^n$ bilden, besitzt $f(A)$ eine ONB aus Eigenvektoren $a_1,\dots,a_n$ zu den Eigenwerten $f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n)$ und ist daher nach dem Spektralsatz IV.2 normal.

Berechnet man

$$f(A)f(A)^* = (\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)A_i)(\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j)A_j)^* = (\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)A_i)(\sum_{j=1}^{n} [f(\lambda_j)A_j]^*)$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} f(\lambda_i)A_i[f(\lambda_j)A_j]^* = \sum_{ij=1}^{n} f(\lambda_i)A_i\overline{f(\lambda_j)}A_j^*$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} f(\lambda_i)\overline{f(\lambda_j)}A_iA_j^* = \sum_{ij=1}^{n} f(\lambda_i)\overline{f(\lambda_j)}a_ia_i^*a_ja_j^*$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} f(\lambda_i)\overline{f(\lambda_j)}a_ia_j^* \langle a_ia_j\rangle$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} f(\lambda_i)\overline{f(\lambda_j)}a_ia_j^*\delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\overline{f(\lambda_i)}a_ia_i^*$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(\lambda_i)|^2 A_i = f(A)^* f(A)$$

So folgt für $f=id$ d.h. $f(z)=z$

$$AA^* = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 A_i \quad \text{und} \quad \sqrt{AA^*} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| A_i =: |A|$$

und allgemeiner:

$$|f(A)| := \sqrt{f(A)[f(A)]^*} = \sum_{i=1}^{n} |f(\lambda_i)| A_i = \sqrt{[f(A)]^* f(A)}$$

<u>Verallgemeinerung</u>

f beliebig stetig, dann existiert eine Folge von Polynomen p_n vom Grad n mit $p_n \to f$ gleichmäßig.

Definiert man $f(A)x := \lim_{n\to\infty} p_n(A)x$

so ist dieser Grenzwert unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge p_n.

Es gilt weiter $\|p_n(A) - f(A)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

also approximiert die Matrixfolge $p_n(A)$ den Grenzoperator $f(A)$. Der Grenzoperator $f(A)$ hat die Eigenwerte $f(\lambda_i)$ falls A die Eigenwerte λ_i besitzt und bleibt normal.

Somit gilt $f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) A_i$ für beliebiges stetiges f

Wir benötigen diese Verallgemeinerung jedoch nicht. Sie bleibt daher unbewiesen. Notfalls denken wir uns:

$$f(A) := \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) A_i$$

falls alle Werte $f(\lambda_i)$ wohldefiniert sind.

V SCHWINGUNGEN UM GLEICHGEWICHTSLAGEN

AUFSTELLUNG DER SCHWINGUNGSGLEICHUNG

Gegeben sei ein System mit n Freiheitsgraden und strikt konservativen äußeren Kräften d.h. unser Potential $U = U(r,\dot{r},t)$ aus dem Hamilton Lagrangeprizip hängt nur von r ab und es gilt daher

$$F = -\frac{\delta U}{\delta r} = -\left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial r} = -(\nabla_r U)^t$$

$$Q = \frac{\partial r^t}{\partial q} F = -\frac{\partial r^t}{\partial q}\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial q} = -(\nabla_q U)^t$$

In diesem Fall schreiben wir $U = V(r)$ also V statt U. V heißt Potential während U ein verallgemeinertes (geschwindigkeits- und zeitabhängiges) Potential ist.

Ein Satz $q = (q_1,\ldots,q_n)^t$ generalisierter Koordinaten, d.h. eine beliebige Parametrisierung der Bewegung im Konfigurationsraum sei bekannt. Wir nennen $\dot{q} := \frac{dq}{dt}$ generalisierte Geschwindigkeit.

Liegt holonomer, von der Zeit unabhängiger Zwang vor, d.h. die Zwangsbedingungen an die $m > n$ Ortsvektoren $\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_m$ der m betrachteten Teilchen des Systems lassen sich in der Form

$$f(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_m) = 0$$

darstellen, so besitzt ein solches System eine Lagrangefunktion der Form

$L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q)$ wobei

$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^t G(q)\dot{q}$ und G positiv definiert u. symmetrisch

Dies sieht man ganz einfach durch Einsetzen der Parametrisierung. Denn es ist nach unseren Voraussetzungen

(1) $r := (\vec{r}_1^t,\ldots,\vec{r}_m^t)^t$ der karthesische Koordinatensatz

(2) $r = r(q)$ mit $q = (q_1,\ldots,q_n)^t$

(3) $f(r) = 0$ holonomer von der Zeit unabhängiger Zwang

Einen solchen Zwang nennt man auch skleronom (starr).

Damit folgt:

$$T = \frac{1}{2}\dot{r}^t M \dot{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial q^t}\dot{q}\right)^t M \frac{\partial r}{\partial q^t}\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^t \frac{\partial r}{\partial q}^t M \frac{\partial r}{\partial q^t}\dot{q}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{q}^t G(q)\dot{q} \quad \text{mit} \quad G(q) = \frac{\partial r}{\partial q}^t M \frac{\partial r}{\partial q^t} \quad \text{insbesondere } G=G^t$$

$$x^t G(q) x = x^t \frac{\partial r}{\partial q}^t M \frac{\partial r}{\partial q^t} x = \left(\frac{\partial r}{\partial q^t} x\right)^t M \left(\frac{\partial r}{\partial q^t} x\right) = y^t M y \geq 0$$

und $x^t G(q) x = 0 \iff y = 0$ da M positiv definit.

Weiter gilt

$$y = \frac{\partial r}{\partial q^t} x = 0 \iff x = 0 \quad (r=r(q) \text{ ist reg. Parametrisierung})$$

Daher erhalten wir

$T = \frac{1}{2}\dot{q}^t G(q)\dot{q}$ mit G positiv definit und symmetrisch (da $M=M^t$)

Es war nach Voraussetzung $U = V(r) = V(r(q)) = V(q)$

Daher erhalten wir wie oben behauptet die <u>Lagrangefunktion bei holonom-skleronomem Zwang und (strikt) konservativen äußeren Kräften.</u>

$$\boxed{\begin{array}{l} L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q) \\ \text{wobei} \quad V(q) = V(r(q)) \\ T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^t G(q)\dot{q} \qquad G(q) = \frac{\partial r}{\partial q}^t M \frac{\partial r}{\partial q^t} \quad \text{positiv definit u. symmetrisch} \end{array}}$$

Treten zusätzliche viskose Dämpfungskräfte (nicht konservativ) auf dann wird unsere Dissipationsfunktion

$$\dot{F}_D = \frac{1}{2}\dot{r}^t B \dot{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial q^t}\dot{q}\right)^t B \frac{\partial r}{\partial q^t}\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^t \frac{\partial r}{\partial q}^t B \frac{\partial r}{\partial q^t}\dot{q}$$

Also $\boxed{\dot{F}_D = \frac{1}{2}\dot{q}^t B(q)\dot{q}}$ $\boxed{B(q) = \frac{\partial r}{\partial q}^t B \frac{\partial r}{\partial q^t}}$

Wieder ist $B(q)$ symmetrisch und besitzt die gleiche Definitheitseigenschaft wie B.

Def V.1 <u>Gleichgewichtspunkte bei Systemen mit holonom-skleronomem Zwang und strikt konservativen äußeren Kräften</u>

Es sei $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\, q^t G(q) q - V(q)$ die Lagrangefunktion des Systemes

und $\dot{F}_D(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\, \dot{q}^t B(q) \dot{q}$ die Dissipationsfunktion der viskosen Dämpfung

Dann nennen wir einen Parameter $q_0 \in \mathbb{R}^n$ einen Gleichgewichtspunkt falls $\frac{\partial V}{\partial q^t}(q_0)=0$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q^t}(q_0)$ positiv semidefinit ist.

Ein Gleichgewichtspunkt $q_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt stabil falls $\frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q^t}(q_0)$ positiv definit ist.

Das bedeutet: Eine kleine Auslenkung des Systems aus einer stabilen GG-Lage q_0 führt zu einer kleinen gebundenen Bewegung um diese Ruhelage.

Eine kleine Auslenkung des Systems aus einer instabilen GG-Lage q_0 führt zu einer ungebundenen Bewegung.

Einen formalen Beweis dieser Deutung findet man im Buch von Goldstein: Klassische Mechanik X. Kapitel Kleine Schwingungen Seite 353 - 374.

<u>Wir betrachten jetzt solche kleinen Schwingungen um Gleichgewichtspunkte q_0.</u>

Betrachten wir unsere Lagrangefunktion $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - V(q)$

sowie unsere Dissipationsfunktion $\dot{F}_D(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\, \dot{q}^t B(q) \dot{q}$

und bilden jeweils die Taylorentwicklungen von T, V, $\dot{F}_D$ um q_0 bis zum ersten nichtverschwindenden Glied, so erhalten wir

$$\overline{T}(q_0,\dot{q}) = \frac{1}{2}\, \dot{q}^t G(q_0) \dot{q}$$

$$V(q) = V(q_0) + \frac{\partial V}{\partial q^t}(q_0)(q-q_0) + \frac{1}{2}(q-q_0)^t \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q^t}(q_0)(q-q_0) + o(\|q-q_0\|^2)$$

$$= V(q_0) + \frac{1}{2}(q-q_0)^t \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q^t}(q_0)(q-q_0) + o(\|q-q_0\|^2)$$

Wir können den frei wählbaren Nullpunkt unseres Potentials V in q_0 legen, so daß

$$\bar{V}(q_0,q) = \frac{1}{2}(q-q_0)^t \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q^t}(q_0)(q-q_0)$$

Schließlich wird:

$$\dot{\bar{F}}_D(q_0,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^t B(q_0)\dot{q}$$

Definieren wir:

$$\boxed{\bar{M} := G(q_0)} \qquad \boxed{\bar{K} := \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial q^t}(q_0)} \qquad \boxed{\bar{B} := B(q_0)}$$

so erhalten wir:

$$\bar{L} = \bar{T} - \bar{V} = \frac{1}{2}\dot{q}^t \bar{M}\dot{q} - \frac{1}{2}(q-q_0)^t \bar{K}(q-q_0)$$

$$\dot{\bar{F}}_D = \frac{1}{2}\dot{q}^t \bar{B}\dot{q}$$

$\bar{L}$ und $\dot{\bar{F}}_D$ sind gute Näherungen der die Bewegung beschreibenden Funktionen L und $\dot{F}_D$, falls die Auslenkung um die Ruhelage klein ist.

<u>Def V.2 Elastomechanische Systeme</u>

Ein physikalisches System mit holonom-skleronomem Zwang und strikt konservativen äußeren Kräften (mit eventuell zusätzlich wirkender viskoser Dämpfung) heißt

Frei-Elastomechanisch $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $L = \bar{L} \wedge \dot{F} = \dot{\bar{F}} = 0$

Viskos-Elastomechanisch $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $L = \bar{L} \wedge \dot{F} = \dot{\bar{F}}$

dabei bedeutet $L=\bar{L}$ nach Definition hier $T=\bar{T} \wedge V=\bar{V}$

Sprechen wir von "Elastomechanischem System" so ist damit stets ein "Viskos-Elastomechanisches System gemeint.

Der Gleichgewichtspunkt q_0 ist oft bekannt und kann als zeitlich konstant angesehen werden. Der Fall der Schwingung um eine gleichförmige Bewegung wird z.B. bei

E. T. Whittaker: Analytical Dynamics (ziemlich ausführlich)
S. Thimoshenko, D.H. Young: Advanced Dynamics

behandelt.

Setzt man $x := q-q_0$ so ist ($\dot{q}_0=0$ vorausgesetzt) $\dot{x}=\dot{q}$
x beschreibt die Abweichung vom Gleichgewichtszustand.

Für ein elastomechanisches System erhalten wir damit (falls $\dot{q}_0=0$)

(V.3)

$L = \frac{1}{2}\dot{x}^t M\dot{x} - \frac{1}{2}x^t Kx$	$M = G(0)$	wobei
	$K = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x^t}(0)$	K,M,B symmetrisch K,M positiv definit
$\dot{F}_D = \frac{1}{2}\dot{x}^t B\dot{x}$	$B = B(0)$	B positiv semidefinit

Die Lagrangegleichung der viskosen Dämpfung (vgl. Kapitel II) lautete

$$\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{q}} = 0$$

Mit $q = x$ erhalten wir hieraus die Schwingungsgleichung eines elastomechanischen Systems

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{x}} = -Kx - M\ddot{x} - B\dot{x}$$

und daraus $M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = 0$

Wir fassen dieses Resultat zusammen.

<u>(V.4) Schwingungsgleichung eines elastomechanischen Systems um seine Ruhelage $x=0$</u>

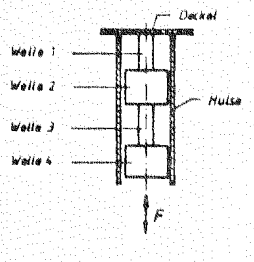
$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = 0$	wobei	M, B, K symmetrisch
M aus $T = \frac{1}{2}\dot{x}^t M\dot{x}$		M positiv definit
B aus $\dot{F}_D = \frac{1}{2}\dot{x}^t B\dot{x}$		B positiv semidefinit
K aus $K = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x^t}(0)$		K positiv semidefinit

K ist sogar positiv definit falls die Gleichgew.-lage $x=0$ stabil ist

Bevor wir zur Lösung der Schwingungsgleichung übergehen wollen wir (V.4) an zwei Beispielen erläutern. Dabei werden die bisherigen Ergebnisse nochmals erläutert.

(1) Der Kettenschwinger

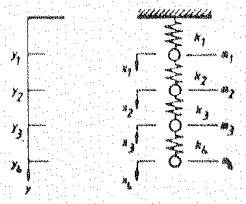
Unser reales System sei etwa folgendes:



Eine Welle (in einer Hülse geführt) werde auf Zug und Druck belastet.

Wir denken uns Hülse und Decke als starr und meinen mit dieser Idealisierung: "Vernachlässigbare Biege- und Knickeffekte"

Das physikaliche Modell kann etwa wie folgt gewählt werden:



m_i := Gesamtmasse der Welle i $\quad i=1,..,4$

$k_i := \dfrac{E_i \cdot A_i}{l_i} \quad i=1,..,4$

wobei

A_i := Querschnitt der Welle i $\quad i=1,..,4$

E_i := Elastizitätsmodul d. Welle i $\quad i=1,..,4$

l_i := Länge der Welle i $\quad i=1,..,4$

Die Gleichgewichtslage $x=0$ ist bestimmt durch die Koordinate (y_1,y_2,y_3,y_4) wobei $y_{i+1} - y_i$ der Massenschwerpunkt der Welle $i+1$ für $i=0,...,3$ im unbelasteten $(F=0)$ Zustand.

Das mathematische Modell erhalten wir durch Aufstellen der Lagrange-Gleichungen

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}\dot{x}^t M \dot{x} \qquad M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} k_i (x_i - x_{i-1})^2 \qquad x_0 := 0 \qquad K = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x^t}(0) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x^t}(x)$$

V quadratisch in x

$$= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{4} k_i (x_i - x_{i-1})^2$$

Mit $\qquad V = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} k_i (x_i - x_{i-1})^2 \qquad x_i = k_i = 0$ für $i \in \{1,...,4\}$

erhalten wir $\dfrac{\partial V}{\partial x_k} = \dfrac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} k_i 2(x_i - x_{i-1}) \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial x_{i-1}}{\partial x_k}\right.$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} k_i(x_i - x_{i-1})\,(\delta_{ik} - \delta_{i-1,k})$$

$$K(k,l) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} k_i(\delta_{il} - \delta_{i-1,l})\,(\delta_{ik} - \delta_{i-1,k})$$

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} k_i \delta_{il}\delta_{ik} - \sum_{i\in\mathbb{Z}} k_i \delta_{i-1,l}\delta_{ik} - \sum_{i\in\mathbb{Z}} k_i \delta_{il}\delta_{i-1,k}$$

$$+ \sum_{i\in\mathbb{Z}} k_i \delta_{i-1,l}\delta_{i-1,k}$$

$$= k_l\delta_{lk} - k_{l+1}\delta_{l+1,k} - k_l\delta_{l-1,k} + k_{l+1}\delta_{lk}$$

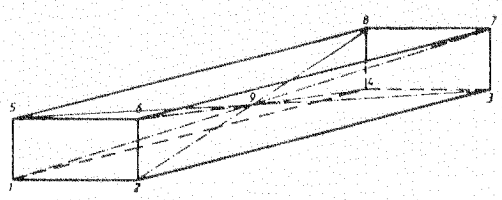
Also $$K = \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das mathematische Modell

$M\ddot{x} + Kx = 0$ wobei	
$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix}$	$K = \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{pmatrix}$

<u>(2) Auto auf einer Straße</u>

<u>Physikalisches Modell:</u>



9 Massepunkte $m_1,\ldots,m_9$ durch Federn mit konstanten k_{ij} und Dämpfungen b_{ij} verbunden wobei $(i,j)\ \{1,\ldots,9\}^2$ und $i<j$. Die Massepunkte $m_1,\ldots,m_4$ werden dabei auf Bahnkurven $\vec{s}_1,\ldots,\vec{s}_4$ (Räder auf Straße) geführt.

Mathematisches Modell:

Seien $\vec{r}_i$ $i=1,\dots,9$ die Abweichungen von der Gleichgewichtslage $\mathring{\vec{r}}_i$ $i=1,\dots,9$ wobei $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^3$. Dabei ist $\mathring{r}:=(\mathring{\vec{r}}_1{}^t,\dots,\mathring{\vec{r}}_9{}^t)^t$ die Lage der 9 Punkte die sich einstellt wenn sich das Modell im Ruhezustand befindet (d.h. wenn das Auto auf ebener Straße steht) $\mathring{r}=\mathring{r}(t)$ ist die Gleichgewichtslage zur Zeit t (das Auto fahre gleichförmig). In Wirklichkeit hängt $\mathring{r}$ sogar noch von der Straße, d.h. von den Bahnkurven $\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_4$ und der Geschwindigkeit des Wagens also $\dot{\vec{s}}_1(t),\dots,\dot{\vec{s}}_4(t)$ ab, so daß

$$\mathring{r}(t) = \mathring{r}(\vec{s}_1(t),\vec{s}_2(t),\vec{s}_3(t),\vec{s}_4(t),\dot{\vec{s}}_1(t),\dot{\vec{s}}_2(t),\dot{\vec{s}}_3(t),\dot{\vec{s}}_4(t))$$

Wir nehmen an die Gleichgewichtslage sei zu jeder Zeit t bekannt.

Wir erhalten:

(1) Kinetische Energie: $\quad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9} m_i \|\dot{\vec{r}}_i\|^2 \qquad \|\dot{\vec{r}}_i\|^2 := \dot{\vec{r}}_i{}^t\dot{\vec{r}}_i$

(2) Potentielle Energie: $\quad V = \frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,9\}^2\\ i<j}} k_{ij}\|\vec{r}_i-\vec{r}_j\|^2$

(3) Dissipationsfunktion: $\quad \dot{F}_D = \frac{1}{2}\sum_{\substack{(i,j)\in\{1,\dots,9\}^2\\ i<j}} b_{ij}\|\dot{\vec{r}}_i-\dot{\vec{r}}_j\|^2$

(4) Zwang: $\quad \vec{r}_i = \vec{s}_i \quad$ für $\quad i=1,2,3,4$

Setzen wir $\quad x := (\vec{s}_1^t,\dots,\vec{s}_4^t)^t = (\vec{r}_1^t,\dots,\vec{r}_4^t)^t \in \mathbb{R}^{12}$

$$q := (\vec{r}_5^t,\dots,\vec{r}_9^t)^t \in \mathbb{R}^{15}$$

so erhalten wir $\quad T = \frac{1}{2}\dot{x}^t M'\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{q}^t M\dot{q}$

$$V = \frac{1}{2}x^t K'x + \frac{1}{2}q^t Kq - \frac{1}{2}q^t \bar{K}x$$

$$\dot{F}_D = \frac{1}{2}\dot{x}^t B'\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{q}^t B\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^t \bar{B}\dot{x}$$

und haben bekannte Größe x und unbekannte Größe q separiert.

Wir erhalten damit

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\,\dot{q}^t M\dot{q} + \frac{1}{2}\,\dot{x}^t M'\dot{x} - \frac{1}{2}\,x^t K' x - \frac{1}{2}\,q^t Kq + \frac{1}{2}\,q^t \bar{K}x$$

$$\dot{F}_D(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\,\dot{q}^t B\dot{q} + \frac{1}{2}\,\dot{x}^t B'\dot{x} - \dot{q}^t \bar{B}\dot{x}$$

wobei

$$M' = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix}$$

$$M_j := m_j E_3 = \begin{bmatrix} m_j & 0 & 0 \\ 0 & m_j & 0 \\ 0 & 0 & m_j \end{bmatrix}$$

für $j=1,\ldots,9$

$$M = \begin{bmatrix} M_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_9 \end{bmatrix}$$

$$K' = \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & K'_{13} & K'_{14} \\ K'_{12} & K'_{22} & K'_{23} & K'_{24} \\ K'_{13} & K'_{23} & K'_{33} & K'_{34} \\ K'_{14} & K'_{24} & K'_{34} & K'_{44} \end{bmatrix}$$

$$K'_{ii} := k'_i E_3 \qquad i=1,\ldots,9$$

$$k'_i := \sum_{l=i+1}^{9} k_{il} - \sum_{l=1}^{i-1} k_{li}$$

$$K = \begin{bmatrix} K'_{55} & K'_{56} & K'_{57} & K'_{58} & K'_{59} \\ K'_{56} & K'_{66} & K'_{67} & K'_{68} & K'_{69} \\ K'_{57} & K'_{67} & K'_{77} & K'_{78} & K'_{79} \\ K'_{58} & K'_{68} & K'_{78} & K'_{88} & K'_{89} \\ K'_{59} & K'_{69} & K'_{79} & K'_{89} & K'_{99} \end{bmatrix}$$

$$K'_{ij} := -k_{ij} E_3$$

$$(i,j) \in \{1,\ldots,9\}^2 \wedge i<j$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{15} & K_{25} & K_{35} & K_{45} \\ K_{16} & K_{26} & K_{36} & K_{46} \\ K_{17} & K_{27} & K_{37} & K_{47} \\ K_{18} & K_{28} & K_{38} & K_{48} \\ K_{19} & K_{29} & K_{39} & K_{49} \end{bmatrix}$$

$$K_{ij} := k_{ij} E_3 = -K'_{ij}$$

$$(i,j) \in \{1,\ldots,9\}^2 \wedge i<j$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{15} & B_{25} & B_{35} & B_{45} \\ B_{16} & B_{26} & B_{36} & B_{46} \\ B_{17} & B_{27} & B_{37} & B_{47} \\ B_{18} & B_{28} & B_{38} & B_{48} \\ B_{19} & B_{29} & B_{39} & B_{49} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &B_{ij} := b_{ij}E_3 = -B'_{ij} \\ &(i,j) \in \{1,\ldots,9\}^2 \wedge i<j \end{aligned}$$

$$B' = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} & B'_{14} \\ B'_{12} & B'_{22} & B'_{23} & B'_{24} \\ B'_{13} & B'_{23} & B'_{33} & B'_{34} \\ B'_{14} & B'_{24} & B'_{34} & B'_{44} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &B'_{ii} := b'_i E_3 \qquad i=1,\ldots,9 \\ &b'_i := \sum_{l=i+1}^{9} b_{il} - \sum_{l=1}^{i-1} b_{li} \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} B'_{55} & B'_{56} & B'_{57} & B'_{58} & B'_{59} \\ B'_{56} & B'_{66} & B'_{67} & B'_{68} & B'_{69} \\ B'_{57} & B'_{67} & B'_{77} & B'_{78} & B'_{79} \\ B'_{58} & B'_{68} & B'_{78} & B'_{88} & B'_{89} \\ B'_{59} & B'_{69} & B'_{79} & B'_{89} & B'_{99} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} &B'_{ij} := -b_{ij}E_3 \\ &(i,j) \in \{1,\ldots,9\}^2 \wedge i<j \end{aligned}$$

Die Matrizen $M', B', K' \in \mathbb{R}^{12x12}$ und $M, B, K \in \mathbb{R}^{15x15}$ sind symmetrisch. Die Matrizen $\bar{B}, \bar{K} \in \mathbb{R}^{15x12}$ heißen Erregermatrizen (vgl. Lagrangegleichung). Die gestrichenen Matrizen sind für die Bewegung um die Gleichgewichtslage (nicht für die Absolutbewegung) unerheblich.

Die Lagrangegleichung liefert:

$$\frac{\delta L}{\delta q} - \frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \dot{F}_D}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -Kq + \bar{K}x - \frac{d}{dt}(M\dot{q}) - B\dot{q} + \bar{B}\dot{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = \bar{K}x + \bar{B}\dot{x}$$

Wir erhalten die Modellgleichung

$$\boxed{M\ddot{q} + B\dot{q} + Kq = \bar{\bar{K}}x + \bar{\bar{B}}\dot{x}}$$

<u>Beachte:</u> Im Potential V treten keine Gravitationskräfte $(m_i \cdot g \cdot r_{3i})$ auf, denn im Gleichgewichtszustand werden diese Kräfte gerade durch Feder und Dämpfung (also das innere Potential) annuliert.

Man kann $\bar{\bar{K}}x+\bar{\bar{B}}\dot{x}$ als Krafterregung auffassen, die dadurch zustande kommt, daß die Punkte 1,2,3,4 auf den Bahnkurven $\vec{s}_1(t),\ldots,\vec{s}_4(t)$ geführt werden.

VI LÖSUNG DER SCHWINGUNGSGLEICHUNG

Satz VI.1 Die Exponentialfunktion für beliebige Matrizen

Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ konvergiert die Matrixpotenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ (d.h. jede der n^2 skalaren Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e_i^t A^k e_j$ $i,j=1,\ldots,n$ konvergiert). Die Grenzmatrix nennen wir e^A.

Also gilt: $$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Die Matrizenfunktion $e : \mathbb{C}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt folgende Eigenschaften:

(1) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ falls $AB = BA$ — Funktionalgleichung für kommutierende Matrizen

(2) $e^{C^{-1}AC} = C^{-1} e^A C$ falls C regulär — Basisunabhängigkeit

(3) $e^{\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_n})$ — Diagonalitätseigenschaft

Insbesondere folgt:

(4) $[e^A]^{-1} = e^{-A}$ — Regularität

(5) $e^{A(s+t)} = e^{As}\, e^{At}$

(6) $e^{A+\lambda E} = e^{\lambda} \cdot e^A$

Die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ $f(t) := e^{At}$ ist differenzierbar mit $f'(t) = e^{At} A = Ae^{At}$

Satz VI.2 Das Anfangswertproblem

Das Differentialgleichungssystem

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + f\\ x(\tau) &= x_\tau\end{aligned}} \qquad A \in \mathbb{C}^{n\times n} \qquad \begin{aligned} x : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\longmapsto x(t)\end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\longmapsto f(t)\end{aligned}$$

besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$\boxed{x(t) = e^{A(t-\tau)}x_\tau + \int_\tau^t e^{A(t-s)}f(s)ds}$$

Den Beweis der beiden Sätze VI.1 und VI.2 findet man z.B. in

Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen §18
(Heidelberger Taschenbücher)

Die Matrix e^{At} läßt sich im allgemeinen Fall (A nicht diagonalisierbar) durch Transformation auf Jordangestalt berechnen. Ein mögliches Verfahren zur Jordantransformation findet man in

Fischer: Lineare Algebra Anhang B (Vieweg)

Betrachten wir das

Problem I	$Mx + Bx + Kx = p$	$M,B,K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch
	$x(\tau) = x_\tau$	M positiv definit
	$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_\tau$	B,K positiv semidefinit

und setzen $y_1 := x \qquad y_2 := x$ so erhalten wir

$$y_1 = x = y_2 \quad \text{und} \quad y_2 = x = M^{-1}p - M^{-1}Bx - M^{-1}Kx$$

Also wird $\qquad y_2 = M^{-1}p - M^{-1}By_2 - M^{-1}Ky_1$

Wir erhalten das äquivalente

Problem II	$y = Ay + f$	$A := \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$
	$y(\tau) = y_\tau$	$f := \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}p \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

Problem II besitzt die Lösung

$$y(t) = e^{A(t-\tau)}y + \int_\tau^t e^{A(t-s)}f(s)ds$$

und wegen $y=\binom{x}{\dot{x}}$ ist damit auch das Problem I gelöst. Dabei ergibt sich jedoch das Problem, daß A nicht diagonalisierbar ist.

Wir werden jedoch unter der Voraussetzung, daß $KM^{-1}B = BM^{-1}K$ eine Lösung angeben, die das Problem der Jordantransformation umgeht. Dieses Verfahren ist stets möglich falls $B = 0$ also im ungedämpften Fall.

Wir benötigen hierzu den folgenden Satz:

<u>Satz VI.3 Simultane Diagonalisierbarkeit selbstadjungierter Matrizen</u>

Es seien

$A_1,\dots,A_m \in \mathbb{K}^{n\times n}$ selbstadjungiert $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$

Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) Es gibt eine Orthonormalbasis $\{v_1,\dots,v_n\}$ von $\mathbb{K}^n$, so daß $\{v_1,\dots,v_n\}$ eine Eigenvektorbasis von A_i ist für $i=1,\dots,m$ d.h. $A_1,\dots,A_m$ sind simultan diagonalisierbar.

(2) $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$ für $i,j=1,\dots,m$

<u>Beweis:</u>

(1) => (2): Seien $v \in \{v_1,\dots,v_n\}$ und $(i,j) \in \{1,\dots,m\}^2$ beliebig aber fest. Nach Voraussetzung existieren $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{K}$ mit $A_i v = \lambda_i v$ und $A_j v = \lambda_j v$.

Damit gilt:

$$(A_i \cdot A_j)v = A_i(A_j v) = A_i(\lambda_j v) = \lambda_j(A_i v) = \lambda_j \lambda_i v = \lambda_i \lambda_j v$$
$$= \lambda_i(A_j v) = A_j(\lambda_i v) = A_j(A_i v) = A_j \cdot A_i v$$

Nun ist die lineare Abbildung $A_i \cdot A_j$ durch ihre Werte auf der Basis $\{v_1,\dots,v_n\}$ schon eindeutig bestimmt. Also gilt:

$$A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$$

(Die Kommutativität folgt daher aus der Kommutativität von Diagonalmatrizen.)

(2) => (1): Für $m=1$ ist die Bedingung (2) trivial $A_1 \cdot A_1 = A_1 \cdot A_1$ und die Bedingung (1) folgt aus dem Spektralsatz. Es genügt den Fall $m=2$ zu betrachten.

Seien A,B zwei selbstadjungierte Matrizen mit $AB = BA$. Wir verwenden wie schon im ersten Teil die gleiche Bezeichnung für die zugeordneten linearen Abbildungen.

Nach dem Spektralsatz gibt es eine Zerlegung $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ wobei $V_i := \mathrm{Eig}_A(\lambda_i) = \mathrm{Kern}(A-\lambda_i E)$ und $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A sind. Dabei bedeutet für zwei Vektorräume $V,W \subseteq \mathbb{K}^n$ $V \oplus W$ die sogenannte orthogonale Summe $V \cap W = \{0\}$ und $V \perp W$ (d.h. $\langle v,w\rangle = 0$ für $v \in V, w \in W$ beliebig; $\langle \cdot,\cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des $\mathbb{K}^n$)

Wir zeigen nun die wesentliche Eigenschaft $B(V_i) \subseteq V_i$. Hierzu sei $v \in V_i$ beliebig, dann ist wegen $V_i = \mathrm{Eig}_A(\lambda_i)$ $Av = \lambda_i v$ und daher

$$A(Bv) = (AB)v = B(Av) = B(\lambda_i v) = \lambda_i Bv$$

Das bedeutet aber Bv ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_i also $Bv \in V_i$. Das ist auch schon alles was wir benötigen, denn $B_{|V_i}$ ist wieder selbstadjungiert. Sei nun $\dim V_i = n_i$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Wir wenden den Spektralsatz auf $B_{|V_i}$ an und erhalten eine Orthonormalbasis $v_i^{(1)},\ldots,v_i^{(n_i)}$ von V_i aus Eigenvektoren von $B_{|V_i}$. Unsere gesuchte Basis ist dann

$$\{v_1^{(1)},\ldots,v_1^{(n_1)},\ldots,v_k^{(1)},\ldots,v_k^{(n_k)}\}$$

q.e.d

Betrachten wir nun unser Problem I:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = p \qquad x(\tau) = x_\tau \qquad \dot{x}(\tau) = \dot{x}_\tau$$

Substitution 1 $\quad y := \sqrt{M}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{M}}\, y$

Wir erhalten $\quad M \frac{1}{\sqrt{M}}\, \ddot{y} + B \frac{1}{\sqrt{M}}\, \dot{y} + K \frac{1}{\sqrt{M}}\, y = p$

und durch Linksmultiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{M}}$ wegen $\frac{1}{\sqrt{M}}\, M \frac{1}{\sqrt{M}} = E_n$

sofort $\quad \ddot{y} + \frac{1}{\sqrt{M}}\, B \frac{1}{\sqrt{M}}\, \dot{y} + \frac{1}{\sqrt{M}}\, K \frac{1}{\sqrt{M}}\, y = \frac{1}{\sqrt{M}}\, p$

Definieren wir $\quad \bar{\Lambda} := \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{M}}\, B \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad \bar{\Omega}_0^2 := \frac{1}{\sqrt{M}}\, K \frac{1}{\sqrt{M}} \qquad q := \frac{1}{\sqrt{M}} p$

so erhalten wir das Anfangswertproblem

$$\boxed{\ddot{y} + 2\bar{\Lambda}\dot{y} + \bar{\Omega}_0^2 y = q \qquad y(\tau) = y_\tau = \sqrt{M}x_\tau \qquad \dot{y}(\tau) = \dot{y}_\tau = \sqrt{M}\dot{x}_\tau}$$

Die Matrizen $\bar{\Lambda} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{M}}\, B \frac{1}{\sqrt{M}}$ und $\bar{\Omega}_0^2 := \frac{1}{\sqrt{M}}\, K \frac{1}{\sqrt{M}}$ sind wieder selbstadjungiert und positiv semidefinit, nach Satz VI.3 also genau dann simultan durch eine Orthogonaltransformation diagonalisierbar wenn

$$\bar{\Lambda}\bar{\Omega}_0^2 = \bar{\Omega}_0^2 \bar{\Lambda}$$

Das bedeutet $\quad \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{M}}\, B \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}}\, K \frac{1}{\sqrt{M}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{M}}\, K \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}}\, B \frac{1}{\sqrt{M}}$

oder $\quad \frac{1}{\sqrt{M}}\, B\, M^{-1}\, K \frac{1}{\sqrt{M}} = \frac{1}{\sqrt{M}}\, K\, M^{-1}\, B \frac{1}{\sqrt{M}}$

und schließlich $\quad BM^{-1}\, K = KM^{-1}\, B$

Also: Es existiert eine Matrix S mit $S^t = S^{-1}$, so daß

$$S^t\bar{\Lambda}S = \Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n) \qquad \delta_i \geq 0$$

und $\quad S^t\bar{\Omega}_0^2 S = \Omega_0^2 = \operatorname{diag}(\omega_{01}^2, \ldots, \omega_{0n}^2) \qquad \omega_{0i}^2 \geq 0$

genau dann wenn $\quad BM^{-1}K = KM^{-1}B$

Setzen wir $\quad z := S^t y \iff y = Sz \qquad$ <u>Substitution 2</u>

so erhalten wir aus unserem Anfangswertproblem

$$\ddot{y} + 2\bar{\Delta}\dot{y} + \bar{\Omega}_0^2 y = q \qquad y(\tau) = y_\tau \qquad \dot{y}(\tau) = \dot{y}_\tau$$

zunächst $\quad S\ddot{z} + 2\bar{\Delta}S\dot{z} + \bar{\Omega}_0^2 Sz = q$

und durch Multiplikation mit S^t von links

$$\ddot{z} + 2\Delta\dot{z} + \Omega_0^2 z = S^t q$$

und damit wegen $z(\tau) = S^t y(\tau) = S^t y_\tau$ und $\dot{z}(\tau) = S^t y(\tau) = S^t \dot{y}_\tau$ das Anfangsproblem:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ddot{z} + 2\Delta\dot{z} + \Omega_0^2 z = h & h := S^t q = S^t \frac{1}{\sqrt{M}}\, p \\ z(\tau) = z_\tau = S^t y_\tau = S^t \sqrt{M}\, x_\tau & \\ \dot{z}(\tau) = \dot{z}_\tau = S^t \dot{y}_\tau = S^t \sqrt{M}\, \dot{x}_\tau & \end{array}}$$

Dies ist ein entkoppeltes System

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ddot{z}_j + 2\delta_j \dot{z}_j + \omega_{0j}^2 z_j = h_j & j=1,\ldots,n \\ z_j(\tau) = z_{\tau_j} \qquad \dot{z}_j(\tau) = z_{\tau_j} & \end{array}}$$

Wir verwenden jetzt den folgenden

<u>Satz VI.4 Lösung der gedämpften Schwingungsgleichung</u>

Das Anfangsproblem

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = h \qquad x \in \mathbb{R},\ \text{bel.}, \omega_0^2 \geq 0, \omega^2 := \omega_0^2 - \delta^2, \omega := \sqrt{\omega^2}$$

$$x(\tau) = x_\tau \qquad \dot{x}(\tau) = \dot{x}_\tau$$

besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$x(t) = e^{-\delta(t-\tau)}\left(\cos[\omega(t-\tau)]\, x_\tau + \frac{1}{\omega}\sin[\omega(t-\tau)] \cdot (\dot{x}_\tau - \delta x_\tau)\right)$$
$$+ \int_\tau^t e^{-\delta(t-s)} \frac{1}{\omega} \sin[\omega(t-s)]\, h(s)\,ds$$

Beweis:

Wir setzen zunächst voraus, daß $\omega \neq 0$ und $\omega^2 \neq 0$ während wir an δ keine zusätzliche Voraussetzung machen. Um keine anderen Hilfsmittel (Laplacetransformation, Fundamentallösung) einführen zu müssen, wählen wir den komplizierteren Weg über die Umwandlung in ein System erster Ordnung.

$$\dot{y} = Ay + f \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$y(\tau) = \begin{pmatrix} x_\tau \\ \dot{x}_\tau \end{pmatrix}$$

Als Eigenwerte von A erhalten wir $\lambda = -\delta + i\omega$ und $\bar{\lambda} = -\delta - i\omega$ mit den zugehörigen Eigenräumen

$$\mathrm{Eig}_A(\lambda) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \bar{\lambda} \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Eig}_A(\bar{\lambda}) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \lambda \\ \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

Dann setzt man

$$Q := \left[\mathrm{Re}\begin{pmatrix} \lambda \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} \middle| \mathrm{Im}\begin{pmatrix} \lambda \\ \omega_0^2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -\delta & \omega \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$$

unter unserer Zusatzvoraussetzung $\omega_0 \neq 0$, $\omega \neq 0$ wird Q regulär und

$$Q^{-1} = \frac{1}{\omega\omega_0^2}\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega_0^2 & \delta \end{pmatrix}.$$

Wegen $\qquad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\delta & -\omega \\ \omega & -\delta \end{pmatrix} =: A_{\mathbb{C}} \in M_C$

und der Tatsache, daß

$$M_{\mathbb{C}} := \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\} = \{\text{Matrizenring der 2x2 Matrizen}\}$$

einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Körper (vermöge $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \hat{=} a+ib$) bildet.

Wird das Differientialgleichungssystem

$$\dot{w} = A_{\mathbb{C}}w + Q^{-1}f \qquad\qquad w := Q^{-1}y$$

äquivalent zu

$$\dot{z} = (-\delta + i\omega)z + h \qquad z := \omega_1 + i\omega_2 \qquad h := (Q^{-1}f)_1 + i(Q^{-1}f)_2$$

mit der $\mathbb{C}^{1\times 1}$-Fundamentalmatrix

$$e^{(-\delta+i\omega)t} = e^{-\delta t}e^{i\omega t} = e^{-\delta t}(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

Also wird $$e^{A_{\mathbb{C}}t} = e^{-\delta t}\begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}$$

und schließlich $e^{At} = QQ^{-1}e^{At}QQ^{-1} = Qe^{Q^{-1}AQt}Q^{-1} = Qe^{A_{\mathbb{C}}t}Q^{-1}$

Sie errechnet sich zu

$$e^{At} = e^{-\delta t}\begin{pmatrix}\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t\\ -(1+\frac{\delta^2}{\omega^2})\sin\omega t & \cos\omega t - \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\end{pmatrix}$$

Wir erhalten damit die Lösung von

$$\dot{y} = Ay + f \quad , \quad f = \begin{pmatrix}0\\ h\end{pmatrix} \quad , \quad y = \begin{pmatrix}x\\ \dot{x}\end{pmatrix}$$

$$y(\tau) = \begin{pmatrix}x_\tau\\ \dot{x}_\tau\end{pmatrix}$$

in der Form $$y = e^{A(t-\tau)}y(\tau) + \int_\tau^t e^{A(t-s)}f(s)ds$$

und indem wir die erste Komponente von y betrachten erhalten wir die Behauptung im Fall $\omega_0 \neq 0$ und $\omega \neq 0$.

Der Fall $\omega^2 > 0$ und $\omega_0^2 > 0$ ist somit unmittelbar klar. Der Fall $\omega^2 < 0$ und $\omega_0^2 > 0$ ergibt sich wegen $\omega := \sqrt{\omega^2} = \sqrt{-(-\omega^2)} = i\sqrt{-\omega^2}$ aus der Formel des Satzes mit $\omega \to i\omega$ und

$$\cos ix = \frac{e^{i(ix)}+e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh(x)$$

sowie $$\sin ix = \frac{e^{i(ix)}-e^{-i(ix)}}{2i} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{-x}-e^{-x}}{2} = \frac{1}{i}\sinh(x)$$

also $$\frac{\sin i\omega t}{i\omega} = \frac{1}{\omega}\sinh(\omega)$$

durch einfaches ersetzen von cos und sin durch cosh und sinh. Man spricht in diesem Fall von stark gedämpften Systemen.

Im Fall $\omega_0^2 = 0$ wird $\omega^2 = -\delta^2$ und wir erhalten das Problem

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} = h$$

$$x(\tau) = x_\tau$$

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_\tau$$

und die Lösung mit $\lim\limits_{\omega \to 0} \frac{\sin\omega t}{\omega} = t$ und $\lim\limits_{\omega \to 0} \cos\omega t = 0$

Satz VI.4 ist damit bewiesen.

Mit Satz VI.4 erhalten wir als Lösungen des entkoppelten Systems

$$\ddot{z}_j + 2\delta_j \dot{z} + \omega_{0j}^2 z_j = h_j \qquad j=1,\ldots,n$$

$$z_j(\tau) = z_{\tau_j}$$

$$\dot{z}_j(\tau) = \dot{z}_{\tau_j}$$

$$z_j(t) = e^{-\delta_j(t-\tau)}\left[\cos[\omega_j(t-\tau)]z_{\tau_j} + \frac{1}{\omega_j}\sin[\omega_j(t-\tau)](z_{\tau_j} - \delta_j z_{\tau_i})\right]$$

$$+ \int_{\tau}^{t} e^{-\delta_j(t-s)} \frac{1}{\omega_j}\sin[\omega_j(t-s)]h_j(s)ds$$

in Matrizenschreibweise mit

$$\Delta := \operatorname{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)$$

$$\Omega_0 := \operatorname{diag}(\omega_{01},\ldots,\omega_{0n}) = \sqrt{\Omega_0^2}$$

$$\Omega := \operatorname{diag}(\omega_1,\ldots,\omega_n) = \sqrt{\Omega_0^2 - \Delta^2}$$

die Lösung

$$z(t) = e^{-\Delta t'}\left[\cos(\Omega t')z_\tau + \frac{1}{\Omega}\sin(\Omega t')[\dot{z}_\tau - \Delta z_\tau]\right]$$

$$+ \int_{\tau}^{t} e^{-\Delta t''} \frac{1}{\Omega}\sin(\Omega t'')h(s)ds$$

wobei zur Abkürzung $t' := t-\tau$ und $t'' := t-s$ gesetzt wurde.

Nach Substitution war:

$$y = Sz \iff z = S^t y \quad \text{und} \quad h = S^t q$$

Also erhalten wir:

$$y(t) = Se^{-\Delta t'}\left[\cos(\Omega t')S^t y_\tau + \frac{1}{\Omega}\sin(\Omega t')[S^t \dot{y}_\tau - S^t S\Delta S^t y_\tau]\right]$$

$$+ \int_{\tau}^{t} Se^{-\Delta t} \frac{1}{\Omega}\sin(\Omega t'')S^t q(s)ds$$

$$= Se^{-\Delta t'} S^t \left[S\cos(\Omega t') S^t y_\tau + S \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t') S^t [\dot{y}_\tau - \bar{\Delta} y_\tau] \right]$$

$$+ \int_\tau^t Se^{-\Delta t''} \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t'') S^t q(s) ds$$

$$= e^{-S\Delta S^t t'} \left[\cos(S\Omega S^t t') y_\tau + S \frac{1}{\Omega} S^t S \sin(\Omega t') S^t [\dot{y}_\tau - \bar{\Delta} y_\tau] \right]$$

$$+ \int_\tau^t Se^{-\Delta t''} \frac{1}{\Omega} \sin(\Omega t'') S^t q(s) ds$$

$$= e^{-\bar{\Delta} t'} \left[\cos(\bar{\Omega} t') y_\tau + \frac{1}{\bar{\bar{\Omega}}} \sin(\bar{\Omega} t') [\dot{y}_\tau - \bar{\Delta} y_\tau] \right]$$

$$+ \int_\tau^t e^{-\bar{\Delta} t''} \frac{1}{\bar{\bar{\Omega}}} \sin(\bar{\Omega} t'') q(s) ds$$

Dabei ist $\bar{\Omega} := S\Omega S^t = S\sqrt{\Omega_0^2 - \Delta^2}\, S^t$

Schließlich ergibt sich wegen $x = \frac{1}{\sqrt{M}} y$, $q = \frac{1}{\sqrt{M}} p$, $y_\tau = \sqrt{M}\, x_\tau$

und $\dot{y}_\tau = \sqrt{M}\, y_\tau$ mit $\frac{1}{\sqrt{M}} \bar{\Delta} \sqrt{M} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{1}{\sqrt{M}} B \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{M} = \frac{1}{2} M^{-1} B$ sowie

$$\boxed{\bar{\bar{\Omega}} := \frac{1}{\sqrt{M}} \bar{\Omega} \sqrt{M} = \frac{1}{\sqrt{M}} S\sqrt{\Omega_0^2 - \Delta^2}\, S^t \sqrt{M}}$$

die Lösung

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}M^{-1}Bt'} \left[\cos(\bar{\bar{\Omega}} t') x_\tau + \bar{\bar{\Omega}}^{-1} \sin(\bar{\bar{\Omega}} t') (\dot{x}_\tau - \tfrac{1}{2} M^{-1} B x_\tau) \right]$$

$$+ \int_\tau^t e^{-\frac{1}{2}M^{-1}Bt''} \bar{\bar{\Omega}}^{-1} \sin(\bar{\bar{\Omega}} t'') M^{-1} p(s) ds$$

falls $BM^{-1}K = KM^{-1}B$

Nennen wir $N := \frac{1}{\sqrt{M}} S$ eine Matrix von Normalschwingungen (nicht eindeutig bestimmt) so folgt

$$N^t M N = \left(\frac{1}{\sqrt{M}} S\right)^t M \frac{1}{\sqrt{M}} S = S^t \frac{1}{\sqrt{M}} M \frac{1}{\sqrt{M}} S = S^t S = E_n$$

$$N^t B N = \left(\frac{1}{\sqrt{M}} S\right)^t B \frac{1}{\sqrt{M}} S = S^t \frac{1}{\sqrt{M}} B \frac{1}{\sqrt{M}} S = 2\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_n)$$

$$N^tKN = (\frac{1}{\sqrt{M}} S)^t K \frac{1}{\sqrt{M}} S = S^t \frac{1}{\sqrt{M}} K \frac{1}{\sqrt{M}} S = \Omega_0^2 = \mathrm{diag}(\omega_{01}^2,\ldots,\omega_{0n}^2)$$

$$N^{-1} = (\frac{1}{\sqrt{M}} S)^{-1} = S^{-1}(\frac{1}{\sqrt{M}})^{-1} = S^t\sqrt{M}$$

daher wird $\tilde{\tilde{\Omega}} = N\sqrt{\Omega_0^2 - \Delta^2}\, N^{-1}$

und $N^{-1}(M^{-1}B)N = (MN)^{-1}BN = (M\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}S)^{-1}BN = (\sqrt{M}\, S)^{-1}B\,\frac{1}{\sqrt{M}}\, S$

$$= S^{-1}\frac{1}{\sqrt{M}} B \frac{1}{\sqrt{M}} S = S^t \frac{1}{\sqrt{M}} B \frac{1}{\sqrt{M}} S = 2\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)$$

Aus $N^tMN = E_n$ folgt $M^{-1} = NN^t$

Damit sind alle Ausdrücke in unserer Lösungsformel elementar durch N ausdrückbar.

Ist umgekehrt N irgend eine Matrix mit $N^tMN = E_n$, $N^tBN = 2\Delta$, $N^tKN = \Omega_0^2$ so definieren wir $S := \sqrt{M}\, N$ und es gilt:

$$S^tS = (\sqrt{M}\, N)^t\sqrt{M}\, N = N^t\sqrt{M}\sqrt{M}\, N = N^tMN = E_n$$

$$S^t \frac{1}{\sqrt{M}} K \frac{1}{\sqrt{M}} S = (\sqrt{M}\, N)^t \frac{1}{\sqrt{M}} K \frac{1}{\sqrt{M}}\sqrt{M}\, N = N^tKN = \Omega_0^2$$

$$S^t \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{M}} B \frac{1}{\sqrt{M}} S = \frac{1}{2} S^t \frac{1}{\sqrt{M}} B \frac{1}{\sqrt{M}} S = \frac{1}{2} N^tBN = \frac{1}{2}\cdot 2\Delta = \Delta$$

Also reicht eine Matrix N mit den folgenden 3 Eigenschaften:

$N^tMN=E_n$

$N^tBN=B_g=\mathrm{diag}(b_{g1},\ldots,b_{gn})$ generalisierte Dämpfungsmatrix $B_g=2\Delta$

$N^tKN=K_g=\mathrm{diag}(k_{g1},\ldots,k_{gn})$ generalisierte Steifigkeitsmatrix $K_g=\Omega_0^2$

Das charakteristische Polynom $p_{MBK}(\lambda) := \det(\lambda^2M + \lambda B + K)$ besitzt wegen

$$p_{MBK}(\lambda) = \det(\lambda^2M + \lambda B + K) = \det(N^t(\lambda^2M + \lambda B + K)N)\cdot\frac{1}{\det(N^tN)}$$

$$= \det(\lambda^2E_n + 2\Delta\lambda + \Omega_0^2)\cdot\frac{1}{\det(M^{-1})}$$

$$= \det(M) \cdot \det(\lambda^2 E_n + 2\Delta\lambda + \Omega_0^2)$$

$$= \det M \cdot \prod_{j=1}^{n} (\lambda^2 + 2\delta_j\lambda + \omega_{0j}^2)$$

$$= \det M \cdot \prod_{j=1}^{n} (\lambda^2 + 2\delta_j\lambda + \delta_j^2 + \omega_{0j}^2 - \delta_j^2)$$

$$= \det M \cdot \prod_{j=1}^{n} (\lambda + \delta_j)^2 + \omega_j^2$$

genau die Nullstellen $\delta_j + i\omega_j$ $j=1,\ldots,n$

Wir fassen unser Ergebnis in folgendem Satz zusammen:

<u>Satz VI.5 Lösung des Anfangswertproblems für die schwach gedämpfte Schwingung</u>

Gegeben sei das Anfangswertproblem:

$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = p$ $M,B,K \in \mathbb{R}^{nxn}$ alle selbstadjungiert

$x(\tau) = x_\tau$ M positiv definit

$x(\tau) = \dot{x}_\tau$ B,K positiv semidefinit

Man erhält im allgemeinen Fall die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{pmatrix}(t-\tau)} \begin{pmatrix} x_\tau \\ \dot{x}_\tau \end{pmatrix} + \int_\tau^t e^{\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}B \end{pmatrix}(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}p(s) \end{pmatrix} ds$$

wobei die Systemmatrix Jordantransformiert werden muß.
Genau dann existiert eine Matrix N mit den Eigenschaften

(1) $N^tMN = E_n$ N ist M orthogonal

(2) $N^tBN = B_g = 2\Delta$ $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1,\ldots,\delta_n)$

(3) $N^tKN = K_g = \Omega_0^2$ $\Omega_0^2 = \mathrm{diag}(\omega_{01}^2,\ldots,\omega_{0n}^2)$

wenn $BM^{-1}K = KM^{-1}B$

Ist zusätzlich $\Omega_g^2 := \Omega_0^2 - \Delta^2$ positiv definit (schwachgedämpftes System) so lautet die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t)=e^{-\frac{1}{2}M^{-1}B(t-\tau)}\left(\cos[\Omega(t-\tau)]x_\tau+\Omega^{-1}\sin[\Omega(t-\tau)]\,(\dot{x}_\tau-\tfrac{1}{2}M^{-1}Bx_\tau)\right)$$

$$+\int_\tau^t e^{-\frac{1}{2}M^{-1}B(t-s)}\Omega^{-1}\sin[\Omega(t-s)]M^{-1}p(s)ds$$

wobei $\Omega := N\Omega_g N^{-1}$ $\quad \Omega_g := \sqrt{\Omega_g^2} = \mathrm{diag}(\omega_1,\ldots,\omega_n)$

Jede solche Matrix N heißt Normal- oder Modalmatrix (Matrix der Normalschwingungen).

Es gilt:

$$M^{-1}B = 2N\Delta N^{-1}$$

$$M^{-1} = NN^t$$

Die Operatoren in der Lösungsformel können daher folgendermaßen berechnet werden

$$e^{-\frac{1}{2}M^{-1}Bt} = N\,e^{-\Delta t}\,N^{-1}$$

$$\sin(\Omega t) = N\,\sin(\Omega_g t)\,N^{-1}$$

$$\Omega^{-1} = N\,\Omega_g^{-1}\,N^{-1}$$

$$\cos(\Omega t) = N\,\cos(\Omega_g t)\,N^{-1}$$

$$M^{-1} = NN^t$$

Jede Matrix N von Normalschwingungen besitzt die Gestalt

$N=\frac{1}{\sqrt{M}}S$ mit $S^{-1}=S^t$

Definiert man

$\Lambda := \Delta+i\Omega_g \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\quad \Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\mathrm{diag}(\delta_1+i\omega_1,\ldots,\delta_n+i\omega_n)$

dann erfüllt die Matrix der Normalschwingungen das Matrizen-Eigenwertproblem.

$$MN\Lambda^2 + BN\Lambda + KN = 0$$

Die komplexen Zahlen $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sind hierbei die Nullstellen des charakteristischen Polynomes

$$p_{MBK}(\lambda) = \det(M\lambda^2 + B\lambda + K)$$

Beweis:

Nach den vorausgegangenen Betrachtungen ist lediglich die Gleichung des Matrizen-Eigenwertproblems zu zeigen. Diese folgt aus

$$MN\Lambda^2 + BN\Lambda + KN = 0$$

$$\Longleftrightarrow N^{-1}MN\Lambda^2 + N^{-1}BN\Lambda + N^{-1}KN = 0$$

$$\Longleftrightarrow \Lambda^2 + 2\Delta\Lambda + \Omega_0^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \forall_i \lambda_i^2 + 2\delta_i\lambda_i + \omega_{0i}^2 = 0$$

und damit ist der Satz gezeigt.

Der Spezialfall des ungedämpften Systems

Hier ist die Verträglichkeitsbedingung $BM^{-1}K = KM^{-1}B$ stets erfüllt (B=0).

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$M\ddot{x} + Kx = p$$

$$x(\tau) = x_\tau$$

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}_\tau$$

schreibt sich in der Form

$$x(t) = \cos[\Omega_0(t-\tau)]\, x_\tau + \Omega_0^{-1}\sin[\Omega_0(t-\tau)]\, \dot{x}_\tau$$

$$+ \int_\tau^t \Omega_0^{-1}\sin[\Omega_0(t-s)]\, M^{-1}p(s)ds$$

wobei $\Omega_0^2 = \frac{1}{\sqrt{M}} K \frac{1}{\sqrt{M}}$ und $\Omega_0 := \sqrt{\Omega_0^2}$

Die Matrix der Normalschwingungen N diagonalisiert M und K simultan. Sie ist von der Form $N = \frac{1}{\sqrt{M}} S$ mit $S^t = S^{-1}$ und $S^t\Omega_0^2 S = \Omega_{0g}^2 = \mathrm{diag}(\omega_{01}^2, \ldots, \omega_{0n}^2)$

Daher gilt:

$$N^t M N = E_n$$

$$N^t K N = \Omega_{0g}^2 = \mathrm{diag}(\omega_{01}^2, \ldots, \omega_{0n}^2)$$

Die Operatoren in der Lösungsformel können folgendermaßen berechnet werden:

$$\sin(\Omega_0 t) = N \sin(\Omega_{0g} t) N^{-1}$$

$$\cos(\Omega_0 t) = N \cos(\Omega_{0g} t) N^{-1}$$

$$\Omega_0^{-1} = N \Omega_{0g}^{-1} N^{-1}$$

$$M^{-1} = N N^t$$

Die Matrix der Normalschwingungen N erfüllt das Matrizen-Eigenwertproblem

$$- M N \Omega_{0g}^2 + K N = 0$$

Das charakteristische Polynom

$$p_{MK}(\lambda) := \det(M\lambda^2 + K)$$

besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = i\omega_{01}, \ldots, \lambda_n = i\omega_{0n}$

VII Stabilität von Eigenwerten

Satz VII.1 Ableitung der Abbildung $\det \circ C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \det C(t)$

Es sei

(1) $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \longmapsto C(t)$ — 1 mal stetig differenzierbar

das bedeutet: Alle Komponentenfunktionen $c_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto c_{ij}(t)$ sind 1 mal stetig differenzierbar

(2) $c_j(t) := C(t)e_j$ die j-te Spalte von $C(t) = [c_1(t)|\ldots|c_n(t)]$

(3) $p := \det \circ C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \det C(t)$

Dann ist auch p 1 mal stetig differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\right)^k p(t) = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,\ldots,k\}^n \\ |\alpha| = k}} \binom{k}{\alpha} \det D_t^{\alpha} C(t)} \qquad \text{für } k=0,\ldots,1$$

wobei für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und ein $k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{k}{\alpha} := \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} \quad \text{der Multinominalkoeffizient}$$

$$D_t^{\alpha} C(t) := \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha_1} c_1(t) | \ldots | \left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha_n} c_n(t)\right]$$

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \quad \text{der Multiindexbetrag}$$

Beweis:

Statt $\alpha \in \{0,\ldots,k\}^n$ schreibe $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ denn es ist

$\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = k\} = \{\alpha \in \{0,\ldots,k\}^n : |\alpha| = k\}$ da

$|\alpha| \leq k \implies \forall_i \alpha_i \leq k$

$\underline{k=0:}$ $\sum\limits_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=0}} \binom{0}{\alpha}\det D_t^{\alpha}C(t) = \binom{0}{0}\det D_t^{0}C(t) = \det C(t) = p(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^0 p(t)$

Also stimmt die Behauptung im Fall k=0

$\underline{k=1:}$ $\sum\limits_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n\\ |\alpha|=1}} \binom{1}{\alpha}\det D_t^{\alpha}C(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{1}{e_i}\det D_t^{e_i}C(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \det D_t^{e_i}C(t)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det[c_1(t)|\ldots|\dot{c}_i(t)|\ldots|c_n(t)]$$

Also ist zu zeigen:

$$\frac{dp}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \det[c_1(t)|\ldots|\dot{c}_i(t)\ \ldots\ c_n(t)]$$

Die sieht man z.B. so:

$$dp(t) = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial \det C}{\partial c_{ij}}\, dc_{ij}(t) = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial \det C}{\partial c_{ij}}\, \dot{c}_{ij}(t)dt \quad \text{totales Differential}$$

Also wird:

$$\frac{dp}{dt}(t) = \sum_{ij=1}^{n} \dot{c}_{ij}(t)\, \frac{\partial \det C}{\partial c_{ij}}$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} \dot{c}_{ij}(t)\, \frac{\partial}{\partial c_{ij}} \det[c_1(t)|\ldots|c_j(t)|\ldots|c_n(t)]$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} \dot{c}_{ij}(t)\, \frac{\partial}{\partial c_{ij}} \det[c_1(t)|\ldots|\sum_{l=1}^{n} c_{lj}(t)e_l^j|\ldots|c_n(t)]$$

In der letzten Formel bedeutet e_l^j: der l-te Einheitsvektor e_l steht in der j-ten Spalte der Matrix C. Also haben wir wegen der Multilinearität von det

$$\frac{dp}{dt}(t) = \sum_{ijl=1}^{n} \dot{c}_{ij}(t)\frac{\partial}{\partial c_{ij}}c_{lj}(t)\ \det[c_1(t)|\ldots|e_l^j|\ldots|c_n(t)]$$

$$= \sum_{ijl=1}^{n} \dot{c}_{ij}(t)\ \delta_{il}\ \det[c_1(t)|\ldots|e_l^j|\ldots|c_n(t)]$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} \dot{c}_{ij}(t)\ \det[c_1(t)|\ldots|e_i^j|\ldots|c_n(t)]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \dot{c}_{ij}(t) \det[c_1(t)|\ldots|e_i^j|\ldots|c_n(t)]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det[c_1(t)|\ldots|\sum_{i=1}^{n} \dot{c}_{ij}(t)e_i^j|\ldots|c_n(t)]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det[c_1(t)|\ldots|\dot{c}_j(t)|\ldots|c_n(t)]$$

Die Behauptung stimmt demnach im Fall $k=1$

<u>k beliebig:</u> Um die Idee für beliebiges k zu illustrieren betrachten wir zunächst den Fall $k=2$.

$$\ddot{p} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|c_n] \qquad \text{nach Fall } k=1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|c_n]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_j|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|c_n]$$

$$+ \det[c_1|\ldots|\ddot{c}_i|\ldots|c_n] \Big) \qquad \text{nach Fall } k=1$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det[c_1|\ldots|\ddot{c}_i|\ldots|c_n]$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_j|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|c_n]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|\dot{c}_j|\ldots|c_n]$$

Vertauschen wir in der dritten Summe die Summationsreihenfolge, so erhalten wir

$$\ddot{p} = \sum_{i=1}^{n} \det[c_1|\ldots|\ddot{c}_i|\ldots|c_n]$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_j|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|c_n]$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|\dot{c}_j|\ldots|c_n]$$

Jetzt vertauschen wir in der zweiten Summe die Indizes $i \longleftrightarrow j$ und erhalten

$$\ddot{p} = 2 \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|\dot{c}_j|\ldots|c_n]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \det[c_1|\ldots|\ddot{c}_i|\ldots|c_n]$$

$$= 2 \sum_{1\le i<j\le n} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|\dot{c}_j|\ldots|c_n]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \det[c_1|\ldots|\ddot{c}_i|\ldots|c_n]$$

Die letzte Darstellung von $\ddot{p}$ ist die des Satzes, denn es gilt:

$$\ddot{p} = 2 \sum_{1\le i<j\le n} \det[c_1|\ldots|\dot{c}_i|\ldots|\dot{c}_j|\ldots|c_n]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \det[c_1|\ldots|\ddot{c}_i|\ldots|c_n]$$

$$= 2 \sum_{1\le i<j\le n} \det D^{e_i+e_j} C(t) + \sum_{i=1}^{n} \det D^{2e_i} C(t)$$

$$= \sum_{1\le i<j\le n} \binom{2}{e_i+e_j} \det D^{e_i+e_j} C(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \binom{2}{2e_i} \det D^{2e_i} C(t)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1,2\}^n \\ |\alpha|=2}} \binom{2}{\alpha} \det D^{\alpha} C(t)$$

Im Fall $k=2$ ist die Behauptung damit gezeigt und für beliebiges $k\ge 2$ betrachten wir nochmals unsere Darstellung

$$\ddot{p}(t) = 2 \sum_{1\le i<j\le n} \det D^{e_i+e_j} C(t) + \sum_{1\le i\le n} \det D^{2e_i} C(t)$$

Bei der Differentiation tauchen gleiche Therme auf, die wir durch sortieren zusammenziehen. Ge-

sucht wird für beliebiges k der Vorfaktor. Fragestellungen dieser Art behandelt man in der Kombinatorik, die z.B. in der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie behandelt wird.

Sehen wir das Problem kombinatorisch, so lautet die Fragestellung:

> In einer Urne befinden sich k Kugeln, davon α_j von der Farbe $j=1,\ldots,n$ und es gilt
>
> $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = k$$
>
> Wieviele unterscheidbare Anordnungen gibt es?

Mit der Antwort $\binom{k}{\alpha}$ (vgl. CHUNG - Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie S. 52-53) und der Zuordnung

Urne mit k Kugeln $\hat{=}$ $(\frac{d}{dt})^k p$

Farbe $1,\ldots,n$ $\hat{=}$ Spalten der Matrix $[c_1|\ldots|c_n]$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für } j=1,\ldots,n \\ \text{sind } \alpha_j \text{ Kugeln} \\ \text{von der Farbe } j\end{array}\right\} \hat{=} \left[(\tfrac{d}{dt})^{\alpha_1} c_1 | \ldots | (\tfrac{d}{dt})^{\alpha_n} c_n\right] = D^{\alpha} C(t)$$

ist unser Problem gelöst und der Satz bewiesen.

q.e.d.

Folgerung VII.2 Koeffizienten des verallgemeinerten charakteristischen Polynomes

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei Matrizen. Wir definieren:

$$\boxed{p_{AB}(t) := \det(A + tB)}$$

und behaupten:

$$\boxed{p_{AB}(t) = \sum_{l=0}^{n} \Big(\sum_{\substack{\beta \in \{0,1\}^n \\ |\beta| = l}} \det B_A^{\beta} \Big) t^l}$$

wobei

$$B_A^{\beta} e_j := \begin{cases} b_j & \text{falls } \beta_j=1 \\ a_j & \text{falls } \beta_j=0 \end{cases} \quad \text{die } j\text{-te Spalte von } B_A^{\beta}$$

Wir nennen:

$$\boxed{B_A^{\beta} \quad \text{die} \quad \beta\text{-te Potenz von } B \text{ zur Basis } A}$$

Ist $A=E$ so schreiben wir:

$$\boxed{B^{\beta} := B_E^{\beta} \quad \beta\text{-te Potenz von } B \quad (\text{zur Basis } E)}$$

<u>Beweis:</u>

Definiere $C(t):=A+tB$ dann wird $p_{AB}(t)=\det C(t)$ und nach Satz VII.2 gilt:

$$p_{AB}^{(k)}(t) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=k}} \binom{k}{\alpha} \det D^{\alpha} C(t)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=k}} \binom{k}{\alpha} \det\left[\ldots\ldots \middle| \left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha_i} a_i + tb_i \middle| \ldots\ldots\right]$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=k}} \binom{k}{\alpha} \det\left[\ldots \middle| \begin{matrix} a_i + tb_i & \alpha_i=0 \\ b_i & \alpha_i=1 \\ 0 & \alpha_i\geq 2 \end{matrix} \middle| \ldots\ldots\right]$$

$$= \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1\}^n \\ |\alpha|=k}} \binom{k}{\alpha} \det\left[\ldots \middle| \begin{matrix} a_i + tb_i & \alpha_i=0 \\ a_i & \alpha_i=1 \end{matrix} \middle| \ldots\ldots\right]$$

denn die Determinante einer Matrix wird 0 falls eine Spalte der Matrix 0 ist. Insbesondere wird für $t=0$

$$p_{AB}^{(k)}(0) = \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1\}^n \\ |\alpha|=k}} \binom{k}{\alpha} \det\left[\ldots \middle| \begin{matrix} a_i & \alpha_i=0 \\ b_i & \alpha_i=1 \end{matrix} \middle| \ldots\ldots\right]$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = k}} \binom{k}{\alpha} \det B_A^{\alpha}$$

$$= k! \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = k}} \det B_A^{\alpha}$$

Dabei gilt die letzte Gleichung weil $\binom{k}{\alpha} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!} = k!$ für $\alpha \in \{0,1\}^n$.

Einsetzen in die Taylerformel $p_{AB}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_{AB}^{(k)}(0)}{k!} t^k$ liefert

$$p_{AB}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = k}} \det B_A^{\alpha} \Big) t^k$$

Nun gilt für $\alpha \in \{0,1\}^n$ $\quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq n$, so daß die Koeffizienten für $k > n$ alle 0 sind. Damit erhalten wir die Behauptung.

<u>Folgerung VII.3 Koeffizienten des speziellen charakteristischen Polynoms</u>

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $p_A(t) := \det(A - tE)$ das zugehörige Polynom.

Dann gilt $\boxed{p_A(t) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l b_l t^l}$

wobei $\boxed{b_l = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-l}} \det A^{\alpha}}$ $\qquad$ $\underline{A^{\alpha} := A_E^{\alpha}}$

Bezeichnen wir mit

A'_{kl} die Matrix die durch Streichen der Zeile k und Spalte l aus A entsteht

$A_i'' = A''_{i_1,\ldots,i_l}$ die Matrix die durch Streichen der Zeilen und Spalten $i_1,\ldots,i_l$ aus A entsteht

so folgt

$$b_0 = \det A$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^{n} \det A_1''$$

$$b_l = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_l \le n} \det A_i'' \qquad l=1,\ldots,n-1$$

$$b_{n-1} = Sp(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$b_n = 1$$

Beweis:

$$p_A(t) = p_{A,-E}(t) = p_{A,E}(-t) = \sum_{l=0}^{n} \Big(\sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha|=l}} \det E_A^{\alpha}\Big)(-t)^l$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \Big(\sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha|=l}} \det E_A^{\alpha}\Big) t^l$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \Big(\sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha|=l}} \det A_E^{e-\alpha}\Big) t^l$$

wobei $e := \sum_{i=1}^{n} e_i = (1,\ldots,1)$

Die Abbildung $\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$, $\alpha \mapsto e-\alpha$ ist idempotent ($\varphi^2 = id$) also insbesondere bijektiv (mit $\varphi^{-1} = \varphi$) und da $|e-\alpha| = n-|\alpha|$

folgt $p_A(t) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l b_l t^l$ mit $b_l = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha|=n-l}} \det A_E^{\alpha}$

also der erste Teil der Behauptung.

Die Formel des zweiten Teils erhält man folgendermaßen:

$$b_0 = \sum_{|\alpha|=n} \det A^{\alpha} = \det A^{e} = \det A$$

$$b_1 = \sum_{|\alpha|=n-1} \det A^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=1} \det E_A^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \det E_A^{e_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det[a_1|\ldots|e_i|\ldots|a_n]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} e_{ji} \det[a_1|\ldots|e_i|\ldots|a_n]'_{ji}$$

Laplace-Entwicklung Spalte i

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \delta_{ij} \det[a_1|\ldots|e_i|\ldots|a_n]'_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i} \det[a_1|\ldots|e_i|\ldots|a_n]'_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det[a_1|\ldots|e_i|\ldots|a_n]'_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det[a_1|\ldots|a_i|\ldots|a_n]'_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \det A'_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \det A''_i$$

Wir haben sogar mehr gezeigt: $\det E_A^{e_i} = \det A^{e-e_i} = \det A''_i$

$$b_n = \sum_{|\alpha|=0} \det A^{\alpha} = \det A^0 = \det E = 1$$

$$b_{n-1} = \sum_{|\alpha|=1} \det A^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \det A^{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \det[e_1|\ldots|a_i|\ldots|e_n]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \det[e_1|\ldots|\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, e_j^i|\ldots|e_n]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \det[e_1|\ldots|e_j^i|\ldots|e_n] = \sum_{ij=1}^{n} a_{ji}\delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1} a_{ii} = Sp(A)$$

Für $l=1,\ldots,n-1$ gilt:

$$b_l = \sum_{\substack{|\alpha|=n-l \\ \alpha\in\{0,1\}^n}} \det A^{\alpha} = \sum_{\substack{|\alpha|=l \\ \alpha\in\{0,1\}^n}} \det E_A^{\alpha}$$

$$= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_l\le n} \det E_A^{\sum_{j=1}^{l} e_{i_j}} = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_l\le n} \det A''_{i_1,\ldots,i_l}$$

Zum Beweis der letzten Gleichung reicht die folgende Identität

$$\det E_A^{e_i+e_j} = \det[A'_{ii}]^{\tilde{e}-\tilde{e}_j} = \det[A'_{ii}]'_{jj} = \det A''_{ij}$$

die sich leicht aus der schon bewiesenen Idendität

$\det E_A^{e_i} = \det A'_{ii} = \det A''_i$ ergibt. Die Multiindizes $\tilde{e}$ und $\tilde{e}_j$ haben hierbei die gleiche Bedeutung im $\mathbb{N}_0^{n-1}$ wie die Indizes e und e_j im $\mathbb{N}_0^n$.

q.e.d.

Folgerung VII.4 Produktformeln

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1\}^n\\ |\alpha|\le n}} a_b^\alpha \qquad a_b^\alpha := \det A_B^\alpha \qquad A:=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$$

$$B:=\mathrm{diag}(b_1,\ldots,b_n)$$

Speziell für $b_i = 1$ $a_i = x_i$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1\}^n\\ |\alpha|\le n}} x^\alpha \qquad x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \qquad x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i & \alpha_i=1 \\ 1 & \alpha_i=0 \end{cases}$$

Dies ist die wohlbekannte Multiindexpotenz eines Vektors

Beweis:

Sei $A=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ und $B=\mathrm{diag}(b_1,\ldots,b_n)$ dann wird

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \det(A+B) = \det(A+tB)_{|t=1}$$

$$= \sum_{l=0}^{n}\Big(\sum_{\substack{\beta\in\{0,1\}^n\\ |\beta|=l}} \det B_A^\beta\Big)t^l{}_{|t=1} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{\substack{\beta\in\{0,1\}^n\\ |\beta|=l}} \det B_A^\beta$$

$$= \sum_{\substack{\beta \in \{0,1\}^n \\ |\beta| \le n}} \det B_A^\beta = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| \le n}} \det A_B^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| \le n}} a_b^\alpha$$

Speziell für $b = e$ und $a = x$

$$\prod_{i=1}^{n} (1+x_i) = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| \le n}} x_e^\alpha \quad \text{mit} \quad x_e^\alpha = \det X_E^\alpha \ , \ X := \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$$

und da

$$\det (X_E^\alpha) = \det \left[\operatorname{diag} (x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n})\right] = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

folgt die Behauptung.

<u>Folgerung VII.5 Abhängigkeiten der Eigenwerte von der Matrix</u>

Es sei

(1) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix

(2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte, d.h. die Nullstellen von $p_A(t) := \det(A - tE)$

Dann gilt für $l = 0, \ldots, n$

$$\boxed{\sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = l}} \lambda^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = l}} \det A^\alpha}$$

wobei

$$\lambda^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\alpha_i} = \det \Lambda^\alpha \qquad \Lambda := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$$A^\alpha = A_E^\alpha \quad \text{die } \alpha\text{-te Potenz von } A$$

Speziell erhält man für

$l=0$: $\boxed{1 = \det E}$ $\qquad$ $l=n$: $\boxed{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A}$

$l=1$: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Sp}(A)}$ $\qquad$ $l=n-1$: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \det A_i''}$

Beweis:

$$p_A(t) = \det(A-tE) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - t) \quad (\lambda_i \in \mathbb{C} \text{ und } \lambda_i = \lambda_j \text{ zugelassen})$$

Nach Folgerung VII.4 gilt:

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - t) = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| \le n}} \lambda^{\alpha}_{-te} = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| \le n}} \det \Lambda^{\alpha}_{-tE}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| \le n}} \det(-tE)^{e-\alpha}_{\Lambda} = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| \le n}} (-t)^{|e-\alpha|} \det E^{e-\alpha}_{\Lambda}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| \le n}} (-1)^{|e-\alpha|} \det \Lambda^{\alpha}_{E}\, t^{|e-\alpha|}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| \le n}} (-1)^{|e-\alpha|} \lambda^{\alpha}\, t^{|e-\alpha|}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = l}} (-1)^{|e-\alpha|} \lambda^{\alpha}\, t^{|e-\alpha|}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \Big(\sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = l}} \lambda^{\alpha}\Big)\, t^{n-l}$$

Andererseits war nach Folgerung VII.3

$$p_A(t) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l\, b_l\, t^l \quad \text{mit} \quad b_l = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-l}} \det A^{\alpha}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = l}} \lambda^{\alpha} = b_{n-l} = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = l}} \det A^{\alpha}$$

Der erste Teil ist somit gezeigt. Die Spezialfälle ergeben sich durch einsetzen von l.

$$\underline{l=0}: \sum_{|\alpha|=0} \det A^{\alpha} = \det A^{0} = \underline{\det E} = \sum_{|\alpha|=0} \lambda^{\alpha} = \lambda^{0} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{0} = \underline{1}$$

$$\underline{l=1:}\quad \sum_{|\alpha|=1} \det A^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \det A^{e_i} = \underline{Sp(A)} = \sum_{|\alpha|=1} \lambda^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^{e_i} = \underline{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

$$\underline{l=n-1:}\quad \sum_{|\alpha|=n-1} \det A^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=1} \det E_A^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \det E_A^{e_i} = \underline{\sum_{i=1}^{n} \det A_i''}$$

$$= \sum_{|\alpha|=n-1} \lambda^{\alpha} = \sum_{|\alpha|=1} e_{\lambda}^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} e_{\lambda}^{e_i} = \sum_{i=1}^{n} e_{\lambda}^{e_i} = \underline{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \lambda_j}$$

$$\underline{l=n:}\quad \sum_{|\alpha|=n} \det A^{\alpha} = \det A^{e} = \underline{\det A} = \sum_{|\alpha|=n} \lambda^{\alpha} = \lambda^{e} = \underline{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

<u>Folgerung VII.6 Das charakteristische Polynom einer gestörten Matrix</u>

Es seien

(1) $A, B, C \in R^{n \times n}$

(2) $p_{ABC}(s,t) := \det[A+sB+tC]$

Dann gilt

$$\boxed{p_{ABC}(s,t) = \sum_{l=0}^{n} p_l(s)\, t^l}$$

wobei

$$p_l(s) := \left(\sum_{\substack{k=0 \\ (\beta,\gamma) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \\ (|\beta|,|\gamma|) = (k,l) \\ \beta+\gamma \leq e}}^{l} \det {}_C B_A^{\beta-\gamma} \right) s^k$$

$${}_C B_A^{\alpha}\, e_j := \begin{cases} c_j & \alpha_j = -1 \\ a_j & \alpha_j = 0 \\ b_j & \alpha_j = 1 \end{cases} \qquad \text{die } j\text{-te Spalte von } {}_C B_A^{\alpha} \text{ für } \alpha \in \{-1,0,1\}^n$$

<u>Beweis:</u>

Setze $g(s,t) := p_{ABC}(s,t)$. Dann wird

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_2} g(s,t) = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\alpha_1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_2} \det[A+sB+tC] \right]$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\alpha_1} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}_0^n \\ |\gamma| = \alpha_2}} \binom{\alpha_2}{\gamma} \det D_t^{\gamma} [A+sB+tC]$$

$$= \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}_0^n \\ |\gamma| = \alpha_2}} \binom{\alpha_2}{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\alpha_1} \det D_t^{\gamma} [A+sB+tC]$$

$$= \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}_0^n \\ |\gamma| = \alpha_2}} \binom{\alpha_2}{\gamma} \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}_0^n \\ |\beta| = \alpha_1}} \binom{\alpha_1}{\beta} \det D_s^{\beta} D_t^{\gamma} [A+sB+tC]$$

$$= \sum_{\substack{(\beta,\gamma) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n \\ (|\beta|,|\gamma|) = \alpha}} \binom{\alpha_1}{\beta}\binom{\alpha_2}{\gamma} \det D_s^{\beta} \left[\dots \left| \begin{matrix} a_i+sb_i+tc_i & \gamma_i=0 \\ c_i & \gamma_i=1 \\ 0 & \gamma_i>1 \end{matrix} \right| \dots\right]$$

$$= \sum_{\substack{(\beta,\gamma) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n \\ (|\beta|,|\gamma|) = \alpha}} \binom{\alpha_1}{\beta}\binom{\alpha_2}{\gamma} \det \left[\dots \left| \begin{matrix} a_i+sb_i+tc_i & \gamma_i=0 \ , \ \beta_i=0 \\ b_i & \gamma_i=0 \ , \ \beta_i=1 \\ c_i & \gamma_i=1 \ , \ \beta_i=0 \\ 0 & \gamma_i=1 \ , \ \beta_i=1 \\ 0 & \gamma_i>1 \ \vee \ \beta_i>1 \end{matrix} \right| \dots\right]$$

$$= \sum_{\substack{(\beta,\gamma) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \\ (|\beta|,|\gamma|) = \alpha \\ \beta+\gamma \leq e}} \binom{\alpha_1}{\beta}\binom{\alpha_2}{\gamma} \det \left[\dots \left| \begin{matrix} a_i+sb_i+tc_i & (\beta-\gamma)(i)=0 \\ b_i & (\beta-\gamma)(i)=1 \\ c_i & (\beta-\gamma)(i)=-1 \end{matrix} \right| \dots\right]$$

Also folgt für $\quad D^{\alpha}_{(s,t)} := \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_2}$

$$D^{\alpha}_{(s,t)}\, g(0,0) = \sum_{(\beta,\gamma) \in M_{\alpha}} \binom{\alpha_1}{\beta}\binom{\alpha_2}{\gamma} \det \left[\dots \left| \begin{matrix} a_i & (\beta-\gamma)(i)=0 \\ b_i & (\beta-\gamma)(i)=1 \\ c_i & (\beta-\gamma)(i)=-1 \end{matrix} \right| \dots\right]$$

wobei

$$M_{\alpha} := \left\{(x,y) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n : (|x|,|y|) = \alpha \wedge x+y \leq e := \sum_{i=1}^{n} e_i\right\}$$

und $\qquad x+y \leq e \overset{d.}{\iff} \forall_i \; x_i+y_i \leq 1$

Für $(\beta,\gamma) \in M_{\alpha}$ wird $\binom{\alpha_1}{\beta}\binom{\alpha_2}{\gamma} = \frac{\alpha_1!}{1} \cdot \frac{\alpha_2!}{1} = \alpha_1! \cdot \alpha_2! =: \alpha!$

Wir erhalten daher $\quad D^{\alpha}_{(s,t)}\, g(0,0) = \sum_{(\beta,\gamma)\in M_\alpha} \alpha!\, \det_C B_A^{\beta-\gamma}$

Einsetzen in Taylerformel (vgl. z.B. Forster Analysis II)

$$g(s,t) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^2} \frac{D^{\alpha}_{(s,t)} g(0,0)}{\alpha!}(s,t)^{\alpha} \qquad (s,t)^{\alpha} := s^{\alpha_1}\, t^{\alpha_2}$$

liefert $\quad g(s,t) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^2} \sum_{(\beta,\gamma)\in M_\alpha} \det_C B_A^{\beta-\gamma}\, s^{\alpha_1}\, t^{\alpha_2}$

$$= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^2\\ |\alpha|\le n}} \sum_{(\beta,\gamma)\in M_\alpha} \det_C B_A^{\beta-\gamma}\, s^{\alpha_1}\, t^{\alpha_2}$$

Die letzte Gleichheit gilt weil

$$|\alpha| = |\beta|+|\gamma| = |\beta+\gamma| \le |e| = n \qquad \text{für} \qquad (\beta,\gamma)\in M_\alpha$$

und daher $\quad M_\alpha = \emptyset \quad$ für $\quad |\alpha| > n.$

Wir erhalten

$$g(s,t) = \sum_{\alpha_2=0}^{n} \sum_{\alpha_1=0}^{\alpha_2} \sum_{(\beta,\gamma)\in M_\alpha} \det_C B_A^{\beta-\gamma}\, s^{\alpha_1}\, t^{\alpha_2}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{l} \sum_{(\beta,\gamma)\in M_{(k,l)}} \det_C B_A^{\beta-\gamma}\, s^{k} \Big)\, t^{l}$$

Nach Definition von $M_{(k,l)}$ ist dies die Behauptung und Folgerung VII.6 ist bewiesen.

<u>Folgerung VII.7 Das spezielle charakteristische Polynom einer gestörten Matrix A+sB</u>

Es sei

(1) $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und $E = E_n$ die Einheitsmatrix

(2) $p_{AB}(s,t) := \det[A+sB-tE]$ das charakteristische Polynom der Matrix A+sB

Dann gilt:

(a) $$\boxed{p_{AB}(s,t) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \, p_l(s) \, t^l}$$

wobei $$\boxed{p_l(s) := \sum_{k=0}^{l} \sum_{\substack{(\beta,\gamma) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \\ (|\beta|,|\gamma|) = (k,l) \\ \beta+\gamma \leq e}} \det_E B_A^{\beta-\gamma}) \, s^k}$$

Speziell erhält man für $s=0$

(b) $$\boxed{p_{AB}(0,t) = \det(A-tE) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sum_{\substack{0,1 \\ =l}}{}^{n} \det E_A \, t^l}$$

das charakteristische Polynom der ungestörten Matrix.

<u>Beweis:</u>

(a) $p_{AB}(s,t) = p_{ABE}(s,-t)$ und die Behauptung folgt aus Folg. VII.6

(b) $$p_{AB}(0,t) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \Big(\sum_{\substack{(\beta,\gamma) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \\ (|\beta|,|\gamma|)=(0,l) \\ \beta+\gamma \leq e}} \det_E B_A^{\beta-\gamma}) \, t^l$$

Nun ist $|\beta|=0 \iff \beta=0$ also wirkt auch die Restriktion $\beta+\gamma = \gamma \leq e$ nicht mehr. Folglich wird

$$p_{AB}(0,t) = \det(A-tE) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^n \\ |\gamma|=l}} \det_E B_A^{-\gamma}) \, t^l$$

Da

$$E^{B_A^{-\gamma}} e_j = \begin{Bmatrix} e_j & -\gamma_j=-1 \\ a_j & -\gamma_j=0 \\ b_j & -\gamma_j=1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_j & \gamma_j=1 \\ a_j & \gamma_j=0 \\ b_j & \gamma_j=-1 \end{Bmatrix} \underset{\gamma \in \{0,1\}^n}{=} \begin{Bmatrix} e_j & \gamma_j=1 \\ a_j & \gamma_j=0 \end{Bmatrix} = E_A^{\gamma}$$

folgt

$$p_{AB}(o,t) = \det(A-tE) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^n \\ |\gamma|=l}} \det E_A^{\gamma}) \, t^l = p_A(t)$$

Wir erhalten die frühere Formel als Spezialfall v. Folg. VII.7.

Satz VII.8 Nullstellen algebraischer Funktionen

Es sei

(1) $f(x,y) = y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + p_1(x)y + p_0(x)$

mit Polynomen $p_1(x),\ldots,p_{n-1}(x)$

(2) $f(x,\cdot)$ besitze die Nullstellen $y_1(x),\ldots,y_n(x)$

(3) $f(0,\cdot)$ besitze die Nullstellen $y_1(0),\ldots,y_n(0)$

dann gilt:

(a) Ist $y_i(0)$ eine einfache Wurzel, dann gibt es ein $\delta_i>0$ und eine einfache Wurzel $y_i(x)$ von $f(x,\cdot)$ der Gestalt

$$y_i(x) = y_i(0) + \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}\, x^j$$

und die Potenzreihe konvergiert für $|x|<\delta_i$

(b) Ist $y_1(0)=\ldots=y_m(0)$ eine m-fache Wurzel von $f(0,\cdot)$, dann gibt es ein $\delta>0$, so daß $f(x,\cdot)$ exakt m Nullstellen für $|x|<\delta$ besitzt.

Diese haben die Eigenschaften

(α) Die m Wurzeln $y_1(x),\ldots,y_m(x)$ zerfallen in r Gruppen $m_1,\ldots,m_r$ mit $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$

(β) Die Wurzeln der i-ten Gruppe m_i besitzen eine Darstellung

$$y_i(z) = y_1(0) + \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}\, z^j$$

die zu den m_i verschiedenen Werten von $z := x^{\frac{1}{m_i}}$ gehören.

Zum Beweis: Vgl. Goursat E. 1933, Cours d'Analyse Mathématique, Band II (fünfte Ausgabe) Gouthier Villars, Paris.

Den Beweis des im folgenden lediglich benötigten Teils (a) findet man ebenfalls bei
Michael Reed / Barry Simon: Methods of Modern Mathematical Physics IV Analysis of Operators
Der zweite Teil wird dort jedoch lediglich zitiert. (Theoreme XII.1 und XII.2)

Satz VII.9 Stabilität einfacher Eigenwerte (Eigenwertwanderung)

Es sei

(1) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(2) $p_A(t) := \det(A - tE)$

(3) λ ein einfacher Eigenwert von A

[d.h. $p_A(\lambda) = 0$ und $p_A'(\lambda) \neq 0$]

(4) $p_{AB}(s,t) := \det(A + sB - tE) = p_{A+sB}(t)$

Dann besitzt für genügend kleines s $p_{AB}(s,\cdot)$ eine einfache Nullstelle $\lambda(s)$ und es gilt

$$\boxed{\lambda(s) = \lambda + ps + O(s^2)}$$

wobei

$$p = \frac{1}{p_A'(\lambda)} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \alpha_l \lambda^l$$

$$\alpha_l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^n \\ |\gamma| = l \\ \gamma(i) = 0}} \det_B E_A^{\gamma - e_i}$$

Beweis:

Wir wissen bereits

(1) $p_A(t) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l b_l t^l$, $b_l = \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^n \\ |\gamma| = l}} \det E_A^{\gamma}$ (Folg.VII.3)

(2) $p_{AB}(s,t) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l b_l(s) t^l$, $b_l(s) = b_l + \sum_{k=1}^{n} \alpha_l(k) s^k$ (Folg. VII.7)

mit $\quad \alpha_l(k) = \sum_{\substack{(\beta,\gamma)\in\{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \\ (|\beta|,|\gamma|) = (k,l) \\ \beta+\gamma \leq e}} \det_E B_A^{\beta-\gamma}$

(3) $p_{AB}(s,\cdot)$ besitzt eine einfache Nullstelle der Form $\binom{\text{Satz}}{\text{VII.8}}$

$$\lambda(s) = \lambda + \sum_{j=1}^{\infty} p(j)s^j \quad \text{konvergent für} \quad |s|<\delta \ , \ \delta>0$$

Definieren wir für eine Folge $a:\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Folge

$$(a*b)(k) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} a(k-l)b(l)$$

$$a_*^l(k) := (a_*^{l-1}*a)(k)$$

$$a_*^0(k) := \delta_0(k) = \begin{Bmatrix} 1 & k=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{Bmatrix} \quad \text{"}\delta \text{ Faltungseinheit"}$$

So gilt für zwei Potenzreihen im Konvergenzkreis

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l z^l\right) = \sum_{l=0}^{\infty} (a*b)(l)z^l$$

Setzen wir jetzt

$$\tilde{\alpha}_l(k) := \begin{cases} b_l & k=0 \\ \alpha_l(k) & k=1,\dots,n \\ 0 & k\in\mathbb{Z}-\{0,\dots n\} \end{cases} \quad \text{gemäß Formel aus (2)}$$

$$\tilde{p}(k) := \begin{cases} \lambda & k=0 \\ p(k) & k\in\mathbb{N} \\ 0 & k\in-\mathbb{N} \end{cases} \quad \text{gemäß Potenzreihe aus (3)}$$

und identifizieren im folgenden α_l und p mit den Fortsetzungen $\tilde{\alpha}_l$, $\tilde{p}$ so erhalten wir:

(I) $\quad b_l(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_l(k)s^k$

(II) $\quad \lambda(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)s^k$

(III) $\quad p_{AB}(s,\lambda(s)) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l b_l(s)(\lambda(s))^l = 0 \quad$ für alle s mit $|s|<\delta$

Setzen wir (I) und (II) in (III) ein und beachten unsere Faltungsregel so erhalten wir

$$0 = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_l * p_*^l)(k) s^k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l (\alpha_l * p_*^l)(k) s^k$$

für alle genügend kleinen s. Nach dem Identitätssatz von Potenzreihen (oder allgemeiner Laurentreihen) folgt

$$\text{(IV)} \qquad \boxed{\forall_{k \in \mathbb{Z}} \quad \sum_{l=0}^{n} (-1)^l (\alpha_l * p_*^l)(k) = 0}$$

<u>Beh. 1:</u> $\boxed{p_*^l(0) = \lambda^l \quad \text{für} \quad l \in \mathbb{N}_0}$

<u>Beweis:</u>

<u>l=0:</u> $p_*^0(0) \underset{\text{Def}}{=} \delta_0(0) = 1 = \lambda^0$

<u>l-1=>l:</u> $p_*^l(0) = (p_*^{l-1} * p)(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_*^{l-1}(k) p(0-k)$

$$\underset{(+)}{=} p_*^{l-1}(0) p(0) \underset{\text{IV}}{=} \lambda^{l-1} p(0) \underset{p(0)=\lambda}{=} \lambda^l \qquad \underline{\text{q.e.d.}}$$

Dabei gilt (+) weil $p_{l-\mathbb{N}} = 0$ und $p_{*\,l-\mathbb{N}}^{l-1} = 0$

<u>Beh. 2:</u> $\boxed{p_*^l(1) = \begin{cases} 0 & l=0 \\ l\lambda^{l-1} p(1) & l=1,\dots,n \end{cases}}$

<u>Beweis:</u>

<u>l=0:</u> $p_*^0(1) = \delta_0(1) = 0$

<u>l=1:</u> $p_*^1(1) = (\delta_0 * p)(1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_0(k) p(1-k) = p(1)$

diese Rechnung rechtfertigt die Bezeichnung δ_0 Faltungseinheit $\delta_0 * p = p$

Insbesondere gilt $p_*^1(1) = p(1) = 1 \cdot \lambda^0 p(1)$

l-1=>l: $p_*^l(1) = (p_*^{l-1} * p)(1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_*^{l-1}(k) p(1-k)$

$$= p_*^{l-1}(0) p(1) + p_*^{l-1}(1) p(0)$$

$$\underset{\text{IV}}{=} p_*^{l-1}(0) p(1) + (l-1)\lambda^{l-2} p(0) p(1)$$

$$\underset{\text{Beh. 1}}{=} \lambda^{l-1}\, p(1) + (l-1)\lambda^{l-2}\, p(0)p(1)$$

$$\underset{p(0)=\lambda}{=} \lambda^{l-1}\, p(1) + (l-1)\lambda^{l-1}\, p(1)$$

$$= l\lambda^{l-1}\, p(1)$$ <u>q.e.d.</u>

<u>Beh. 3:</u> $\boxed{(\alpha_l * p_*^l)(0) = b_l \lambda^l \qquad l=0,\dots,n}$

<u>Beweis:</u> $$(\alpha_l * p_*^l)(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_l(0-k)p_*^l(k) = \alpha_l(0)p_*^l(0)$$

$$\underset{\text{Beh. 1}}{=} \alpha_l(0)\lambda^l \underset{\alpha_l(0)=b_l}{=} b_l\lambda^l$$ <u>q.e.d.</u>

<u>Beh. 4:</u> $$\boxed{(\alpha_l * p_*^l)(1) = \begin{cases} \alpha_0(1) & l=0 \\ \lambda^l\alpha_l(1) + l\lambda^{l-1}\, p(1)b_l & l=1,\dots,n \end{cases}}$$

<u>Beweis:</u> $$(\alpha_l * p_*^l)(1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_*^l(k)\alpha_l(1-k) = p_*^l(0)\alpha_l(1) + p_*^l(1)\alpha_l(0)$$

$$\underset{\substack{\text{Beh. 1}\\ \alpha_l(0)=b_l}}{=} \lambda^l\alpha_l(1) + p_*^l(1)b_l$$

$$\underset{\text{Beh. 2}}{=} \begin{cases} \alpha_0(1) & l=0 \\ \lambda^l\alpha_l(1) + l\lambda^{l-1}p(1)b_l & l=1,\dots,n \end{cases}$$

Betrachten wir nun unsere Faltungsgleichung IV und setzen hierin $k=0$ so erhalten wir unsere Eigenwertgleichung für λ

$$0 = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l (\alpha_l * p_*^l)(0) \underset{\text{Beh. 3}}{=} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l\, b_l\lambda^l$$

also noch keine zusätzliche Information.

Setzen wir den Wert $k=1$ in IV ein, so erhalten wir

$$0 = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l (\alpha_l * p_*^l)(1)$$

$$\underset{\text{Beh. 4}}{=} \alpha_0(1) + \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \alpha_l(1)\lambda^l + \sum_{l=1}^{n} (-1)^l l\lambda^{l-1} p(1)b_l$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \alpha_l(1) \lambda^l + p(1) \sum_{l=1}^{n} (-1)^l \, b_l l \lambda^{l-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \alpha_l(1) \lambda^l + p(1) p_A'(\lambda)$$

Da λ ein einfacher Eigenwert war folgt $p_A'(\lambda) \neq 0$ und daher

$$p(1) = \frac{1}{p_A'(\lambda)} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+1} \alpha_l(1) \lambda^l$$

Nun setzen wir $\alpha_l := \alpha_l(1)$ und erhalten aus

$$\alpha_l(k) = \sum_{\substack{(\beta,\gamma) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \\ (|\beta|, |\gamma|) = (k,l) \\ \beta+\gamma \leq e}} \det {}_E B_A^{\beta-\gamma}$$

$$\alpha_l = \alpha_l(1) = \sum_{\substack{(\beta,\gamma) \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \\ (|\beta|, |\gamma|) = (1,l) \\ \beta+\gamma \leq e}} \det {}_E B_A^{\beta-\gamma}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^n \\ |\gamma|=l \\ |\gamma| \leq e-e_i}} \det {}_E B_A^{e_i-\gamma} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^n \\ |\gamma|=l \\ \gamma(i)=0}} \det {}_E B_A^{e_i-\gamma}$$

Nach Definition wird ${}_E B_A^{e_i-\gamma} = {}_B E_A^{\gamma-e_i}$ denn $\gamma(i) = 0$. Wir

erhalten mit $p := p(1) = \frac{1}{p_A'(\lambda)} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+1} \alpha_l \lambda^l$

wobei $\alpha_l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^n \\ |\gamma|=l \\ \gamma(i)=0}} \det {}_B E_A^{\gamma-e_i}$.

Da $\gamma(i)=0$ wird $\alpha_n=0$.

Weiter war $\lambda(s) = \lambda + \sum_{j=1}^{\infty} p(j) s^j = \lambda + ps + \sum_{j=2}^{\infty} p(j) s^j = \lambda + ps + \varphi(s)$ mit

$$\frac{1}{s^2} \varphi(s) = \frac{1}{s^2} \sum_{j=2}^{\infty} p(j) s^j = \frac{1}{s^2} \sum_{j=0}^{\infty} p(j+2) s^{j+2} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j+2) s^j \xrightarrow[s \to 0]{} p(2)$$

Der Satz ist somit bewiesen.

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ besitzt die einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = a$ und $\lambda_2 = b$ $(a \neq b)$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Störmatrix

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^2 \\ |\gamma| = 0 \\ \gamma(i)=0}} \det_B E_A^{\gamma - e_i} = \sum_{i=1}^{2} \det_B E_A^{-e_i} = \det[b_1 | a_2] + \det[a_1 | b_2]$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & c \\ 1 & b \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -c$$

$$\alpha_1 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^2 \\ |\gamma| = 1 \\ \gamma(i)=0}} \det_B E_A^{\gamma - e_i} = \det_B E_A^{e_2 - e_1} + \det_B E_A^{e_1 - e_2}$$

$$= \det_B E_A^{(-1,1)} + \det_B E_A^{(1,-1)} = \det[b_1 | e_2] + \det[e_1 | b_2]$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$p_A'(t) = \frac{d}{dt}\left[t^2 - Sp(A)t + \det A\right] = 2t - SpA$$

$$p_A'(\lambda_1) = 2\lambda_1 - SpA = 2a-(a+b) = 2a-a-b = a-b$$

$$p_A'(\lambda_2) = 2\lambda_2 - SpA = 2b-(a+b) = 2b-a-b = b-a$$

Also wird (unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung als 1 in s)

$$\lambda_1(s) - \lambda_1 = s \frac{1}{p_A'(\lambda_1)} (-\alpha_0 \lambda_1^0 + \alpha_1 \lambda_1) = s \cdot \frac{-\alpha_0}{p_A'(\lambda_1)} = \frac{cs}{a-b}$$

$$\lambda_2(s) - \lambda_2 = \frac{s}{p_A'(\lambda_2)} (-\alpha_0 \lambda_2^0 + \alpha_1 \lambda_2) = s \cdot \frac{-\alpha_0}{p_A'(\lambda_2)} = \frac{cs}{b-a}$$

und somit wird

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(s) \\ \lambda_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \pm \frac{cs}{a-b} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(s^2)$$

In diesem einfachen Spezialfall können wir die Taylorentwicklung direkt berechnen und erhalten mit

$$\det(A+sB-tE) = \det\begin{pmatrix} a-t & c \\ s & b-t \end{pmatrix} = (ab-sc)-(a+b)t+t^2$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2}(s) = t_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(ab-sc)} = \frac{1}{2}\left[(a+b)\pm\sqrt{a^2+2ab+b^2-4ab-4sc}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a+b)\pm(a^2-2ab+b^2-4sc)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\left[(a+b)\pm\sqrt{(a-b)^2-4sc}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a+b)\pm|a-b|\sqrt{1-\frac{4c}{(a-b)^2}\,s}\right]$$

Mit $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$ wird

$$\lambda_{1,2}(s) = \frac{1}{2}\left[(a+b) \pm |a-b|\left(1 + 2\,\frac{cs}{(a-b)^2} + O(s^2)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a+b) \pm |a-b| \pm 2\,\frac{cs}{a-b} + O(s^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a+b) \pm |a-b|\right] \pm \frac{cs}{a-b} + O(s^2)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{cases} a+b \pm (a-b) \pm \frac{2cs}{a-b} + O(s^2) & \Leftrightarrow a > b \\ a+b \mp (b-a) \mp \frac{2cs}{a-b} + O(s^2) & \Leftrightarrow a < b \end{cases}$$

Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(s) \\ \lambda_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} \pm \frac{cs}{a-b}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(s^2) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pm \frac{cs}{a-b}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(s^2) \quad \text{falls } a > b$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(s) \\ \lambda_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} \mp \frac{cs}{a-b}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(s^2) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mp \frac{cs}{a-b}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(s^2) \quad \text{falls } a < b$$

Es ergeben sich die gleichen Formeln die wir durch Anwendung unseres Satzes erhalten.

Einfluß bei leichtem Wackeln am (i,j)-ten Element von A

Wenden wir Satz VII.9 auf $B=e_i e_j^t$ an, so erhalten wir

$$\alpha_1^{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma\in\{0,1\}^n \\ |\gamma|=1,\ \gamma(k)=0}} \det {}_B E_A^{\gamma-e_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma\in\{0,1\}^n \\ |\gamma|=1,\ \gamma(k)=0}} \det \left[\cdots \left| \begin{matrix} e_r & \gamma(r)=1 \\ a_r & \gamma(r)=0 \end{matrix} \right| \cdots \left| b_k \right| \cdots \right]$$

Mit $b_k = Be_k = e_i e_j^t e_k = e_i \delta_{jk}$ ist in der ersten Summe k auf j zu setzen. Somit ergibt sich

$$\alpha_1^{ij} = \sum_{\substack{\gamma\in\{0,1\}^n \\ |\gamma|=1,\ \gamma(j)=0}} \det \left[\cdots \left| \begin{matrix} e_r & \gamma(r)=1 \\ a_r & \gamma(r)=0 \end{matrix} \right| \cdots \left| e_i^j \right| \cdots \right]$$

wobei e_i^j wieder wie üblich bedeutet e_i steht in der j-ten Spalte der Matrix. Wenden wir den Laplace'schen Entwicklungssatz auf die j-te Spalte an, so folgt

$$\alpha_1^{ij} = \sum_{\substack{\gamma\in\{0,1\}^n \\ |\gamma|=1,\ \gamma(j)=0}} (-1)^{i+j} \det \left[\cdots \left| \begin{matrix} e_r & \gamma(r)=1 \\ a_r & \gamma(r)=0 \end{matrix} \right| \cdots \left| e_i^j \right| \cdots \right]'_{ij}$$

Die j-te Spalte der obigen Matrizen spielt jetzt keine Rolle mehr, denn sie wird weggestrichen, d.h.

$$\det \left[\cdots \left| \begin{matrix} e_r & (r)=1 \\ a_r & (r)=0 \end{matrix} \right| \cdots \left| e_i^j \right| \cdots \right]'_{ij} = \det \left[\cdots \left| \begin{matrix} e_r & \gamma(r)=1 \\ a_r & \gamma(r)=0 \end{matrix} \right| \cdots \left| e_j \right| \cdots \right]'_{ij}$$

und dies entspricht der Wahl von $\gamma(j)=1$. Daraus folgt

$$\alpha_1^{ij} = (-1)^{i+j} \sum_{\substack{\gamma\in\{0,1\}^n \\ |\gamma|=l+1,\ \gamma(j)=1}} \det(E_A)'_{ij} \underset{\gamma':=e-\gamma}{=} (-1)^{i+j} \sum_{\substack{\gamma'\in\{0,1\}^n \\ |\gamma'|=n-l-1 \\ \gamma'(j)=0}} \det(A_E^{\gamma'})'_{ij}$$

Führen wir die Matrix $A_{ij}^{\alpha} := (A^{\alpha})'_{ij}$ ein, so erhalten wir

$$\alpha_l^{ij} = (-1)^{i+j} \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-l-1 \\ \alpha(j)=0}} \det A_{ij}$$

Aus Satz VII.9 folgt dann:

$$\lambda(s) = \lambda + p^{ij}s + O(s^2) \qquad p^{ij} = \frac{1}{p_A'(\lambda)} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \alpha_l^{ij} \lambda^l$$

für einfache Eigenwerte λ und genügend kleines s. Betrachten wir

$$\frac{\lambda(s)-\lambda}{s} = p^{ij} + O(s^2) \xrightarrow[s \to 0]{} p^{ij}$$

Es war $\lambda(s) = (A+se_ie_j^t)$ mit $\lambda = \lambda(A)$. Wir können daher den Quotienten

$$\frac{\lambda(s)-\lambda}{s} = \frac{\lambda(A+se_ie_i^t)-\lambda(A)}{s} \xrightarrow[s \to 0]{} p^{ij} = \frac{1}{p_A'(\lambda)} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \alpha_l^{ij} \lambda^l$$

als partielle Ableitung $\frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}}$ interpretieren. Führen wir die Matrix

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} := \left(\frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}}\right)_{ij=1,\dots,n}$$ ein, so erhalten wir

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \lambda}{\partial A} = \displaystyle\sum_{l=0}^{n-1} c_l(A,\lambda) A_l \quad \text{mit} \quad c_l(A,\lambda) := \frac{(-1)^{l+1}\lambda^l}{p_A'(\lambda)} \\ \text{und} \quad A_l := (\alpha_l^{ij})_{ij=1,\dots,n}, \quad \alpha_l^{ij} = (-1)^{i+j} \displaystyle\sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-l-1 \\ \alpha(j)=0}} \det A_{ij} \end{array}}$$

Dieses Ergebnis werden wir noch auf einem anderen Weg herleiten und dabei die Matrizen A_l noch anders interpretieren können.

Satz VII.10 Stabilität einfacher Eigenwerte

Es sei

(1) $A \in R^{n \times n}$ eine Matrix

(2) $p_A(t) := \det(A-tE) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l b_l t^l$ ihr charakteristisches Polynom

(3) λ ein einfacher Eigenwert von A (d.h. $p_A'(\lambda) \neq 0$)

(4) $\frac{\partial \lambda}{\partial A}(i,j) := \frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}}$ $\qquad \frac{\partial b_l}{\partial A}(i,j) := \frac{\partial b_l}{\partial a_{ij}}$

Dann gilt
$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = \sum_{l=0}^{n-1} c_l(A,\lambda) A_l$$

wobei
$$C_l(A,\lambda) = \frac{(-1)^{l+1}\lambda^l}{p_A'(\lambda)}$$

$$A_l(i,j) = (-1)^{i+j} \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-l-1 \\ \alpha(j)=0}} \det A_{ij}^{\alpha} = \frac{\partial b_l}{\partial A}(i,j) = \frac{\partial b_l}{\partial a_{ij}}$$

$$A_{ij}^{\alpha} := (A^{\alpha})'_{ij} \qquad p_A'(\lambda) = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1}(l+1) b_{l+1} \lambda^l$$

Beweis:

Folgerung VII.7 gekoppelt mit Satz VII.8 sagt uns, daß die Eigenwerte lokal differenzierbar von der Matrix abhängen. Wir setzen voraus, daß λ ein einfacher Eigenwert ist und erhalten:

$$p_A(\lambda) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l b_l \lambda^l = 0 \qquad \text{mit} \qquad b_l = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-l}} \det A^{\alpha}$$

Differenzieren nach a_{ij} liefert:

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_{ij}}(p_A(\lambda)) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{\partial b_l}{\partial a_{ij}} \lambda^l + \sum_{l=0}^{n} (-1)^l b_l l \lambda^{l-1} \frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}}$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l A_l(i,j) \lambda^l + \left(\sum_{l=1}^{n} (-1)^l b_l l \lambda^{l-1} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial A}(i,j)$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l A_l(i,j)\lambda^l + \left(\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1}(l+1)b_{l+1}\lambda^l \right) \frac{\partial\lambda}{\partial A}(i,j)$$

$$= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l A_l(i,j)\lambda^l + p_A'(\lambda) \frac{\partial\lambda}{\partial A}(i,j)$$

Nun ist nach Voraussetzung $p_A'(\lambda) \neq 0$ also erhalten wir

$$\frac{\partial\lambda}{\partial A}(i,j) = \frac{1}{p_A'(\lambda)} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+1} A_l(i,j)\lambda^l = \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{l+1}\lambda^l}{p_A'(\lambda)} A_l(i,j)$$

Mit $A_l = \frac{\partial b_l}{\partial A}$ und $b_n = \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1\}^n \\ |\alpha|=0}} \det A = \det A^0 = \det E = 1$

wird $A_n = 0$ und wir erhalten

$$\frac{\partial\lambda}{\partial A} = \sum_{l=0}^{n-1} c_l(A,\lambda)A_l$$

Zum vollständigen Beweis ist lediglich die Ableitung $\frac{\partial b_l}{\partial A} = A_l$ zu berechnen.

Es war:

$$b_l = \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1\}^n \\ |\alpha|=n-l}} \det A = \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1\}^n \\ |\alpha|=n-l}} \det\left[a_1^{\alpha_1} \middle| \cdots \middle| a_n^{\alpha_n}\right]$$

wobei

$$a_k^{\alpha_k} := \begin{Bmatrix} a_k & \alpha_k=1 \\ e_k & \alpha_k=0 \end{Bmatrix}$$

Ist jetzt $\alpha_j=0$ so kommt die Spalte a_j in b_l gar nicht vor. Deshalb wird

$$\frac{\partial b_l}{\partial a_{ij}} = \sum_{\substack{\alpha\in\{0,1\}^n \\ |\alpha|=n-l \\ \alpha(j)=1}} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det\left[a_1^{\alpha_1} \middle| \cdots \middle| \sum_{r=1}^{n} a_{rj}\, e_r^j \middle| \cdots \middle| a_n^{\alpha_n}\right]$$

e_r^j bedeutet: e_r steht in j-ter Spalte

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-1 \\ \alpha(j)=1}} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial a_{rj}}{\partial a_{ij}} \det \left[a_1^{\alpha_1} \middle| \dots \middle| e_r^j \middle| \dots \middle| a_n^{\alpha_n} \right]$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-1 \\ \alpha(j)=1}} \sum_{r=1}^{n} \delta_{ir} \det \left[a_1^{\alpha_1} \middle| \dots \middle| e_r^j \middle| \dots \middle| a_n^{\alpha_n} \right]$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-1 \\ \alpha(j)=1}} \det \left[a_1^{\alpha_1} \middle| \dots \middle| e_i^j \middle| \dots \middle| a_n^{\alpha_n} \right]$$

$$\underset{\text{Laplace}}{\overset{=}{\uparrow}} \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-1 \\ \alpha(j)=1}} (-1)^{i+j} \det \left[a_1^{\alpha_1} \middle| \dots \middle| e_j \middle| \dots \middle| a_n^{\alpha_n} \right]'_{ij}$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-1-1 \\ \alpha(j)=0}} (-1)^{i+j} \det \left[a_1^{\alpha_1} \middle| \dots \middle| a_j^{\alpha_j} \middle| \dots \middle| a_n^{\alpha_n} \right]'_{ij}$$

Die letzte Gleichheit gilt da es in der Matrix auf die j-te Spalte (also auf (j)) nicht mehr ankommt. (Wir haben aus α eine 1 entfernt und durch eine 0 ersetzt)

Es wird daher

$$\frac{\partial b_1}{\partial a_{ij}} = \sum_{\substack{\alpha \in \{0,1\}^n \\ |\alpha| = n-1-1 \\ \alpha(j)=0}} (-1)^{i+j} \det A_{ij}^{\alpha} = A_1$$

und der Satz ist bewiesen.

Folg VII.11 Stabilität kleiner und großer Eigenwerte

Für einfache Eigenwerte gilt die Asymptotik

$$(1) \quad \frac{\partial\lambda}{\partial A} = \frac{\det A(A^{-1})^t}{\sum_{i=1}^{n} \det A_i''} \qquad \text{für } \lambda \longrightarrow 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial\lambda}{\partial A} = \frac{1}{n} E_n \qquad \text{für } \lambda \longrightarrow \infty$$

Dabei ist $\left[\det A(A^{-1})^t\right](k,l) := (-1)^{k+l} \det A'_{kl}$ und falls A invertierbar ist folgt $\left[\det A(A^{-1})^t\right](k,l) = \det A \cdot (A^{-1})^t(k,l)$

Beweis:

(1) Es gilt $\frac{\partial\lambda}{\partial A} = \sum_{l=0}^{n-1} c_l(A,\lambda) \frac{\partial b_l}{\partial A}$. Lassen wir $\lambda \longrightarrow 0$ streben so erhalten wir

$$\frac{\partial\lambda}{\partial A} = \sum_{l=0}^{n-1} c_l(A,0) \frac{\partial b_l}{\partial A}$$

Nun war $c_l(A,0) = \frac{(-1)^{l+1} 0^l}{p_A'(0)} = -\frac{1}{p_A'(0)} \delta_{l0}$ und es folgt

$$\frac{\partial\lambda}{\partial A} = -\frac{1}{p_A'(0)} \frac{\partial b_0}{\partial A}$$

Mit $p_A'(0) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{l=0}^{n} (-1)^l b_l t^l\right]_{t=0} = -b_1$ gilt: $\frac{\partial\lambda}{\partial A} = \frac{1}{b_1} \frac{\partial b_0}{\partial A}$

Weiter war $b_0 = \det A$.

Mit
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det A &= \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \det\left[a_1 | \dots | a_j | \dots | a_n\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_l a_{lj} \det\left[a_1 | \dots | e_l^j | \dots | a_n\right] \\
&= \sum_l \delta_{il} \det\left[a_1 | \dots | e_l^j | \dots | a_n\right] \\
&= \det\left[a_1 | \dots | e_i^j | \dots | a_n\right] = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}
\end{aligned}$$

$$= \det A \; A^{-1}(j,i) = \det A (A^{-1})^t(i,j)$$

wird $\boxed{\frac{\partial}{\partial A^t} \det A = (\det A) A^{-1}}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial A^t} \det A := \left(\frac{\partial}{\partial A} \det A\right)^t$

und wir erhalten

$$\frac{\partial \lambda}{\partial A} = \frac{1}{b_1} \det A (A^{-1})^t$$

Setzen wir $b_1 = \sum_{i=1}^{n} \det A_i''$ ein so folgt die erste Behauptung.

(2) Betrachten wir nun $c_l(A,\lambda)$ im Grenzwert $\lambda \longrightarrow \infty$

$$c_l(A,\lambda) = \frac{(-1)^{l+1}\lambda^l}{p_A'(\lambda)}$$

ist $l < n-1$ so folgt $c_l(A,\lambda) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$

ist $l = n-1$ so kann man den unbestimmten Ausdruck

$\lim\limits_{\lambda \to \infty} c_l(A,\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \frac{(-1)^n \lambda^{n-1}}{p_A'(\lambda)}$ etwa nach der Regel von L'Hopital auswerten und erhält:

$$c_l(A,\lambda) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} \begin{cases} 0 & l<n-1 \\ \frac{1}{n} & l=n-1 \end{cases}$$

Damit wird im Grenzwert $\lambda \longrightarrow \infty$

$\lim\limits_{\lambda \to \infty} \frac{\partial \lambda}{\partial A} = \frac{1}{n} \frac{\partial b_{n-1}}{\partial A}$. Nun war $b_{n-1} = \mathrm{Sp}A$ also wird $\frac{\partial b_{n-1}}{\partial A} = E_n$

und der Satz ist bewiesen.

<u>Wir erkennen:</u>

Kleine Eigenwerte sind sehr empfindlich gegenüber kleinen Störungen der Matrix. Große Eigenwerte sind relativ unempfindlich gegenüber Störungen, sie hängen lediglich von den Elementen der Diagonalen (genauer von der Spur) ab.

Folg VII.12 Wanderung eines einfachen Eigenwertes 0

Es sei $\lambda = 0$ ein einfacher Eigenwert der Matrix $A \in R^{n \times n}$ und $A(s) = A + sB$ die gestörte Matrix. Dann gilt für den gestörten Eigenwert $\lambda(s)$ von $A(s)$

$$\lambda(s) = \frac{\mathrm{Sp}\, B \cdot (\det A A^{-1})}{\sum_{i=1}^{n} \det A_i''} s + O(s^2)$$

Für kleine Eigenwerte $\bar{\lambda} \approx 0, s \approx 0$ kann man daher folgende Näherung verwenden

$$\lambda(s) \approx \bar{\lambda} + \frac{\mathrm{Sp}\, B \cdot (\det A A^{-1})}{\sum_{i=1}^{n} \det A_i''} s$$

Beweis:

Wir wollen dieses Resultat auf zwei Arten beweisen.

(1) Verwendung von Satz VII.9 liefert:

$$\lambda(s) = \lambda + p(\lambda) s + O(s^2) \qquad p(\lambda) = \frac{1}{p_A'(\lambda)} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \alpha_l \lambda^l$$

mit $\lambda \longrightarrow 0$ folgt

$$\lambda(s) = p(0) s + O(s^2) \qquad p(0) = \frac{1}{p_A'(0)} (-\alpha_0) = \frac{-\alpha_0}{p_A'(0)} = \frac{-\alpha_0}{-b_1} = \frac{\alpha_0}{b_1}$$

Wir erhalten

$$\lambda(s) = \frac{\alpha_0}{b_1} s + O(s^2)$$

Es war $b_1 = \sum_{i=1}^{n} \det A_i''$ und $\alpha_0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\gamma \in \{0,1\}^n \\ |\gamma| = 0, \gamma(i) = 0}} \det_B E_A^{\gamma - e_i}$

Rechnen wir α_0 aus so ergibt sich

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^{n} \det_B E_A^{-e_i} = \sum_{i=1}^{n} \det \left[a_1 | \dots | a_{i-1} | b_i | a_{i+1} | \dots | a_n \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ji} \det \left[a_1 | \dots | b_i | \dots | a_n \right]'_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \; b_{ji} \; \det[a_1|\ldots|a_i|\ldots|a_n]'_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \; b_{ji} \; \det A'_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ji} (\det A A^{-1})(i,j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (B \det A A^{-1})(j,j) = Sp(B \det A A^{-1})$$

Damit erhalten wir

$$\lambda(s) = \frac{Sp(B \cdot (\det A) A^{-1})}{\sum_{i=1}^{n} \det A''_i} s + O(s^2)$$

(2) Eine zweite Möglichkeit folgt über die Formel des totalen Differentials unter Verwendung von Folgerung VII.11.

$$d\lambda = \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial a_{ij}} da_{ij} = \sum_{ij=1}^{n} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial A}\right)(i,j)(dA)(i,j)$$

$$= \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial A^t} (j,i) dA(i,j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial A^t} dA\right)(j,j) = Sp\left(\frac{\partial \lambda}{\partial A^t} dA\right)$$

$$\boxed{d\lambda = Sp\left(\frac{\partial \lambda}{\partial A^t} dA\right)}$$ <u>totales Differential</u>

Setzen wir hierin $\frac{\partial \lambda}{\partial A^t} = \frac{\det A \; A^{-1}}{\sum_{i=1}^{n} \det A''_i}$ (Asymptotik in 0)

und $dA = sB$

so erhalten wir

$$d\lambda = Sp\left[\frac{\det A \; A^{-1}}{\sum_{i=1}^{n} \det A''_i} sB\right] = \frac{Sp[(\det A \; A^{-1})B]}{\sum_{i=1}^{n} \det A''_i} s$$

$$= \frac{Sp[B(\det A \; A^{-1})]}{\sum_{i=1}^{n} \det A''_i} s \qquad (\text{Beachte } Sp(A \cdot B) = Sp(B \cdot A))$$

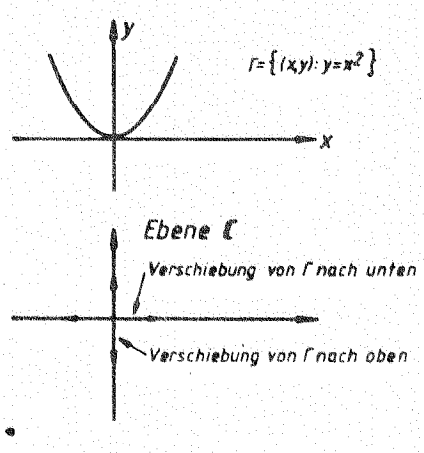
und es ergibt sich

$$\lambda(s) = \lambda + d\lambda = d\lambda = \frac{Sp \; B(\det A \; A^{-1})}{\sum_{i=1}^{n} \det A''_i} s$$ <u>q.e.d.</u>

Wir haben mit Folg VII.12 die Eigenwertwanderung durch eine verblüffend einfache Formel im Fall kleiner Eigenwerte und kleiner Störungen leidlich gut in den Griff bekommen. Das Dilemma ist:

"Wir haben keinerlei Wissen über den s-Bereich".

Weiterhin haben wir uns beschränkt auf den Fall einfacher Eigenwerte. Bei doppelten Eigenwerten darf man keine solch expliziten Formeln erwarten, da sich diese schon bei äußerst geringen Störungen in zwei einzelne Eigenwerte aufspalten können. Das heißt in diesem Fall ist $\lambda(A)$ mehrdeutig. Hierzu betrachte etwa die Nullstellen des quadratischen Polynoms $y = x^2$.



Die doppelte Nullstelle verzweigt schon bei der geringsten Störung (Verschiebung der Kurve Γ)

Wir wollen jetzt die dualen Sätze von Poincaré, Fischer und Courant benutzen um ganz explizite Abschätzungen im Fall hermitescher Matrizen anzugeben.

<u>Satz VII.13 Störung hermite'scher Matrizen (1)</u>

Es seien

(1) $A,B,C \quad C^{n\times n}$ hermitesch mit den Eigenwerten

$\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$ zu A

$\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$ zu B

$\gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_n$ zu C

(2) $C = A+B$

Dann gilt für alle sinnvollen Indizes $i,j \in \{1,\dots,n\}$ die

Eigenwerteinschließung

$$\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j \leq \gamma_{i+j-n}$$

und insbesondere

$$|\gamma_i - \alpha_i| \leq \|B\| := \sup_{\|x\|_2=1} \langle x,Bx\rangle$$

<u>Beweis:</u>

Es seien $\{a_1,\ldots,a_n\}$, $\{b_1,\ldots,b_n\}$, $\{c_1,\ldots,c_n\}$ die zugehörigen ONB, dann wissen wir aus dem Satz von Poincaré und Fischer (IV.5)

$$(1)\ \alpha_i+\beta_j = \min_{\substack{H_{i-1}\subseteq H\\ \dim H_{i-1}=i-1}} \max_{\substack{x\in H_{i-1}^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle + \min_{\substack{H_{j-1}\subseteq H\\ \dim H_{j-1}=j-1}} \max_{\substack{x\in H_{j-1}^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Bx\rangle$$

$$= \max_{\substack{x\in [a_1,\ldots,a_{i-1}]^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle + \max_{\substack{x\in [b_1,\ldots,b_{j-1}]^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Bx\rangle$$

Nun ist

$$[a_1,\ldots,a_{i-1}] \subseteq [a_1,\ldots,a_{i-1},b_1,\ldots,b_{j-1}] =: W_{ij}$$

$$[b_1,\ldots,b_{j-1}] \subseteq [a_1,\ldots,a_{i-1},b_1,\ldots,b_{j-1}] =: W_{ij}$$

Also

$$[a_1,\ldots,a_{i-1}]^{\perp} \supseteq W_{ij}^{\perp}$$

$$[b_1,\ldots,b_{j-1}] \supseteq W_{ij}^{\perp}$$

Daher folgt

$$\alpha_i + \beta_j \geq \max_{\substack{x\in W_{ij}^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle + \max_{\substack{x\in W_{ij}^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Bx\rangle$$

$$\geq \max_{\substack{x\in W_{ij}^{\perp}\\ \|x\|=1}} (\langle x,Ax\rangle + \langle x,Bx\rangle)$$

$$= \max_{\substack{x\in W_{ij}^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Cx\rangle$$

Nun ist $W_{ij} := [a_1,\dots,a_{i-1},b_1,\dots,b_{j-1}] \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Unterraum mit $\dim W_{ij} \leq i+j-2$. Ergänzen wir W_{ij} zu einem Unterraum C_{ij} mit $C_{ij} \supseteq W_{ij}$ und $\dim C_{ij} = i+j-2$ so erhalten wir

$$\alpha_i+\beta_j \geq \max_{\substack{x\in W_{ij}^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Cx\rangle \underset{C_{ij}^{\perp}\subseteq W_{ij}^{\perp}}{\geq} \max_{\substack{x\in C_{ij}^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Cx\rangle$$

$$\geq \min_{\substack{H_{i+j-2}\subseteq H\\ \dim H_{i+j-2}=i+j-2}} \max_{\substack{x\in H_{i+j-2}^{\perp}\\ \|x\|=1}} \langle x,Cx\rangle = \gamma_{i+j-1}$$

Damit ist die erste Ungleichung $\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i+\beta_j$ gezeigt.

(2) Zum Beweis der umgekehrten Gleichung betrachten wir das duale Lemma von Courant (IV.6) und erhalten

$$\alpha_i+\beta_j = \max_{\substack{H_i\subseteq H\\ \dim H_i=i}} \min_{\substack{x\in H_i\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle + \max_{\substack{H_j\subseteq H\\ \dim H_j=j}} \min_{\substack{x\in H_j\\ \|x\|=1}} \langle x,Bx\rangle$$

$$= \min_{\substack{x\in[a_1,\dots,a_i]\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle + \min_{\substack{x\in[b_1,\dots,b_j]\\ \|x\|=1}} \langle x,Bx\rangle$$

$$\leq \min_{\substack{x\in[a_1,\dots,a_i]\cap[b_1,\dots,b_j]\\ \|x\|=1}} \langle x,Ax\rangle + \min_{\substack{x\in[a_1,\dots,a_i]\cap[b_1,\dots,b_j]\\ \|x\|=1}} \langle x,Bx\rangle$$

$$\leq \min_{\substack{x\in\overline{W}_{ij}\\ \|x\|=1}} (\langle x,Ax\rangle + \langle x,Bx\rangle) = \min_{\substack{x\in\overline{W}_{ij}\\ \|x\|=1}} \langle x,Cx\rangle$$

wobei $\overline{W}_{ij} := [a_1,\dots,a_i]\cap[b_1,\dots,b_j] \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Unterraum der Dimension $\geq i+j-n$. Die Dimensionsabschätzung folgt aus der Dimensionsformel (vgl. Fischer: Lineare Algebra)

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim (U\cap V)$$

für beliebige Unterräume U,V eines Vektorraumes W (endlich-dimensional).

Mit $U = [a_1,\dots,a_i]$, $V = [b_1,\dots,b_j]$ und $W = \mathbb{C}^n$ wird

$$\dim(U \cap V) = i+j-\dim(U+V) \geq i+j-n$$

Wählen wir einen Unterraum $\overline{C}_{ij} \subseteq \overline{W}_{ij}$ mit $\dim \overline{C}_{ij} = i+j-n$ so folgt:

$$\alpha_i+\beta_j \leq \min_{\substack{x \in \overline{W}_{ij} \\ \|x\|=1}} \langle x, Cx \rangle \leq \min_{\substack{x \in \overline{C}_{ij} \\ \|x\|=1}} \langle x, Cx \rangle$$

$$\leq \max_{\substack{H_{i+j-n} \subseteq H \\ \dim H_{i+j-n} = i+j-n}} \min_{\substack{x \in H_{i+j-n} \\ \|x\|=1}} \langle x, Cx \rangle = \gamma_{i+j-n}$$

Damit haben wir die zweite Ungleichung

$$\alpha_i+\beta_j \leq \gamma_{i+j-n}$$

Der erste Teil des Satzes ist somit gezeigt.

Setzen wir in der Ungleichung $\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i+\beta_j$ speziell den Wert $j=1$ ein, dann erhalten wir $\gamma_i \leq \alpha_i+\beta_1$ und somit $\gamma_i-\alpha_i \leq \beta_1$. Umgekehrt folgt aus $\alpha_i+\beta_j \leq \gamma_{i+j-n}$ für $j=n$ die Ungleichung $\alpha_i+\beta_n \leq \gamma_i$ und daher $\beta_n \leq \gamma_i-\alpha_i$. Zusammen erhalten wir

$$\beta_n \leq \gamma_i-\alpha_i \leq \beta_1$$

Daher folgt

$$|\gamma_i-\alpha_i| \leq \max\{|\beta| : \beta \text{ Eigenwert von } B\} = \|B\|$$

Der Satz ist daher bewiesen.

Wenden wir die Duale Zange in etwas modifizierter Form an so erhalten wir den folgenden

Satz VII.14 Störung hermite'scher Matrizen (2)

Es seien

(1) A,B,C hermitesch mit den Eigenwerten

$\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$ zu A

$\gamma_1 \geq \ldots \geq \gamma_n$ zu C := A+B

(2) $\{a_1,\ldots,a_n\}$ eine zugehörige ONB aus Eigenvektoren von A

(3) $A_i := [a_1 | \dots | a_i] \in \mathbb{C}^{n \times i}$

(4) $\tilde{A}_i := [a_i | \dots | a_n] \in \mathbb{C}^{n \times (n+1-i)}$

Dann gilt:

$$\boxed{\lambda_{min}(A_i^* B A_i) \leq \gamma_i - \alpha_i \leq \lambda_{max}(\tilde{A}_i^* B \tilde{A}_i)}$$

<u>Beweis:</u>

Es gilt

$$\max_{\substack{H_i \subseteq H \\ \dim H_i = i}} \min_{\substack{x \in H_i \\ \|x\|=1}} \langle x, Cx \rangle = \gamma_i = \min_{\substack{H_{i-1} \subseteq H \\ \dim H_{i-1} = i-1}} \max_{\substack{x \in H_{i-1}^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Cx \rangle$$

Wähle speziell $H_i = \hat{H}_i$, $H_{i-1} = \hat{H}_{i-1}$ mit $\hat{H}_k := [a_1, \dots, a_k]$ $k=1,\dots,n$

Dann folgt

$$\min_{\substack{x \in \hat{H}_i \\ \|x\|=1}} \langle x, Cx \rangle \leq \gamma_i \leq \max_{\substack{x \in \hat{H}_{i-1}^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Cx \rangle$$

$$\Rightarrow \min_{\substack{x \in \hat{H}_i \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax \rangle + \min_{\substack{x \in \hat{H}_i \\ \|x\|=1}} \langle x, Bx \rangle \leq \gamma_i \leq \max_{\substack{x \in \hat{H}_{i-1}^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Ax \rangle + \max_{\substack{x \in \hat{H}_{i-1}^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Bx \rangle$$

$$\Rightarrow \alpha_i + \min_{\substack{x \in \hat{H}_i \\ \|x\|=1}} \langle x, Bx \rangle \leq \gamma_i \leq \max_{\substack{x \in \hat{H}_{i-1}^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Bx \rangle + \alpha_i$$

$$\Rightarrow \min_{\substack{x \in \hat{H}_i \\ \|x\|=1}} \langle x, Bx \rangle \leq \gamma_i - \alpha_i \leq \max_{\substack{x \in \hat{H}_{i-1}^\perp \\ \|x\|=1}} \langle x, Bx \rangle$$

Nun ist

$$x \in \hat{H}_i := [a_1, \dots, a_i] \Leftrightarrow x \in \text{Bild } A_i \Leftrightarrow \exists_{y \in \mathbb{C}^i} \; x = A_i y$$

$$x \in \hat{H}_{i-1}^\perp := [a_1, \dots, a_{i-1}]^\perp = [a_i, \dots, a_n] \Leftrightarrow x \in \text{Bild } \tilde{A}_i$$

$$\Leftrightarrow \exists_{y \in \mathbb{C}^{n+1-i}} \; x = \tilde{A}_i y$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A_i, \tilde{A}_i \text{ orthogonal}}}{\Rightarrow} \min_{\substack{y \in \mathbb{C}^i \\ \|y\|=1}} \langle A_i y, B A_i y \rangle \leq \gamma_i - \alpha_i \leq \max_{\substack{y \in \mathbb{C}^{n+1-i} \\ \|y\|=1}} \langle \tilde{A}_i y, B \tilde{A}_i y \rangle$$

$$\Rightarrow \min_{\substack{y \in \mathbb{C}^i \\ \|y\|=1}} \langle y, A_i^* B A_i y \rangle \leq \gamma_i - \alpha_i \leq \max_{\substack{y \in \mathbb{C}^{n+1-i} \\ \|y\|=1}} \langle y, \tilde{A}_i^* B \tilde{A}_i y \rangle$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_{min}(A_i^* B A_i) \leq \gamma_i - \alpha_i \leq \lambda_{max}(\tilde{A}_i^* B \tilde{A}_i)}$$

Der Satz ist bewiesen. <u>q.e.d.</u>

<u>Beispiel:</u>

<u>Gegeben:</u> $C = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ $a>b$, $c>0$

<u>Gesucht:</u> Eigenwerte von C

<u>Lösung:</u>

Wir wollen zunächst die Eigenwerte mit Satz VII.13 und VII.14 eingrenzen. Hierzu zerlegen wir

$$C = A+B \qquad A := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

A hat die Eigenwerte a und b mit den Eigenvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
B hat die Eigenwerte c und $-c$

Mit den Bezeichnungen von Satz VII.13 wird

$$\alpha_1 = a \ , \ \alpha_2 = b \qquad \beta_1 = c \ , \ \beta_2 = -c$$

Daher wird $\|B\| = \beta_1 = c$ und $|\gamma_i - \alpha_i| \leq c$

also $-c \leq \gamma_i - \alpha_i \leq c$

oder $\alpha_i - c \leq \gamma_i \leq \alpha_i + c$

Ausgeschrieben erhalten wir

$$\text{(I)} \quad \boxed{\begin{array}{l} a-c \leq \gamma_1 \leq a+c \\ b-c \leq \gamma_2 \leq b+c \end{array}}$$

Benutzen wir die aufwendigere Abschätzung

$$\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j \leq \gamma_{i+j-n} \qquad i,j \in \{1,\ldots,n\} \text{ sinnvoll}$$

und setzen hierin zunächst $n=2$ und dann

$$i=1: \qquad \gamma_j \le \alpha_1+\beta_j \le \gamma_{j-1}$$

$$j=1: \quad \gamma_1 \le \alpha_1+\beta_1 \le (*)$$

$$j=2: \quad \gamma_2 \le \alpha_1+\beta_2 \le \gamma_1$$

$$i=2: \qquad \gamma_{j+1} \le \alpha_2+\beta_j \le \gamma_j$$

$$j=1: \quad \gamma_2 \le \alpha_2+\beta_1 \le \gamma_1$$

$$j=2: \quad (*) \le \alpha_2+\beta_2 \le \gamma_2$$

so erhalten wir

$$\max(\alpha_1+\beta_2\ ,\alpha_2+\beta_1) \le \gamma_1 \le \alpha_1+\beta_1$$

$$\alpha_2+\beta_2 \le \gamma_2 \le \min(\alpha_1+\beta_2\ ,\alpha_2+\beta_1)$$

Durch Einsetzen von α und β somit

$$\text{(II)} \quad \boxed{\begin{array}{l} \max(a-c,b+c) \le \gamma_1 \le a+c \\ \qquad\qquad b-c \le \gamma_2 \le \min(a-c,b+c) \end{array}}$$

Wählen wir schließlich die Abschätzung nach Satz VII.14 so ergibt sich zunächst

$$A_1 = a_1 = e_1 = \binom{1}{0} \qquad \tilde{A}_1 = [a_1|a_2] = [e_1|e_2] = E$$

$$A_2 = [a_1|a_2] = [e_1|e_2] = E \qquad \tilde{A}_2 = a_2 = e_2 = \binom{0}{1}$$

und damit

$$A_1^*BA_1 = e_1^*Be_1 = e_1^tBe_1 = b_{11} = 0$$

$$\tilde{A}_1^*B\tilde{A}_1 = E^*BE = EBE = B = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2^*BA_2 = E^*BE = EBE = B = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}_2^*B\tilde{A}_2 = e_2^*Be_2 = e_2^tBe_2 = b_{22} = 0$$

mit

$$\lambda_{min}(A_1^*BA_1) = \lambda_{min}(0) = 0$$

$$\lambda_{max}(\tilde{A}_1^*B\tilde{A}_1) = \lambda_{max}(B) = c$$

$$\lambda_{min}(A_2^*BA_2) = \lambda_{min}(B) = -c$$

$$\lambda_{max}(\tilde{A}_2^*B\tilde{A}_2) = \lambda_{max}(0) = 0$$

erhalten wir $\quad 0 \leq \gamma_1 - \alpha_1 \leq c$

$$-c \leq \gamma_2 - \alpha_2 \leq 0$$

und daraus $\quad \alpha_1 \leq \gamma_1 \leq \alpha_1 + c$

$$\alpha_2 - c \leq \gamma_2 \leq \alpha_2$$

Durch Einsetzen von $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$ ergibt sich die dritte Abschätzung

$$\text{(III)} \qquad \boxed{\begin{array}{l} a \leq \gamma_1 \leq a+c \\ b-c \leq \gamma_2 \leq b \end{array}}$$

Spezialfall: $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$: $\quad a=2 \quad b=1 \quad c=10$

Nach (I): $\boxed{\begin{array}{l} -8 \leq \gamma_1 \leq 12 \\ -9 \leq \gamma_2 \leq 11 \end{array}}$

Nach (II): $\quad \max(-8,11) \leq \gamma_1 \leq 12$ $\quad$ also $\boxed{\begin{array}{l} 11 \leq \gamma_1 \leq 12 \\ -9 \leq \gamma_2 \leq -8 \end{array}}$

$$-9 \leq \gamma_2 \leq \min(-8,11)$$

Nach (III): $\boxed{\begin{array}{l} 2 \leq \gamma_1 \leq 12 \\ -9 \leq \gamma_2 \leq 1 \end{array}}$

Die erste Abschätzung ist die gröbste. Wir können aus ihr noch nicht einmal schließen, daß die Eigenwerte verschieden sind. Die dritte Abschätzung ist genauso aufwendig wie die zweite, liefert jedoch wesentlich schwächere Resultate, allerdings können wir aus ihr folgern, daß die Eigenwerte verschieden sind. Die zweite Abschätzung ist als sehr gut anzusehen, denn wir können die Eigenwerte bis auf die Größenordnung $\pm \frac{1}{10}\, c$ (d.h. $\frac{1}{10}$ der Störmatrix $B = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$ lokalisieren.

Tatsächlich ergeben sich die Eigenwerte aus:

$$p_C(t) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 10 \\ 10 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - (\mathrm{Sp}\, C)t - \det C = t^2 - 3t - 98$$

zu $\quad \gamma_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 98} = 11{,}51\ldots.$

$$\gamma_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + 98} = -8{,}51\ldots.$$

Dies sind in etwa die Mittelpunkte unserer Intervalle $11 \leq \gamma_1 \leq 12$, $-9 \leq \gamma_2 \leq -8$

VIII Indirekte Identifikation

Die Systemanalyse liefert mit ihrem Rechenmodell Ergebnisse, deren Genauigkeit von der Modellierung (einschließlich Diskretisierung) und der Güte der (direkten) Systemparameter abhängt.

Versuche mit dem realen System ergeben Identifikationsergebnisse (Ergebnisse des Versuchsmodells, z.B. Schätzungen dynamischer Antworten im Zeit- und Frequenzraum oder Eigenschwingungsgrößen).

Bei der direkten Identifikation versucht man die Systemparameter ohne Verwendung eines Rechenmodells allein aus dem Versuchsmodell zu schätzen. (Vgl. hierzu Natke S. 312-374). Hierzu leitet man theoretische Ausdrücke für die Antworten her

z.B.: Steigung des Realteilfrequenzganges
Extremwertabszissen des Realteilfrequenzganges
Ortskurven
Ausschwingkurven etc

mißt diese (durch Weg-, Geschwindigkeits- oder Beschleunigungsaufnehmer im konkreten Versuch aufgenommen) aus und erhält die entsprechenden Parameter durch Vergleich dieser Kurvenwerte mit den theoretisch gefundenen Werten (z.B. Dämpfung aus Ortskurvendurchmesser). Durch gut gewählte Erregungsanpassung (vgl. Phasenresonanzverfahren) kann man sich hierbei oft auf Einfreiheitsgradsysteme beschränken.

Anders liegt der Sachverhalt bei der indirekten Identifikation. Sie beginnt mit einem Vergleich des Rechenmodells mit dem Versuchsmodell. Man unterscheidet den

(a) direkten Vergleich: Direkte oder indirekte Parameter des Rechenmodells werden mit den entsprechenden Größen des Versuchsmodells verglichen

(b) indirekten Vergleich: Vergleich nichtparametrischer Größen, insbesondere Antworten, welche die Systemparameter implizit enthalten.

Sind die Systemparameter des betrachteten Systems identifiziert und stimmt die Anzahl der Freiheitsgrade des Rechenmodells und

des Versuchsmodells überein, so läßt sich der direkte Vergleich unmittelbar durchführen.

Ist die Anzahl der Freiheitsgrade verschieden (i.a. hat das Rechenmodell mehr), dann muß für den direkten Vergleich ein (bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade) reduziertes Rechenmodell aufgestellt werden. Diese Reduktion kann auf zwei Arten erfolgen.

(1) Aufstellen eines vereinfachten Rechenmodells (aufgrund der Erkenntnisse aus der Systemanalyse)

(2) Kondensation des ursprünglichen Rechenmodells (Trennen von wesentlichen und unwesentlichen Freiheitsgraden)

Werden im einfachsten Fall nur die Eigenfrequenzen miteinander verglichen, so können Schwierigkeiten bei der Zuordnung auftreten. In solchen Fällen ist dann weitere Information notwendig (z.B. Betrachtung der zugehörigen Eigenschwingungsformen). Wir setzen im Weiteren voraus, daß diese Zuordnung unproblematisch ist.

Im folgenden wird der Lösungsansatz von Natke geschildert und versucht die Idee möglichst klar und prägnant zu isolieren.

Der von Natke eingeschlagene Weg läßt sich wie folgt beschreiben:

(1) Geg.: Mathematisches Modell $M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = p$
$M, B, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch
M positiv definit, B und K positiv semidefinit

Versuchsmodell liefert Meßdaten (z.B. Eigenfrequenzen)
Rechenmodell liefert vom Versuchsmodell abweichende Daten

(2) Ges.: Abänderung der Matrizen um möglichst gute Übereinstimmung von Versuchs- und Rechendaten zu erzielen und mit dem so korrigierten mathematischen Modell Vorhersagen für nicht im Versuch durchgeführte Lastfälle zu tätigen.

(3) Lös.: Globale faktorielle Korrektur der Systemparametermatrizen und Parameteranpassung mit Hilfe der

Methode der gewichteten kleinsten Fehlerquadrate.

Zu Punkt (1) ist schon vieles gesagt worden. Zur Versuchsdurchführung und der geschickten Wahl der Lastfälle läßt sich allgemein nicht sehr viel sagen, sie hängt oft von der Erfahrung des Experimentators ab. Wir wollen damit Punkt (2) im wesentlichen übergehen. Aber nun zu Punkt (3).

Globale faktorielle Korrektur der Systemparametermatrizen

Mit diesem Schlagwort ist die erste Idee herauskristalisiert. Wir setzen für die Systemparametermatrizen eine additive Zerlegung aus unabhängigen Summandenmatrizen voraus, d.h. in Formeln die folgende Zerlegung der nxn Matrizen

(1) $M = M' + \sum_{i=1}^{I} M_i \qquad M', M_i \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch

(2) $B = B' + \sum_{j=1}^{J} B_j \qquad B', B_j \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch

(3) $K = K' + \sum_{l=1}^{L} K_l \qquad K', K_l \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch

Faktorielle Korrektur mit zu schätzenden Parametern α_i, β_j, γ_l führt über den Korrekturansatz auf die korrigierten Systemparametermatrizen

(1) $\overline{M} = M' + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i M_i$

(2) $\overline{B} = B' + \sum_{j=1}^{J} \beta_j B_j$

(3) $\overline{K} = K' + \sum_{l=1}^{L} \gamma_l K_l$

Das heißt wir lassen a-priori Kenntnisse zu, die in den gestrichenen Matrizen enthalten sind, denn diese bleiben durch die Korrektur unbeeinflußt.

Der Spezialfall, daß keine a-priori Kenntnisse vorliegen ($M'=B'=K'=0$) ist zugelassen. Für $\alpha_i=\beta_j=\gamma_l=1$ sind die korrigierten gleich den unkorrigierten Matrizen. Dieser Sachverhalt kann für eine iterative Korrektur mit Startelement 1 genutzt werden.

Dieser Korrekturansatz ist sehr flexibel und eignet sich hervorragend zum Einbau von Zwangsbedingungen. Wir werden nun sehen, daß man in ganz natürlicher Weise auf einen solchen Korrekturansatz stößt.

Zunächst wollen wir den Rückgriff auf jeden einzelnen Parameter gewährleisten. Der naheliegende Korrekturansatz lautet

$$M = \sum_{ij=1}^{n} M_{ij} \qquad M_{ij} := m_{ij}\, e_i e_j^t$$

$$\overline{M} = \sum_{ij=1}^{n} \alpha_{ij} M_{ij}$$

Wir können daher alle reellen Werte von m_{ij} $i,j=1,\ldots,n$ abdecken. Bauen wir zunächst den Zwang der Symmetrie von M ein, so ist der folgende Korrektursatz sehr viel sinnvoller

$$M = \sum_{\substack{ij=1\\ i\leq j}}^{n} M_{ij} \qquad M_{ij} := \begin{cases} m_{ij}\,(e_i e_j^t + e_j e_i^t) & i\neq j \\ m_{ii}\, e_i e_i^t & i=j \end{cases}$$

$$M = \sum_{\substack{ij=1\\ i\leq j}}^{n} \alpha_{ij} M_{ij}$$

Sei jetzt $S \subseteq \{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 : i\leq j\}$ irgend eine Untermenge und S' ihr mengentheoretisches Komplement. In S' fassen wir die Indizes zusammen für die die Parameter m_{ij} als genügend genau bekannt angesehen werden können. Damit stoßen wir auf den folgenden Ansatz.

$$M = \sum_{(i,j)\in S'} M_{ij} + \sum_{(i,j)\in S} M_{ij} \qquad M_{ij} := \begin{cases} m_{ij}(e_i e_j^t + e_j e_i^t) & i<j \\ m_{ii}\, e_i e_i^t & i=j \end{cases}$$

$$\overline{M} = \sum_{(i,j)\in S'} M_{ij} + \sum_{(i,j)\in S} \alpha_{ij} M_{ij}$$

Definieren wir $M' := \sum_{(i,j)\in S'} M_{ij}$ dann erhalten wir mit irgend einer Abzählung von S genau den Ansatz

$$M = M' + \sum_{i=1}^{I} M_i \qquad \overline{M} = M' + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i M_i$$

den wir in unserem Ansatz der globalen faktoriellen Korrektur

der Systemparametermatrizen voraussetzen. Eine analoge Betrachtung liefert die Ansätze für B und K.

Wir stoßen daher in ganz natürlicher Weise auf unseren Ansatz durch Einbau von a-priori Kenntnis

Symmetrie, Struktur, Voruntersuchung.

Dabei kann sich die Anzahl der Korrekturparameter α_i, β_j, γ_l; $i=1,\ldots,I$; $j=1,\ldots,J$; $l=1,\ldots,L$ ganz erheblich verringern.

Wir wollen unseren Ansatz und diese Reduktion am Beispiel unseres Kettenschwingers aus Kapitel V (Beispiel 1) erläutern. Dort hatten wir die Modellgleichung

$$M\ddot{x}+Kx = 0 \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & m_3 & \\ & & & m_4 \end{bmatrix} \qquad K = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

Wir zerlegen

$$M = \sum_{i=1}^{4} M_i \qquad M_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}$$

$$K = \sum_{l=1}^{4} K_l \qquad K_1 = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad K_2 = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad K_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}$$

Statt der $2\cdot\frac{4\cdot 5}{2} = 20$ abhängigen Parameter des elementweisen Zugriffs mit eingebautem Zwang Symmetrie oder noch schlimmer

$2 \cdot 4^2 = 32$ abhängigen Parametern des elementweisen Zugriffs ohne eingebautem Zwang Symmetrie haben wir durch Ausnutzung der Struktur der Modellgleichung das Problem auf 8 unabhängige Parameter (m_1, m_2, m_3, m_4, k_1, k_2, k_3, k_4) reduziert. Nehmen wir weitere a-priori Kenntnisse als gegeben an (etwa k_1, k_4, m_1, m_3 durch irgendwelche Vorinformation hinreichend genau bekannt), so verarbeiten wir diese Kenntnis in den gestrichenen Matrizen

$$M' = M_1 + M_3 \qquad\qquad K' = K_1 + K_4$$

Dadurch reduzieren wir die unbekannten Parameter von 8 auf 4, nämlich

$$m_2,\ m_4,\ k_2,\ k_3$$

<u>Der Begriff der Design-Variablen</u>

Die Elemente der Systemparameter-Matrizen M, B, K setzen sich aus Kennwerten (Parametern) der einzelnen Konstruktionselementparameter (im obigen Beispiel $m_1, \ldots, m_4$ $k_1, \ldots, k_4$) zusammen. Sollen (eventuell zu einem Teil) diese Konstruktionsparameter (Anzahl m) korrigiert werden (im Beispiel $m=4$ k_2, k_3, m_2, m_4) so muß gelten

$$D := I + J + L \leq m$$

Diese wirklich noch unbekannten Parameter nennen wir Design-Variablen

Die Summandenmatrizen aus unserem Korrekturansatz werden im folgenden kurz <u>Submatrizen</u> genannt. Sie können reale oder auch Subsysteme im übertragenen Sinne (z.B. lediglich die aus Wölbkraftgruppen resultierenden Nachgiebigkeiten einzelner Einspannelemente) beschreiben.

Durch den vereinfachten und doch sehr flexiblen Korrekturansatz ist die indirekte Identifikation auf die Schätzung der Korrekturparameter zusammengeschrumpft, wobei wir unter dem <u>Korrekturparametervektor</u> die Zusammenfassung der Parametervektoren

$$\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_I)^t \in \mathbb{R}^I$$
$$\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_J)^t \in \mathbb{R}^J$$

$$\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_L)^t \in \mathbb{R}^L$$

also $\boxed{a := (\alpha^t, \beta^t, \gamma^t)^t \in \mathbb{R}^D}$ $\boxed{D := I + J + L}$ $\boxed{D \in m}$

verstehen.

Unter dem <u>Identifikations- oder Beobachtungsvektor</u> verstehen wir einen Vektor

$$\boxed{b \in \mathbb{C}^{\nu N}} \qquad \boxed{\nu, N \in \mathbb{N}}$$

in dem die νN zur Korrektur zur Verfügung stehenden Werte zusammengefaßt sind.

<u>Z.B.:</u> N Eigenwerte λ^{Δ}_{0r} und Eigenlösungen n^{Δ}_{0r} $r=1,\ldots,N$ des passiven ungedämpften Systems seien identifiziert denen auch N Eigenlösungen des Rechenmodells zugeordnet werden können.

Wir erhalten

$$\nu N = N + n \cdot N = (n+1)N \qquad \text{Korrekturwerte aus } \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \\ \lambda_{01} & n_{01}(1) \ldots & n_{01}(n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{0N} & n_{0N}(1) \ldots & n_{0N}(n) \end{array}$$

die wir in $b \in \mathbb{C}^{\nu N}$, $\nu = n+1$ zusammenfassen.

Wir wollen jetzt die zweite Idee (<u>Parameteranpassung über die Methode der gewichteten Fehlerquadrate</u>) beschreiben.

Besonders einprägsam läßt sich dies mit systemtheoretischen Begriffen bewerkstelligen. Wir haben eine ganze Schar von Modellen

$$\Sigma_a \quad : M(a)\ddot{x} + B(a)\dot{x} + K(a)x$$

$$M(a) = M' + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i M_i$$

$$B(a) = B' + \sum_{j=1}^{J} \beta_j B_j \qquad a := (\alpha^t, \beta^t, \gamma^t)^t \in \mathbb{R}^D$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^I, \ \beta \in \mathbb{R}^J, \ \gamma \in \mathbb{R}^L$$

$$K(a) = K' + \sum_{l=1}^{L} \gamma_l K_l$$

Man nennt $\sum_a$ das (mathematische) System zum Parameter a. Neben dieser Schar mathematischer Systeme haben wir zusätzlich ein reales System (reale technische Konstruktion) $\sum^*$. Dieses System $\sum^*$ wird von uns mit p^* erregt und wir beobachten dabei b^*. Wir schreiben hierfür

$$b^* = \sum^* p^* \quad , \quad b^* \in \mathbb{C}^{\nu N}$$

Wir setzen voraus, daß b im Rahmen unsere Modellschar $(\sum_a)_{a \in \mathbb{R}^D}$ eine geeignete Schar von Größen $b(a) = \sum_a p$ zugeordnet werden kann mit einer mathematischen Idealisierung p für p^*. Dabei bedeutet $b(a) = \sum_a p$ nichts anderes als eine abkürzende Schreibweise für folgende Vorgehensweise:

(1) Betrachte das Modell $\quad M(a)x + B(a)x + K(a)x = p$

(2) Betrachte die Zuordnung $\quad b(a) \longleftrightarrow b^*$

(3) Berechne $\quad b(a)$ aus (1)

Wir nennen

$$\boxed{V := \{ b(a) : a \in \mathbb{R}^D \} \subseteq \mathbb{C}^{\nu N}}$$

den Beobachtungsraum unserer Modellschar $(\sum_a)_{a \in \mathbb{R}^D}$. In $\mathbb{C}^{\nu N}$ führen wir eine Norm ein (Beobachtungsnorm). Mathematisch am bequemsten ist es $\mathbb{C}^{\nu N}$ zu einem Hilbertraum zu machen indem man in $\mathbb{C}^{\nu N}$ ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot) : \mathbb{C}^{\nu N} \times \mathbb{C}^{\nu N} \longrightarrow \mathbb{R}$ einführt mit der zugehörigen Norm

$$\|b\| := \sqrt{(b,b)}$$

Dies ist äquivalent mit der Forderung: Die Beobachtungsnorm erfüllt die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Man erhält dann durch die Polarisationsformel

$$(x,y) := \frac{1}{4}\left[(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)\right]$$

das gesuchte Skalarprodukt. Nun besitzt jedes Skalarprodukt eine Darstellung

$$(x,y) = x^*Gy \quad \text{mit positiv definiter hermite'scher Gewichtsmatrix} \quad G_{ij} := (e_i, e_j)$$

Man spricht daher von gewichtetem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_G$ mit

$(\cdot,\cdot)_E =: \langle\cdot,\cdot\rangle$ ergibt sich der Spezialfall des kanonischen Skalarproduktes.

Im Fall $G = E_{\nu N}$ sprechen wir vom Euklidischen Raum mit Einheitskugeln.

Im Fall $G \neq E_{\nu N}$ sprechen wir vom Nichteuklidischen Raum mit Einheitsellipsoiden.

<u>Wir können nun die Methode der gewichteten kleinsten Fehlerquadrate folgendermaßen formulieren.</u>

Bestimme ein System $\sum_{\hat{a}}$ aus der Schar der Systeme $(\sum_a)_{a \in \mathbb{R}^D}$ so daß zu gegebenem Input p und Beobachtung b^*

$$\|\sum_a p - b^*\|_G^2 = \inf_{a \in \mathbb{R}^D} \|\sum_a p - b^*\|_G^2$$

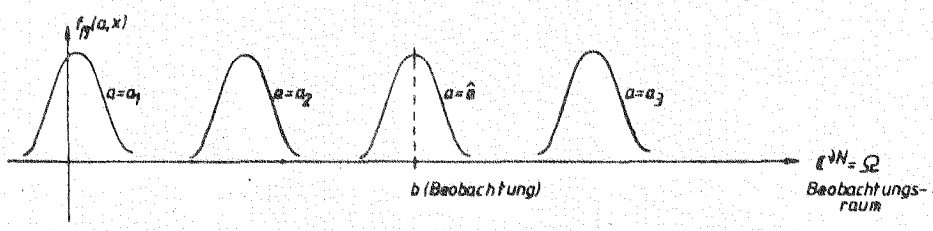
Dabei heißt

$$v : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{C}^{\nu N}$$
$$a \longmapsto \sum_a p - b^* = b(a) - b^*$$

das zugehörige Residnum

Das Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate ist auf das engste mit der Wahrscheinlichkeitstheorie verbunden, die hierbei üblichen Modelle benötigen eine einschränkende Voraussetzung: Linearität im Parameter a. Sie haben jedoch den Vorteil die Gewichtsmatrix G zu interpretieren.

In der bisherigen geometrischen Denkweise stellten wir uns auf den Standpunkt unsere Modellschar ist nicht notwendigerweise exakt. Exakt ist die Wirklichkeit.



Warum soll man sich nicht auf den umgekehrten Standpunkt stellen und behaupten: Das Modell ist exakt (denn nur in meinem Modell kann ich Wirklichkeit erfassen) hingegen ist die Beobachtung falsch, denn sie paßt nicht in mein Modell. Tatsächlich

vertauscht man hierbei lediglich die Rolle von Σ^* und $\Sigma_{\bar{a}}$ und faßt b^* auf als fehlerhafte Beobachtung von $b(\bar{a})$, dabei ist $b(\bar{a})$ nicht bekannt. Es wird dann überflüssig überhaupt noch von dem Modell Σ^* zu reden und ich möchte daher im folgenden einfach b statt b^* schreiben um anzudeuten, daß b aufgefaßt wird als fehlerhafte Beobachtung von $b(\bar{a})$.

Wenn wir im folgenden von Wirklichkeit reden ist damit (mathematische) Modellwirklichkeit gemeint. Als wir vorher von "Wirklichkeit" redeten war damit (Versuchs-) "Modellwirklichkeit" gemeint. Strenggenommen macht es überhaupt keinen Sinn von einer anderen Wirklichkeit als Modellwirklichkeit zu reden. (Eine Tatsache die sich leider viel zu wenig Menschen klar machen)

<u>Wir stehen jetzt auf dem Standpunkt:</u>

(1) Es gibt ein $\bar{a} \in \mathbb{R}^D$ das die Wirklichkeit (in unserem Modell) beschreibt.

(2) Die reale Beobachtung b setzt sich zusammen aus einem $b(\bar{a})$ und einem Fehler v.

Zu einem beliebigen Parameter a gehört damit eine Beobachtung $b(a) = \Sigma_a p$. Nach Voraussetzung war $\Sigma_a p$ linear im Parameter a. Um dies anzudeuten schreiben wir $b(a) = Xa$. Wir können uns daher vorstellen eine Realisierung der Zufallsvariablen

$$\beta = Xa + v \qquad \text{nämlich} \qquad \beta = b$$

beobachtet zu haben. Dabei ist X und a deterministisch, der Zufall kommt lediglich durch v ins Spiel. v kann man sich vorstellen als zufällig wirkende Störungen, die sich im Mittel jedoch wegheben.

Wir arbeiten jetzt in dem wahrscheinlichkeitstheoretischen Modell

$$\boxed{\beta = Xa + v} \qquad \boxed{L(v) = N(0,B)} \qquad \boxed{L(v) := \text{Verteilung von } v}$$

Die Verteilungsannahme $L(v) = N(0,B)$ läßt sich auf vielerlei Art als vernünftig nachweisen. Es sind schon viele Langzeituntersuchungen unternommen worden um an die Matrix B heranzukommen (d.h. B für Messungen zu bestimmen).

In Formeln bedeutet

$$L(v) = N(\mu,\Sigma) \overset{d}{\Leftrightarrow} P(v \in A) = \int_A f_{\mu,\Sigma}(x)dx$$

wobei

$A \subseteq R^m$ eine meßbare (bezüglich Lebesguemaß) Menge

v eine R^m wertige Zufallsvariable (Zufallsvektor)

$$f_{\mu,\Sigma}(x) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$ die Dichte von $N(\mu,\Sigma)$

ist.

$\mu \in \mathbb{R}^m$ heißt Erwartungsvektor von v

$\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}$ heißt Kovarianzmatrix von v (Σ ist positiv definit vorausgesetzt)

Allgemein kann man Σ nur als positiv semidefinit voraussetzen (dann ist die Dichte nicht mehr in solch einfacher Form aufschreibbar - Ausgeartete Normalverteilung).

In der Wahrscheinlichkeitstheorie zeigt man, entweder über die Transformationsformel oder eleganter (falls dieses starke Hilfsmittel zur Verfügung gestellt wird) mit Hilfe charakteristischer Funktionen, daß lineare Transformationen normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt sind. (Vgl. etwa Krickeberg-Ziezold oder Gänssler-Stute)

Demnach ist $\beta = Xa + v$ wieder normalverteilt

mit $E(\beta) = Xa + E(v) = Xa$

und $\operatorname{cov}(\beta) := E(\beta - E(\beta))(\beta - E(\beta))^t = E(\beta - Xa)(\beta - Xa)^t = E(vv^t)$

$= E(v - E(v))(v - E(v))^t = \operatorname{cov}(v) = B$

Die Normalverteilung ist jedoch durch Angabe von Erwartungsvektor und Kovarianzmatrix schon eindeutig bestimmt. Also erhalten wir

$$\boxed{L(\beta) = N(Xa,B)}$$

<u>Wir stehen vor folgender Situation:</u>

<u>Geg.:</u> Ein Raum Ω (Bei uns $\Omega = \mathbb{C}^N$ Beobachtungsraum)

Eine Familie $(P_a)_{a \in A}$ von Verteilungen auf Ω

(Bei uns $(P_a)_{a \in A} = (N(Xa,B))_{a \in \mathbb{R}^D}$)

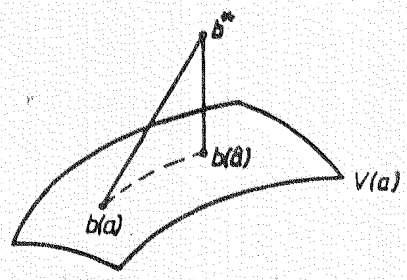
Eine Beobachtung $b \in \Omega$

Ges.: Welches a lag vor bei der Beobachtung b

Lös.: Das Maximum Likelihood Prinzip sagt uns:

Wähle dasjenige a aus, das die Beobachtung b am wahrscheinlichsten macht.

Machen wir uns ein Bild:



Folgen wir diesem Prinzip, so lautet zunächst die mathematische Formulierung

$$f_\beta(\hat{a},b) = \operatorname{Sup}\left\{ f_\beta(a,b) \;:\; a \in \mathbb{R}^D \right\}$$

Nun war

$$f_\beta(a,x) = \frac{dN(Xa,B)}{d\lambda}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\nu N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det B}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-Xa)^* B^{-1}(x-Xa)}$$

Radon-Nikodym
Ableitung bezüglich
Lebesguemaß λ

Also $\quad f_\beta(a,b) \longrightarrow \sup \iff -\frac{1}{2}(b-Xa)^* B^{-1}(b-Xa) \longrightarrow \sup$

$$\iff (b-Xa)^* B^{-1}(b-Xa) \longrightarrow \inf$$

Wir erhalten daher aus dem Maximum Likelihood-Prinzip die Bestimmungsgleichung

$$\boxed{\begin{array}{ll} Z(\hat{a}) = \inf\left\{ Z(a) \;:\; a \in \mathbb{R}^D \right\} & \\ Z(a) := v(a)^* B^{-1} v(a) = \|v(a)\|^2_{B^{-1}} & \underline{\text{Zielfunktional}} \\ v(a) := b - Xa = b - \sum_a p & \underline{\text{Residuum}} \end{array}}$$

Dabei ist $\underline{B = \operatorname{cov}(v) \text{ die Kovarianzmatrix des Residuums}}$

Die Schätzer die man aus dem Modell

$$\beta = Xa + v \quad , \quad E(v) = 0 \quad , \quad \mathrm{cov}(v) = \sigma^2 B \qquad B \text{ fest}$$

durch minimieren des Zielfunktionals $Z(a) := \langle v(a), B^{-1} v(a) \rangle$ erhält nennt man auch MQS-Schätzer (Minimum-Quadrate-Schätzer) für a oder Gauß-Markov-Schätzer. Das zugrunde liegende Modell heißt linear falls $B=E$ sonst verallgemeinert linear. Die MQS haben besonders günstige statistische Eigenschaften. Man findet diese etwa im Buch Schach-Schäfer (Regressions- und Varianzanalyse). Die Verteilung von v ist hierbei nicht notwendigerweise normal vorausgesetzt.

Wir stoßen damit auf das Problem wie bei der geometrisch orientierten Betrachtungsweise mit Gewichtsmatrix $B=\mathrm{cov}(v) = G^{-1}$.

Unser Problem ist im allgemeinen Fall $(\sum_a p \neq Xa)$ daß unser Modellbetrachtungsraum

$$V = \{ b(a) = \textstyle\sum_a p \ : \ a \in \mathbb{R}^D \}$$

keine oder nur geringe lokale Glattheitseigenschaften besitzt (Problem von zerissenem V). Um dieses Problem zu umgehen, lassen wir nur Beobachtungen zu, die V lokal hinreichend glatt machen und den Parameter a nur über Urbilder solcher glatten Bereiche variieren. Die Eigenwerte und Eigenvektoren erfüllen solche lokalen Glattheitsbedingungen, man beachte jedoch den Aufwand bis man dieses Resultat erhält.

<u>Die Normalengleichung</u>

Es war $Z(a) = v(a)^* G v(a)$ unser Zielfunktional. Wir ermitteln eine notwendige Bedingung zur Bestimmung von a aus unserem Optimierungsproblem

$$Z(\hat{a}) = \inf \{ Z(a) \ : \ a \in \mathbb{R}^D \} \quad , \quad Z : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus $\frac{\partial Z}{\partial a}(\hat{a}) = 0$. Mit $\frac{\partial Z}{\partial a^t} = v^* G \frac{\partial v}{\partial a^t} + (\frac{\partial v^*}{\partial a} G v)^t$ wird

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = \frac{\partial v^*}{\partial a} G v + \frac{\partial v^t}{\partial a} G^t v^{*t}$$

$$= \frac{\partial v^*}{\partial a} G v + \frac{\partial v^t}{\partial a} G^t \bar{v} = \frac{\partial v^*}{\partial a} G v + \overline{(\frac{\partial \bar{v}^t}{\partial a} \bar{G}^t \bar{\bar{v}})}$$

$$= \frac{\partial v^*}{\partial a} G v + \overline{(\frac{\partial v^*}{\partial a} G^* v)} = \frac{\partial v^*}{\partial a} G v + \overline{\frac{\partial v^*}{\partial a} G v}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v^*}{\partial a}\,Gv\right)$$

Beachtet man: $\overline{Z} = Z \quad (Z \in \mathbb{R})$ und $\frac{\partial \overline{Z}}{\partial a} = \overline{\left(\frac{\partial Z}{\partial a}\right)}$ dann wird

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = \frac{\partial \overline{Z}}{\partial a} = \overline{\frac{\partial v^*}{\partial a}\,Gv} + \overline{\overline{\frac{\partial v^*}{\partial a}\,Gv}} = \frac{\partial \overline{v}^*}{\partial a}\,\overline{Gv} + \frac{\partial v^*}{\partial a}\,Gv$$

$$= \frac{\partial v^t}{\partial a}\,\overline{G\overline{v}} + \frac{\partial \overline{v}^t}{\partial a}\,Gv = \frac{\partial v^t}{\partial a}\,\overline{G\overline{v}} + \overline{\frac{\partial v^t}{\partial a}\,\overline{G\overline{v}}} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v^t}{\partial a}\,\overline{G\overline{v}}\right)$$

Wir haben daher

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial a}(a) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v^*}{\partial a}\,Gv\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v^t}{\partial a}\,\overline{G\overline{v}}\right) \\ \text{wobei} \quad Z(a) = v^*(a)Gv(a) \qquad Z: \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad G = G^* \end{array}}$$

und erhalten für das nichtlineare Ausgleichsproblem die Normalengleichung

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v^t}{\partial a}\,\overline{G\overline{v}}\right)_{|a=\hat{a}} = 0}$$

Nichtlineare Ausgleichsprobleme können im allgemeinen nur iterativ gelöst werden. Wir beschränken uns hier zunächst auf den einfachsten Fall der linearen Ausgleichsprobleme . Sie sind definiert durch $v=b-Xa$ (vgl. wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell - Linearität im Parameter a).

Es wird $\quad \frac{\partial v}{\partial a} = -X \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v^t}{\partial a} = -X^t$

Unsere Normalengleichung entartet in

$$\mathrm{Re}(-X^t\overline{G\overline{v}})_{|a=\hat{a}} = -\mathrm{Re}(X^t\overline{G\overline{v}})_{|a=\hat{a}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(X^t\overline{G\overline{v}})_{|a=\hat{a}} = 0$$

mit $v = b-Xa$. Wir folgern:

$$0 = 2\,\mathrm{Re}(X^t\overline{G\overline{v}})_{|a=\hat{a}} = (X^t\overline{G\overline{v}} + \overline{X^t\overline{G\overline{v}}})_{|a=\hat{a}} = (X^t\overline{G\overline{v}} + X^*Gv)_{|a=\hat{a}}$$

$$= X^t\overline{G}\,\overline{(b - X\hat{a})} + X^*G(b - X\hat{a}) = X^t\overline{G}\overline{b} - X^t\overline{G}\overline{X}\overline{\hat{a}} + X^*Gb - X^*GX\hat{a}$$

$$= X^t\overline{G}\overline{b} + X^*Gb - (X^t\overline{G}\overline{X}\overline{\hat{a}} + X^*GX\hat{a})$$

$$= X^t\overline{G}\overline{b} + \overline{X^t\overline{G}\overline{b}} - (X^t\overline{G}\overline{X} + X^*GX)\hat{a} \qquad \text{denn } \hat{a} = \overline{\hat{a}} \text{ da } \hat{a} \in \mathbb{R}^D$$

$$= 2\,\mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{b}) - (X^t\bar{G}\bar{X} + \overline{X^t\bar{G}\bar{X}})\hat{a}$$

$$= 2\,\mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{b}) - 2\,\mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{X})\hat{a}$$

und damit

$$0 = \mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{b}) - \mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{X})\hat{a}$$

oder $\boxed{\mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{X})\hat{a} = \mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{b})}$ <u>Normalengleichung des linearen Ausgleichs</u>

Setzen wir voraus, daß $\mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{X})$ invertierbar ist dann ergibt sich die Lösung

$$\boxed{\hat{a} = \mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{X})^{-1}\,\mathrm{Re}(X^tGb)}$$

Ist die Matrix $\mathrm{Re}(X^tGX)$ nicht invertierbar, so kann man eine Pseudolösung ermitteln, die sich leicht mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten errechnen läßt. Eine andere Möglichkeit (allerdings wesentlich aufwendiger) ist das DFP-Verfahren, das zur Berechnung einer Pseudoinversen Matrix benutzt werden kann. Diese Verfahren (allgemeiner Verfahren der Oren-Luenberger Klasse) kann man z.B. in Stoer-Burlich Einführung in die Numerische Mathematik I, II nachlesen. Die Verfahren der Oren-Luenberger Klasse sind allgemein anwendbar, also auch auf das nichtlineare Ausgleichsproblem. Einen speziell auf dieses Problem zugeschnittenen Algorithmus kann man z.B. in Band I Kapitel 4.8.4 Seite 182 finden. Im linearen Ausgleichsfall ist das Verfahren der konjugierten Gradienten sehr effizient und der Lösung über die Normalengleichung vorzuziehen, selbst wenn die Inverse der Matrix $\mathrm{Re}(X^tGX)$ existiert. Man kann im linearen Fall zeigen, daß jede Lösung der Normalengleichung eine Minimallösung unseres Optimierungsproblems ist. Im nichtlinearen Fall kann dies natürlich nur im Einzelfall bei expliziter Kenntnis der Abbildung v entschieden werden. Wir fassen unser Ergebnis in dem folgenden Satz zusammen.

<u>Satz VIII.1 Korrektur des Rechenmodells unter Verwendung von MQS</u>

Gegeben sei ein Rechenmodell

$$M\ddot{x}+B\dot{x}+Kx = p \qquad M,B,K\in\mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{, symmetrisch}$$

$$M \text{ positiv definit ; } B,K \text{ positiv semidefinit}$$

und eine Zerlegung in unabhängige Summandenmatrizen (Subma-

trizen der Form

$$M = M' + \sum_{i=1}^{I} M_i \qquad B = B' + \sum_{j=1}^{J} B_j \qquad K = K' + \sum_{l=1}^{L} K_l$$

M', B', K', M_i, B_j, K_l alle symmetrische reelle $n \times n$ Matrizen.

Für die Matrizen (Matrizen des korrigierten Rechenmodells) machen wir den Ansatz

$$M = M' + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i M_i \qquad \alpha \in \mathbb{R}^I$$

$$B = B' + \sum_{j=1}^{J} \beta_j B_j \qquad \beta \in \mathbb{R}^J$$

$$K = K' + \sum_{l=1}^{L} \gamma_l K_l \qquad \gamma \in \mathbb{R}^L$$

und fassen diese Parameter in dem Parametervektor $a = (\alpha^t, \beta^t, \gamma^t)^t \in \mathbb{R}^D$ mit $D = I+J+K$ zusammen. Es gelten notwendigerweise die Beziehungen

$$\boxed{I, J, L \leq \frac{n(n+1)}{2}} \qquad \underline{\text{Symmetriezwang}}$$

$$\boxed{D \leq m} \qquad \underline{m := \text{Anzahl der Design-Variablen}}$$

Wir erhalten auf diese Weise eine Systemschar $\Sigma_a : M(a)x + B(a)x + K(a)x$. Ist ein Beobachtungsvektor $b \in \mathbb{C}^{JN}$ (Beobachtungsraum) gegeben, so bilden wir das Residuum v und das Zielfunktional Z gemäß

(1) $\boxed{v(a) = b - b(a) = b - \Sigma_a p}$

(2) $\boxed{Z(a) = \|v(a)\|_G^2 = v(a)^* G v(a)}$ $\underline{G = G^* \text{ positiv definit}}$

(Im wahrscheinlichkeitstheoretischen Modell ist $G^{-1} = \mathrm{cov}(v)$).

Dann ermitteln wir unseren Schätzparameter $\hat{a} = (\hat{\alpha}^t, \hat{\beta}^t, \hat{\gamma}^t)^t \in \mathbb{R}^D$ aus dem Optimierungsproblem

(3) $\boxed{Z(\hat{a}) = \inf\{Z(a) : a \in \mathbb{R}^D\}}$ <u>$\hat{a}$ heißt MQS für a</u>

unser korrigiertes System ist dann $\Sigma_{\hat{a}} : M(\hat{a})\ddot{x}+B(\hat{a})\dot{x}+K(\hat{a})x$ mit $\bar{M}=M(a)$, $\bar{B}=(a)$, $\bar{K}=(a)$.

Als notwendige Bedingung für (3) ergibt sich die (nichtlineare <u>Normalengleichung</u>

$$\boxed{2\ \mathrm{Re}\left[\frac{\partial v}{\partial a^t}\ \bar{G}\ \bar{v}\right]_{|a=\hat{a}} = 0}$$

Im Fall des linearen Ausgleichs $(v(a) = b-Xa)$ ist die Normalengleichung auch hinreichend für $\hat{a}$. Man berechnet die Lösung der Normalengleichung

$\boxed{\mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{X})\hat{a} = \mathrm{Re}(X^t\bar{G}\bar{b})}$ <u>Normalengleichung im linearen Fall</u> $(D \leq \sqrt{N})$

am besten nach dem Verfahren der konjugierten Gradienten und erhält dann im allgemeinen Fall $(\mathrm{Re}(X^tGX)$ nicht invertierbar) die eindeutig bestimmte Pseudolösung dieser Gleichung. Diese stimmt im Fall der Invertierbarkeit von $\mathrm{Re}(X^tGX)$ mit der Lösung

$\boxed{\hat{a} = \mathrm{Re}(X^tGX)^{-1}\ \mathrm{Re}(X^tGb)}$ <u>Lösung der linearen NGL falls Rang $(\mathrm{Re}\ X^tGX) = D$ (maximal)</u>

überein.

Mit Satz VIII.1 ist der letzte Schritt geschafft und die Theorie geliefert.

Das Prinzip soll nun an zwei Beispielen erläutert werden.

<u>Beispiel (1) Zeitbereich</u>

Die E/A-Größen $p^M(t)$ und $x^M(t)$ (Meßwerte) eines elastomechanischen Systems mit den Anfangsbedingungen $x(0)=\dot{x}(0)=0$ seien im Intervall $[0,T]$ gemessen. A-priori-Kenntnisse weisen dies im betrachteten Arbeitsbereich als lineares, viskos gedämpftes Einfreiheitsgrad-System aus. Gesucht sind Schätzwerte für die Systemparameter mit Hilfe der Methode der kleinsten ungewichteten Fehlerquadrate (G=E).

Modellgleichung $\Sigma_{(m,b,k)}$: $m\ddot{x}+b\dot{x}+kx = p \quad x(0)=0 \quad \dot{x}(0)=0$

Wir schlagen den einfachsten Weg ein in dem wir die Parameter m,b,k so bestimmen, daß

$$\|p^M - \Sigma^{-1}_{(m,b,k)}\, x^M\|_2^2 \longrightarrow \min$$

Dadurch erreichen wir, daß unser Fehler

$$v(m,b,k) = p^M - \Sigma^{-1}_{(m,b,k)}\, x^M$$

linear im Parameter (m,b,k) wird. Man spricht in diesem Fall auch häufig vom Eingangsfehler.

Unser Residuum wird:

$$v(m,b,k) = p^M(t) - \left[m\ddot{x}^M(t) + b\dot{x}^M(t) + kx^M(t)\right]$$

Wir benötigen noch $\dot{x}^M(t)$ und $x^M(t)$. Hierzu integrieren wir

$$\dot{x}^M(t) = \dot{x}^M(0) + \int_0^t \ddot{x}^M(s)ds = \int_0^t \ddot{x}^M(s)ds$$

$$x^M(t) = x^M(0) + \int_0^t \dot{x}^M(s)ds = \int_0^t \dot{x}^M(s)ds = \int_0^t \left(\int_0^s \ddot{x}^M(\tau)d\tau \right) ds$$

$$= \int_0^t \dot{x}^M(s)ds \underset{\text{P.I}}{=} s\dot{x}^M(s)\Big|_0^t - \int_0^t s\ddot{x}^M(s)ds$$

$$= t\dot{x}^M(t) - \int_0^t s\ddot{x}^M(s)ds = t\int_0^t \ddot{x}^M(s)ds - \int_0^t s\ddot{x}^M(s)ds$$

Also $$\boxed{\dot{x}^M(t) = \int_0^t \ddot{x}^M(s)ds}$$

$$\boxed{x^M(t) = \int_0^t (t-s)\ddot{x}^M(s)ds}$$

<u>Diskretisierung:</u> Digitale Anwendung des Parameterschätzverfahrens verlangt Diskretisierung von $\ddot{x}^M(t)$, $p^M(t)$ im Intervall $[0,T]$ und die Berechnung von $\dot{x}^M(t_i)$, $x^M(t_i)$ für $i=1,\ldots,N$ mittels numerischer Integration.

Die Schrittweite h (Abtastzeit) richtet sich einerseits nach

der vorzugebenden Frequenz (obere Grenzfrequenz) und andererseits nach dem zugelassenen Fehler der numerischen Integration. Verwendet man die Rechteckregel so folgt:

$$\dot{x}_i^M := \dot{x}^M(t_i) = h \sum_{j=1}^{i} \ddot{x}_j^M \qquad \ddot{x}_j^M := \ddot{x}^M(t_j)$$

$$x_i^M := x^M(t_i) = h^2 \sum_{j=1}^{i} (i-j)\ddot{x}_j^M$$

Mit $\quad v_i := v(t_i) \quad$ und $\quad p_i^M := p^M(t_i) \quad$ wird

$$v_i = p_i^M - \left[m x_i^M + b x_i^M + k x_i^M\right]$$

Damit vektoriell

$$v = p^M - \left[\ddot{x}^M | \dot{x}^M | x^M\right] a \qquad a := (m,b,k)^t \in \mathbb{R}^3$$

$$v, p^M, x^M, x^M, x^M \in \mathbb{R}^N \qquad Nh = T$$

Unsere Design-Matrix X wird daher $X = \left[\ddot{x}^M | \dot{x}^M | x^M\right] =: X^M$

Wir erhalten

$$\hat{a} = \left[(X^M)^t X^M\right]^{-1} (X^M)^t p^M$$

als Parameter-Schätzung für $\quad a = (m,b,k)^t$

<u>Beispiel 2 Korrektur des ungedämpften Systems mittels Eigenwerten</u>

Zunächst erinnern wir an die Definition der Eigenwerte. Wir hatten in Kapitel VI für das ungedämpfte System die Eigenwerte charakterisiert als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\quad p_{MK}(\lambda) = \det(M\lambda^2 + K) \quad$ und erhielten

$$\lambda_1 = i\omega_{01}, \ldots, \lambda_n = i\omega_{0n}$$

Dies ergibt sich wenn man das ungedämpfte System als Spezialfall des gedämpften auffaßt. Man erhält dann das charakteristische Polynom aus dem Ansatz

$$x_j = n_j e^{\lambda_j t} \quad , \quad \lambda_j \in \mathbb{C} \quad , \quad n_j \neq 0$$

durch Einsetzen in die Dgl $\quad M\ddot{x} + Kx = 0 \; ; \quad$ denn es folgt

$$M\lambda_j^2 n_j e^{\lambda_j t} + K n_j e^{\lambda_j t} = 0$$

oder äquivalent (da $e^{\lambda_j t} \neq 0$)

$$(M\lambda_j^2 + K)n_j = 0 \qquad \text{(Eigenwertgleichung)}$$

Wir wissen bereits alle Eigenwerte λ_j sind rein imaginär. Man verwendet daher beim ungedämpften System den Ansatz

$$x_j = n_j e^{i\omega_{0j} t}$$

und erhält damit das Eigenwertproblem:

$$(M(i\omega_{0j})^2 + K)n_j = 0 \iff (K - M\omega_{0j}^2)n_j = 0$$

und das charakteristische Polynom

$$\tilde{p}_{MK}(\lambda) = \det(K - M\lambda)$$

mit den Nullstellen

$$i\omega_{01}, \ldots, i\omega_{0n} \quad \text{von} \quad p_{MK}(\lambda) = \det(M\lambda^2 + K)$$

und der Zuordnung

$$\tilde{p}_{KM}[(i\lambda)^2] = p_{KM}(\lambda)$$

hat $\tilde{p}_{KM}$ die Nullstellen $\lambda_1 = \omega_{01}^2, \ldots, \lambda_n = \omega_{0n}^2$ dies folgt z.B. so

$$0 = p_{KM}(i\omega_{0j}) = \tilde{p}_{KM}[(ii\omega_{0j})^2] = \tilde{p}_{KM}[(-\omega_{0j})^2] = p_{KM}(\omega_{0j}^2)$$

<u>Wir können daher genausogut die Eigenfrequenzen folgendermaßen definieren</u>

$$\tilde{p}_{KM}(\lambda) := \det(K-M\lambda) = (\lambda-\lambda_{01})^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_{0k})^{r_k} \qquad \sum_{j=1}^{k} r_j = n$$

Dann ist $\lambda_{0j} \geq 0$ für $j=1,\ldots,k$ und die Eigenfrequenzen erhalten wir aus

$$\omega_{01} := \sqrt{\lambda_{01}}, \ldots, \omega_{0r} := \sqrt{\lambda_{0r}}$$

Die Matrix der Normalschwingungen bleibt hierdurch unberührt. Es gilt wie früher

$$N^t M N = E_n$$

$$N^t K N = \Omega_{0g}^2 = \mathrm{diag}(\omega_{01}^2, \ldots, \omega_{0n}^2) = \mathrm{diag}(\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0n})$$

wobei hier die Eigenfrequenzen gemäß ihrer Vielfachheit $r_1, \ldots, r_k$ aufgeführt sind.

Wir haben somit durch den Übergang $p_{KM} \longleftrightarrow \tilde{p}_{KM}$ erreicht, daß alle auftretenten Größen beim ungedämpften System reell bleiben.

Weiter hatten wir den Korrekturansatz

$$M = M' + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i M_i \qquad\qquad a = (\alpha^t, \gamma^t)^t \in \mathbb{R}^{I+L}$$

$$K = K' + \sum_{l=1}^{L} \gamma_l K_l$$

Wir setzen im 1. Schritt voraus, daß $\bar{M}=M$ (M hinreichend genau bekannt) d.h. $\alpha_i=1$ für $i=1,\ldots,n$ und verwenden damit den Korrekturansatz

$$K = K' + \sum_{l=1}^{L} a_l K_l \qquad\qquad a = \alpha \in \mathbb{R}^L$$

<u>1. Schritt: Korrektur der Steifigkeitsmatrix aufgrund identifizierter Eigenwerte</u>

Den identifizierten Eigenwerten $\hat{\lambda}_{0r} := \hat{\omega}_{0r}^2 \quad r=1,\ldots,N \;,\; N\ n$

sind die Eigenschwingungsgrößen $\bar{\lambda}_{0r} := \bar{\omega}_{0r}^2 \quad r=1,\ldots,N \;,\; N\ n$

des korrigierten Rechenmodells $M\ddot{x} + \bar{K}x$ zugeordnet.

Die Eigenschwingungsgrößen genügen damit dem Matrizeneigenwertproblem

$$(-\bar{\lambda}_{0r} M + \bar{K})\, \bar{n}_r = 0 \qquad r=1,\ldots,N \quad , \quad N \leq n$$

dabei ist n_r die r-te Spalte der Normalschwingungsmatrix des

korrigierten Systems. M ist unabhängig von a und $K=K'+\sum_{l=1}^{L} a_l K_l$.

Der Residuenvektor ist definiert durch

$$v := (\hat{\lambda}_{01} - \bar{\lambda}_{01}, \ldots, \hat{\lambda}_{0N} - \bar{\lambda}_{0N})^t$$

Die Funktionalmatrix ist definiert durch

$$\bar{D}v := -\frac{\partial v}{\partial a^t} = -(\frac{\partial v}{\partial a_1} \quad \ldots \quad \frac{\partial v}{\partial a_L}) \in \mathbb{R}^{N \times L}$$

Wir beschaffen uns die Matrix $\bar{D}v$ durch ableiten des Matrizeneigenwertproblems, daß wir dies dürfen lehrt uns der Abschnitt über Stabilität von Eigenwerten. Wir verwenden hier jedoch mehr Information als dort, denn wir setzen die Eigenvektoren ein um relativ einfache Ausdrücke zu erhalten.

Zunächst ergibt sich aus

$$(-\bar{\lambda}_{0r} M + \bar{K})\, \bar{n}_r = 0 \qquad r=1,\ldots,N$$

durch Differentiation nach a_l

$$(-\frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} M + K_l)\, \bar{n}_r + (-\bar{\lambda}_{0r} M + \bar{K})\, \frac{\partial \bar{n}_r}{\partial a_l} = 0$$

Hierbei ist zu beachten, daß auch $\frac{\partial \bar{n}_r}{\partial a_l}$ lokal existiert.

Dies sehen wir für einfache Eigenwerte so:

Sei λ_1 ein einfacher Eigenwert von A und x_1 ein zugehöriger Eigenvektor, dann besitzt die Matrix $(A-\lambda_1 E)$ den Rang $n-1$. OBdA seien die ersten $n-1$ Zeilen unabhängig. Nach der Theorie der linearen Gleichungen können die Komponenten von x_1 folgendermaßen gewählt werden

$$x_1 = (A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn})$$

wobei

$$A_{ni} := (-1)^{n+i} \det(A-\lambda_1 E)'_{ni} \qquad \text{ein Polynom in } \lambda_1 \text{ vom Grad} \leq n-1$$

Wenden wir dies an auf die Matrix $A+sB$ mit dem einfachen Eigenwert $\lambda_1(s)$ und dem zugehörigen Eigenvektor $x_1(s)$, so ist

$e_i^t x_1(s)$ ein Polynom in $\lambda_1(s)$ vom Grade $\leq n-1$ und $\lambda_1(s)$ läßt sich für genügend kleines s in eine konvergente Potenzreihe in s entwickeln.

Wir dürfen die Glieder umsortieren und erhalten eine konvergente Potenzreihe

$$e_i^t x_1(s) = e_i^t x_1 + \sum_{l=1}^{\infty} e_i{}^t z_l s^l$$

$e_i{}^t z_l$ Koeffizienten der i-ten Potenzreihe

Gehen wir auf Vektorschreibweise über, so erhalten wir

$$x_1(s) = x_1 + \sum_{l=1}^{\infty} z_l s^l$$

konvergent für $|s| < \delta$, $\delta > 0$, z_l Vektoren.

Dabei folgt x_1 aus $x_1 = x_1(0)$. Wir sehen damit $|x_1(s) - x_1| = O(s)$ und die Differentiation nach s ist lokal gewährleistet.

Für mehrfache Eigenwerte bleibt die Idee die gleiche, nur ist es schwieriger den Beweis aufzuschreiben. (Notfalls denke man sich das Verfahren auch auf den einzig praktisch wichtigen Fall der einfachen Eigenwerte beschränkt).

Es war also

$$\left(-\frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} M + K_l\right) n_r + \left(-\bar{\lambda}_{0r} M + K\right) \frac{\partial \bar{n}_r}{\partial a_l} = 0$$

Beachten wir die Symmetrie von M und K so wird jeder Linkseigenvektor auch Rechtseigenvektor, daher gilt:

$$\bar{n}_r{}^t(-\bar{\lambda}_{0r} M + K) = 0$$

Multiplizieren wir die vorletzte Gleichung mit $\bar{n}_r{}^t$ so erhalten wir

$$-\frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} \bar{n}_r{}^t M \bar{n}_r + \bar{n}_r{}^t K_l \bar{n}_r + \bar{n}_r{}^t(-\bar{\lambda}_{0r} M + K) \frac{\partial \bar{n}_r}{\partial a_l} = 0$$

und somit

$$-\frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} \bar{n}_r{}^t M \bar{n}_r + \bar{n}_r{}^t K_l \bar{n}_r = 0$$

Mit der Normierung $\bar{N}^t M \bar{N} = E$ folgt

$$-\frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} + \bar{n}_r^t K_l \bar{n}_r = 0$$

damit
$$\boxed{\frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} = \bar{n}_r^t K_l \bar{n}_r =: \bar{K}_g(r,l)}$$

Die differentielle Änderung des r-ten korrigierten Eigenwertes infolge einer differentiellen Änderung des l-ten Korrekturfaktors a_l ist gleich der r-ten generalisierten Submatrix K_l. Die generalisierte Substeifigkeit $\bar{K}_g(r,l)$ wird mit den Eigenvektoren des korrigierten Rechenmodells gebildet und hängt somit von a ab.

Andererseits gilt: $\bar{N}^t \bar{K} \bar{N} = \bar{\Omega}_{0g}^2 = \bar{\Lambda}_{0g} = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_{01}, \ldots, \bar{\lambda}_{0n}) = \bar{\bar{K}}_g$

Deshalb wird:

$$\bar{\lambda}_{0r} = \bar{\bar{K}}_g(r,r) = \bar{n}_r^t \bar{K} \bar{n}_r = \bar{n}_r^t (K' + \sum_{l=1}^{L} a_l K_l)\, \bar{n}_r$$

$$= \bar{n}_r^t K' \bar{n}_r + \sum_{l=1}^{L} a_l \bar{n}_r^t K_l \bar{n}_r = \bar{n}_r^t K' \bar{n}_r + \sum_{l=1}^{L} a_l \bar{K}_g(r,l)$$

$$= \bar{K}_g'(r,r) + \sum_{l=1}^{L} a_l \frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l}$$

$$\boxed{\bar{\lambda}_{0r} = \bar{K}_g'(r,r) + \sum_{l=1}^{L} a_l \frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{a_l}}$$

Der r-te korrigierte Eigenwert ist explizit linear in den Korrekturparametern darstellbar, hängt aber wegen $\bar{K}_g' = \bar{N}^t K' \bar{N} = \bar{N}^t(a) K' \bar{N}(a) = \bar{K}_g'(a)$ und

$\frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} = \bar{K}_g(r,l) = \bar{n}_r^t K_l \bar{n}_r = \bar{n}_r^t(a) K_l \bar{n}_r(a) = \bar{K}_g(r,l)(a)$ im allgemeinen nichtlinear von a ab. Diese Entwicklungsgleichung

$$\bar{\lambda}_{0r} = \bar{K}_g'(r,r) + \sum_{l=1}^{L} a_l \frac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l}$$

ist nichts anderes als die Homogenitätsrelation von Euler (Vgl. Courant Hilbert, Methoden der mathematischen Physik). Hierzu sei

$\lambda(A)$ die Eigenwertfunktion

dann gilt wegen $Ax = \lambda x \iff sAx = s\lambda x$

$$\lambda(sA) = s\lambda(A)$$

und daher (Differentiation nach s)

$$\lambda(A) = \frac{d}{ds}\lambda(sA) = \sum_{ij} \frac{\partial\lambda}{\partial a_{ij}}(sA)\,\frac{d}{ds}(sa_{ij}) = \sum_{ij} a_{ij}\,\frac{\partial\lambda}{\partial a_{ij}}(sA)$$

Speziell für $s=1$

$$\lambda(A) = \sum_{ij} a_{ij}\,\frac{\partial\lambda}{\partial a_{ij}}(A)$$

und diese Gleichung ist auch hinreichend für $\lambda(sA) = s\lambda(A)$.

Wir sind jetzt in der Lage unsere Residuenfunktion $v(a)$ zu ermitteln.

Es war

$$v_r = \lambda^{\Delta}_{0r} - \bar{\lambda}_{0r} = \lambda^{\Delta}_{0r} - \left(\bar{K}'_g(r,r) + \sum_{l=1}^{L} a_l \frac{\partial\bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l}\right)$$

$$= \lambda^{\Delta}_{0r} - \bar{K}'_g(r,r) - \sum_{l=1}^{L} a_l \frac{\partial\bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l}$$

$$= \lambda^{\Delta}_{0r} - \bar{K}'_g(r,r) - \sum_{l=1}^{L} a_l(\bar{D}v)(r,l)$$

denn $(Dv)(r,l) = \frac{\partial v_r}{\partial a_l} = -\frac{\partial\bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} \Rightarrow (\bar{D}v)(r,l) = -(Dv)(r,l) = \frac{\partial\bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l}$

Also wird

$$v_r = \lambda^{\Delta}_{0r} - \bar{K}'(r,r) - (\bar{D}v)\cdot a(r)$$

Definieren wir $b_r := \lambda^{\Delta}_{0r} - \bar{K}'(r,r)$ so erhalten wir in Matrizenschreibweise

$$\boxed{\begin{array}{lll} v = b - \bar{D}v\cdot a & b_r = \lambda^{\Delta}_{0r} - \bar{K}'(r,r) = \lambda^{\Delta}_{0r} - \bar{n}_r^t K'\bar{n}_r & \\ & (\bar{D}v)(r,l) = \frac{\partial\bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} = \bar{K}_g(r,l) = \bar{n}_r^t K_l \bar{n}_r & \\ b = b(a) \qquad \bar{D}v = \bar{D}v(a) & r=1,\dots,N & l=1,\dots,L \end{array}}$$

Nattke schlägt zur Lösung $\min\limits_{a\in\mathbb{R}^L} \|v(a)\|_G^2$ den Weg über die Normalengleichung vor und erhält aus

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial a}^t \bar{G}\bar{v}\right)\Big|_{a=\hat{a}} = 0$$

und $\bar{G}=G$ $\bar{v}=v$ $\frac{\partial v}{\partial a} = -\bar{D}v$ genau wie im Fall $v = b-Xa$

die Normalengleichung (mit $X=\bar{D}v$)

$$(\bar{D}^t vG\bar{D}v)\Big|_{a=\hat{a}} \cdot \hat{a} = \bar{D}^t vGb\Big|_{a=\hat{a}}$$

und falls man annimmt, daß $\bar{D}^t vG\bar{D}v$ für $\hat{a}$ und damit in einer genügend kleinen Umgebung von $\hat{a}$ invertierbar ist folgt

$$\boxed{\hat{a} = (\bar{D}^t vG\bar{D}v)^{-1}\bar{D}^t vGb\Big|_{a=\hat{a}}}$$

Dabei ist $G=\bar{G}$ eine reell-symmetrische positive Gewichtsmatrix.
Dies ist eine Gleichung der Form $x = \varphi(x)$.
Sein Lösungsalgoritmus lautet

(0) $k = 0$ $\quad$ $k :=$ Interationsindex

(1) $K_g^{(k)}(r,l) := n_r^{(k)t} K_l n_r^{(k)}$ $\quad$ $r=1,\dots,N$

$K'^{(k)}_g(r) := n_r^{(k)t} K' n_r^{(k)}$ $\quad$ $r=1,\dots,N$

wobei $n_r^{(k)}$ aus dem Matrizeneigenwertproblem

$$\left[-\lambda_{0r}^{(k)} M + K^{(k)}\right] n_r^{(k)} = 0 \qquad r=1,\dots,N$$

$$K^{(k)} := K' + \sum_{l=1}^{L} a_l^{(k)} K_l \qquad a^{(0)} := e = (1,\dots,1)\in\mathbb{R}^L$$

mit der Normierung

$$n_r^{(k)t} M n_r^{(k)} = 1 \qquad r=1,\dots,N$$

gewonnen wird.

(2) $a^{(k+1)} := \left(\left[Dv^{(k)}\right]^t G Dv^{(k)}\right)^{-1}\left[Dv^{(k)}\right]^t Gb^{(k)}$

wobei $Dv^{(k)}(r,l) := K_g^{(k)}(r,l)$ $\quad$ $r=1,\dots,N$ $\quad$ $l=1,\dots,L$

$$b^{(k)}(r) := \lambda^{\Delta}_{0r} - K'_g(r) \qquad r=1,\dots,N$$

(3) Wiederholung der Rechnung ab (1) solange bis $\|a^{(k+1)} - a^{(k)}\| < \varepsilon$ wird. $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm im R^L

Er behauptet, daß dieser Algorithmus konvergiert. Dies gilt sicherlich nicht im allgemeinen Fall. Zu beachten ist weiterhin:

(a) Das Verfahren ist bezüglich der Eigenvektoren adaptiv, denn über die Korrektur der Eigenwerte werden gleichzeitig auch die Eigenvektoren angepaßt.

(b) Die Iteration beginnt mit den Eigenwerten und Eigenvekvektoren des Rechenmodells.

Bei größeren Abweichungen zwischen $\lambda^{(k)}_{0r}$ und λ^{Δ}_{0r} kann bei der Iteration die Zuordnung der Eigenwerte verlorengehen. Sie muß deshalb während der Iteration überprüft und notfalls wieder hergestellt werden. Dies kann über die Orthonormierung

$$n_r^{(k+1)t} \, M \, n_r^{(k)} =: \delta_r^{(k+1),(k)}$$

geschehen, denn bei richtiger Zuordnung muß

$$\delta_r^{(k+1),(k)} \approx 1$$

bei falscher Zuordnung hingegen ≈ 0 sein.

Das Verfahren ist hierbei so geschildert (modulo Bezeichnungen) wie dies im Buch von Natke geschieht. Die von ihm ungeklärten Fragen sind hierbei

(1) Existenz der Ableitungen $\dfrac{\partial \bar{\lambda}_{0r}}{\partial a_l} = \bar{n}_r^t K_l \bar{n}_r$

(2) Existenz der Ableitungen $\dfrac{\partial \bar{n}_r}{\partial a_l}$

(3) Konvergenz seines vorgeschlagenen Algorithmus

Die ersten beiden Fragen konnten mit lokalem ja beantwortet werden. Zur Beantwortung der dritten Frage gibt es ebenfalls Kriterien (vgl. z.B. Stör - Burlisch: Verfahren $x = \varphi(x)$).

Diese Bedingungen sind jedoch für unsere komplizierte Funktion φ sehr schwer nachzuprüfen.

Ich möchte deshalb einen anderen Algorithmus vorschlagen (siehe Stör: Einführung in die Numerische Mathematik Band I, Heidelberger Taschenbücher, Kapitel 4.8.4 und 5.4.3).

Wir schreiben unser Residuum folgendermaßen um:

$$v(a) = \hat{\lambda} - f(a) \qquad f(a) := K_g'(a) + Dv(a)a$$

Dabei war $\quad K_g'^t(a) = (\bar{n}_1^t K' \bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_N^t K' \bar{n}_N)$

$$Dv(a)(r,l) = \bar{n}_r^t K_l \bar{n}_r \qquad r=1,\ldots,N \qquad l=1,\ldots,L$$

Wir erhalten das nichtlineare Ausgleichsproblem:

$$\min_{a \in \mathbb{R}^L} \|v(a)\|_G^2 \qquad \|x\|_G^2 := x^t G x \qquad G \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ symmetrisch, p.d.}$$

Stör schlägt in Kapitel 4.8.4 folgenden Algorithmus vor:

(1) a^0 Startvektor (bei uns $a^0 = e \in \mathbb{R}^L$)

(2) Sei $a^{(i)}$ bekannt. Berechne die Lösung $s^{(i)}$ des <u>linearen</u> Ausgleichsproblems

$$\min_{s \in \mathbb{R}} \|v(a^{(i)}) - Df(a^{(i)})s\|_G^2$$

(3) Setze $\quad \varphi(\tau) := \|\hat{\lambda} - f(a^{(i)} + \tau s^{(i)})\|_G^2$

(4) Suche $\quad k := \min\{\nu \in \mathbb{N}_0 : \varphi(2^{-\nu}) < \varphi(0) = \|v(a^{(i)})\|^2\}$

(5) Definiere $\quad a^{(i+1)} := a^{(i)} + 2^{-k} s^{(i)}$

Die Konvergenz dieses Algorithmus wird im Buch von Stoer gesichert. Das Problem der Ermittlung von $Df(a)$ läßt sich umgehen durch den Ansatz von Broyden, der ebenfalls in diesem Buch (in Kapitel 5.4.3) geschildert wird.

Das grundlegende Problem ist in beiden Verfahren die Existenz der Ableitungen, die es erforderlich macht, daß man mit dem Startvektor schon sehr nahe bei der endgültigen Lösung a liegt. Auf dieses Problem geht Nattke ebenfalls nicht ein.

2. Schritt: Korrektur der Trägheitsmatrix aufgrund gemessener Eigenwerte

Die alleinige Korrektur der Trägheitsmatrix des Rechenmodells setzt $\bar{K}=K$ voraus. Das Matrizeneigenwertproblem lautet

$$(-\bar{\lambda}_{0r}\bar{M} + K)\bar{n}_r = 0 \qquad r=1,\ldots,N$$

Es läßt sich mit dem reziproken Eigenwert $\bar{\varkappa}_{0r} := \frac{1}{\bar{\lambda}_{0r}}$ falls $\bar{\lambda}_{0r} \neq 0$ in die Form

$$(-\bar{\varkappa}_{0r}K + \bar{M})\bar{n}_r = 0 \qquad r=1,\ldots,N$$

überführen. Vergleichen wir dieses Problem mit dem des ersten Schrittes und definieren den Residuenvektor

$$v := (\hat{\varkappa}_{01} - \bar{\varkappa}_{01},\ldots, \hat{\varkappa}_{0N} - \bar{\varkappa}_{0N})$$

so erhalten wir das gleiche Problem mit der Übersetzung

$$\varkappa \longleftrightarrow \lambda$$
$$\bar{M} \longleftrightarrow \bar{K}$$
$$K \longleftrightarrow M$$
$$I \longleftrightarrow L \qquad \bar{M} = M' + \sum_{i=1}^{I} a_i M_i \quad \text{früher} \quad \bar{K} = K' + \sum_{l=1}^{L} a_l K_l$$
$$N \longleftrightarrow N$$

Der Formelplan (im Nattke-Schema) wird:

$$\boxed{\hat{a} = (\bar{D}v^t G\bar{D}v)^{-1}\ \bar{D}vGb\,|_{a=\hat{a}}}$$

wobei jetzt:

$$\underline{\bar{D}v = \bar{M}_g} \quad , \quad \underline{\bar{M}_g(r,i) = \tilde{n}_r^t M_i \tilde{n}_r} \qquad r=1,..,N\ ;\ i=1,..,I$$

$$\underline{b(r) = \hat{\varkappa}_{0r} - \bar{M}_g'(r)} \quad , \quad \underline{\bar{M}_g'(r) = \tilde{n}_r^t M' \tilde{n}_r^t} \qquad r=1,..,N$$

Der Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren $\bar{n}_r$ und $\tilde{n}_r$ ergibt sich aus

$$\bar{n}_r^t M \bar{n}_r = 1 \qquad \text{zu} \qquad \boxed{\tilde{n}_r^t := \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}_{0r}}}\ \bar{n}_r}$$
$$\bar{n}_r^t K \bar{n}_r = \bar{\lambda}_{0r}$$

3. Schritt: Korrektur der Trägheits- und Steifigkeitsmatrix aufgrund gemessener Eigenfrequenzen

Die Korrektur der Trägheits- und Steifigkeitsmatrix, bzw. der Trägheits- und Nachgiebigkeitsmatrix (Nachgiebigkeitsmatrix = inverse Steifigkeitsmatrix K) ist jetzt leicht durchzuführen (Gruppenkorrektur in Einzelschritten).

Man beginnt beispielsweise im

1. Iterationsschritt mit der Korrektur der Trägheitsmatrix

und schließt in dem so korrigierten Modell im

2. Iterationsschritt die Korrektur der Steifigkeitsmatrix an.

Weitere Modelle wie

Korrektur aufgrund gemessener Eigenfrequenzen und Eigenvektoren

Korrektur aufgrund gemessener Antworten

sowohl für das ungedämpfte als auch für das gedämpfte System findet man explizit durchgerechnet im Buch von Nattke. Hierbei werden jedoch keine neuen Ideen verwendet, so daß es nicht sinnvoll wäre alle diese Modelle (die mit z.T. sehr komplizierten Formeln enden) hier nochmals durchzurechnen.

LITERATURVERZEICHNIS

1.	H.G. Natke:	Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse (Vieweg)	I,III 106
2.	Schach-Schäfer:	Regressions- und Varianzanalyse (Springer - Hochschultext)	II,118
3.	Arnold:	Stochastic Differential Equations Theory and Applications (John Wiley & Sons)	II
4.	Courant-Hilbert:	Methoden der mathematischen Physik I,II (Springer - Heidelberger Taschenbücher)	5,129
5.	G.H. Goedecke:	Am. J. of Physics 34,571 (1966) . .	6
6.	Istvan Szabo:	Höhere Technische Mechanik (Springer)	11,19 23
7.	H.G. Hahn:	Technische Mechanik V (Vorlesung*).	19,23
8.	H.G. Hahn:	Technische Mechanik II (Vorlesung*).	23
9.	G. Fischer:	Lineare Algebra (Vieweg)	27,34 51,100
10.	Goldstein:	Klassische Mechanik (Akadem. Verlagsgesellschaft) . . .	42
11.	E.T. Whittaker:	Analytical Dynamics (Cambridge Uni. Press (1937)) . . .	44
12.	S. Thimoshenko, D.H. Young:	Advanced Dynamics (New York Mc Graw-Hill (1948)) . .	44
13.	Walter:	Gewöhnliche Differentialgleichungen (Springer - Heidelberger Taschenbücher)	51
14.	E. Goursat:	Cours d'Analyse Mathematique II (Gouthier Villars, Paris)	81
15.	M. Reed/B.Simon:	Methods of Modern Mathematical Physics IV Analysis of Operators (Academic Press)	82
16.	Krickeberg-Ziezold:	Stochastische Methoden (Springer - Hochschultext)	116

17. Gänssler-Stute: Wahrscheinlichkeitstheorie (Springer - Hochschultext) 116

18. Stoer-Burlisch: Einführung in die Numerische Mathematik I,II (Springer - Hochschultext) 120,132 133

*) Vorlesung in Maschinenbauwesen, gehalten an der Universität Kaiserslautern

BISHER SIND FOLGENDE BERICHTE ERSCHIENEN:

Nr. 1 FORSCHUNG

W.G. Eschmann und Ralph Götz
Optimierung von Gelenksechsecken

Nr. 2 WEITERBILDUNG

H. Neunzert, M. Schulz-Reese
Mathematische Weiterbildung

Nr. 3 FORSCHUNG

W. Krüger
The Trippstadt Problem

Nr. 4 WEITERBILDUNG

H. Neunzert, M. Schulz-Reese, K.E. Hoffmann
Mathematics in the University and Mathematics in Industry - Complement or Contrast?

Nr. 5 FORSCHUNG

A.K. Louis
The Limited Angle Problem in Computerized Tomography

Nr. 6 FORSCHUNG

W. Krüger
Regression für Ellipsen in achsenparalleler Lage (Interner Bericht)

Nr. 7 FORSCHUNG

Th. Mietzner
Umströmung von Ecken und Kanten

Nr. 8 FORSCHUNG

W. Krüger, J. Petersen
Simulation und Extrapolation von Rainflow-Matrizen

Nr. 9 FORSCHUNG

W. Krüger, M. Scheutzow u. A. Beste, J. Petersen
Markov- und Rainflow-Rekonstruktionen stochastischer Beanspruchungszeitfunktionen

Nr. 10 FORSCHUNG

Th. Mietzner
Umströmung von Ecken und Kanten, Teil 2

Nr. 11 FORSCHUNG

H. Ploss
Simulationsmethoden zur Lösung der Boltzmanngleichung

Nr. 12 FORSCHUNG

M. Keul
Mathematische Modelle für das Zeitverhalten stochastischer Beanspruchungszeitfunktionen

Nr. 13 AUSBILDUNG

W. Krüger, H. Neunzert, M. Schulz-Reese
Fundamentals of Identification of time series

Nr. 14 FORSCHUNG

H. Moock
Ein Mathematisches Verfahren zur Optimierung von Nocken

Nr. 15 FORSCHUNG

F.-J. Pfreundt
Berechnung und Optimierung des Energiegewinnes bei Anlagen zur Lufterwärmung mittels Erdkanal

Nr. 16 FORSCHUNG

F.-J. Pfreundt
Berechnung einer 2-dimensionalen Kanalströmung mit parallel eingeblasener Luft

Nr. 17 FORSCHUNG

G. Alessandrini
Some remarks on a problem of sound measurements from incomplete data

Nr. 18 AUSBILDUNG

W. Diedrich
Einfluß eines Latentwärmespeichers auf den Wärmefluß durch eine Ziegelwand

Nr. 19 FORSCHUNG

M. Stöhr
Der Kalman-Filter und seine Fehlerprozesse unter besonderer Berücksichtigung der Auswirkung von Modellfehlern

Nr. 20 FORSCHUNG

H. Babovsky
Berechnung des Schalldrucks im Innern eines Quaders

Nr. 21 FORSCHUNG

W. G. Eschmann
Toleranzuntersuchungen für Druckmessgeräte

Nr. 22 FORSCHUNG

G. Schneider
Stratification of solids, a new perspective in three dimensional computer aided design

Nr. 23 FORSCHUNG

H.-G. Stark
Identifikation von Amplituden und Phasensprüngen im Intensitätsverlauf eines Nd-YAG Festkörperlasers

Nr. 24 FORSCHUNG

M. Scheutzow
Einfache Verfahren zur Planung und Auswertung von Navigationsversuchsfahrten

Nr. 25 FORSCHUNG

G.R. Dargahi-Noubary
A Parametric Solution for Simple Stress-Strength Model of Failure with an Application

Nr. 26 FORSCHUNG

U. Helmke, D. Prätzel-Wolters
Stability and Robustness Properties of Universal Adaptive Controllers for First Order Linear Systems

Die Berichte der Arbeitsgruppe Technomathematik können angefordert werden bei:

UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
Fachbereich Kaiserslautern
Arbeitsgruppe Technomathematik
Postfach 3049

6750 Kaiserslautern