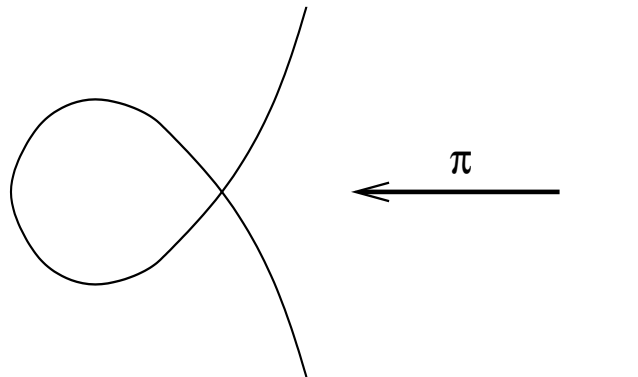


Abgeleitete Kategorien und Matrixprobleme

Igor Burban



Vom Fachbereich Mathematik
der Universität Kaiserslautern
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Doctor rerum naturalium, Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation.

1. Gutachter: Prof. Dr. G.-M. Greuel
2. Gutachter: Prof. Dr. D. van Straten

Vollzug der Promotion: 23.05.2003

D 386

Inhalt

Einführung	3
Kapitel 1. Kohärente Garben auf glatten Kurven	10
1. Satz über die Struktur von unzerlegbaren Objekten	10
2. Vektorbündel auf \mathbf{P}^1	12
3. Satz von Drozd-Greuel über die Wildheit des Klassifikationsproblems für Kurven vom Geschlecht größer als eins	14
Kapitel 2. Vektorbündel auf rationalen Kurven mit gewöhnlichen Doppelpunkten	17
1. Kategorie der Tripel	17
2. Vektorbündel auf einer rationalen Kurve mit gewöhnlichem Doppelpunkt	20
3. Klassifikation torsionsfreier Garben	23
4. Reduktion der Beschreibung von Vektorbündeln und torsionsfreien Garben auf ein Matrixproblem	25
Kapitel 3. Eigenschaften von Vektorbündeln auf Zykeln projektiver Geraden	27
1. Kanonische Form der Matrizen	27
2. Geometrische Beschreibung unzerlegbarer Vektorbündel	29
3. Das duale Vektorbündel eines Vektorbündels	33
4. Kohomologie, Homomorphismenräume und Tensorprodukt von Vektorbündeln auf Zykeln projektiver Geraden	35
5. Stabile Vektorbündel auf einer Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt	38
Kapitel 4. Kohärente Garben auf singulären projektiven Kurven	42
1. Einführung	42
2. Beschreibung unzerlegbarer Komplexe	44
3. Die Hauptkonstruktion	50
4. Der Fall des Ringes $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$	53
5. Kohärente Garben auf einer rationalen Kurve mit gewöhnlichem Doppelpunkt	60
6. Reduktion der Klassifikation von Komplexen auf ein Matrixproblem	66
7. Beschreibung kohärenter Garben, torsionsfreier Garben und Vektorbündel	73
8. Anhang: endlich erzeugte $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Moduln	83
9. Die Vermutung von Polishchuk	86
Kapitel 5. Abgeleitete Kategorien assoziativer Algebren	87
1. Die Hauptkonstruktion	87
2. Nodale Algebren	92
3. Der Fall von $D^-(\mathbf{k}\langle\langle x, y \rangle\rangle/(x^2, y^2)\text{-mod})$	95
4. Gelfandscher Köcher	99
5. Matrixproblem für eine allgemeine nodale Algebra	101
6. Abgeleitete Kategorien und Harish-Chandra Moduln	104
7. Abgeleitete Kategorien von Algebren mit $\text{rad}^2 = 0$	107
8. Darstellungen von $A - D - E$ und $\tilde{A} - \tilde{D} - \tilde{E}$ Köchern	108
9. Abgeleitete Kategorien von zarten Algebren	114

10. Konstruierbare Garben und clannische Algebren	122
11. Kohärente Garben auf \mathbb{P}^1 und Darstellungen des Kronekerschen Köchers	125
12. Exzeptionelle Kollektionen auf einer Kette projektiver Geraden	128
Kapitel 6. Anhang	130
1. Offene Probleme	130
2. Matrixprobleme	132
Literatur	138

Einleitung

Diese Arbeit gehört in die algebraische Geometrie und die Darstellungstheorie und stellt eine Beziehung zwischen beiden Gebieten dar.

Es werden zwei Kategorien untersucht, einerseits die abgeleitete Kategorie kohärenter Garben auf rationalen projektiven Kurven mit nodalen Singularitäten, und andererseits die abgeleitete Kategorie der Darstellungen gewisser assoziativer Algebren. Interesse an dieser Untersuchung dürfte sowohl von Seiten der Darstellungstheorie assoziativer Algebren herrühren als auch von der algebraischen Geometrie, da das Interesse an der abgeleiteten Kategorie kohärenter Garben auf algebraischen Varietäten wegen der Beziehung zur theoretischen Physik (Spiegel-Symmetrie, D-Branes) ständig wächst [15], [16].

In letzten Jahren wurde vermutet, daß die abgeleitete Kategorie kohärenter Garben auf einer Calabi-Yau Mannigfaltigkeit sogenannte B -Branes beschreibt [36], [15]. Auf die Wichtigkeit der abgeleiteten Kategorien von Darstellungen eines Köchers für die Stringtheorie wurde in einer Arbeit von D.Bernstein und M.Douglas und hingewiesen [18]. Dualität aus der Stringtheorie zwischen den B -Branes und A -Branes übersetzt man als eine Äquivalenz zwischen der abgeleiteten Kategorie kohärenter Garben auf einer Calabi-Yau Varietät und einer Kategorie symplektischer Natur (Fukaya-Kategorie). Das ist die sogenannte Kontsevich-Vermutung. Der erste große Erfolg in dieser Richtung wurde in einer Arbeit von Polishchuk und Zaslow erreicht [41]. Sie haben die Kontsevich-Vermutung im Fall einer glatten elliptischen Kurve bewiesen.

Im Fall einer glatten Kurve ist ein Komplex aus der abgeleiteten Kategorie kohärenter Garben zu seiner Kohomologie isomorph (das wurde eigentlich schon in der überhaupt ersten Arbeit über abgeleitete Kategorien [14] bemerkt). Deswegen wird die Beschreibung unzerlegbarer Objekte auf die Beschreibung unzerlegbarer Vektorbündel reduziert. Ferner ist jede kohärente Garbe auf einer glatten Kurve zu einer direkten Summe von Vektorbündeln und Wolkenkratzergerben isomorph. Alle unzerlegbaren Vektorbündel auf einer elliptischen Kurve wurden in einer Arbeit von Atiyah beschrieben [1]. Die Quintessenz dieser Arbeit kann man folgendermaßen formulieren: ein unzerlegbares Vektorbündel wird durch drei Parameter beschrieben: den Rang r , den Grad d und einen Punkt x der elliptischen Kurve.

Polishchuk und Zaslow benutzen eine günstigere Beschreibung unzerlegbarer Vektorbündel durch étale Überlagerungen, die zuerst von Oda [39] entdeckt wurde. Laut dieser Beschreibung ist ein unzerlegbares Vektorbündel im wesentlichen das direkte Bild eines Geradenbündels bezüglich einer étalen Überlagerung von einer größeren elliptischen Kurve. Genauer gesagt, muß man ferner das direkte Bild eines Geradenbündels noch mit einem unipotenten Vektorbündel tensorieren. Um ein unzerlegbares Vektorbündel zu bekommen, sollen der Grad des Geradenbündels und der Rang der Überlagerung teilerfremd sein. Ein Vorteil von Odas Beschreibung ist, daß diese Konstruktion auch eine explizite Beschreibung von Morphismen zwischen Vektorbündeln durch Theta-Funktionen ergibt. Zum Nachteil vom Odas Konstruktion muß man sagen, daß sie im Fall von $\text{char}(\mathbf{k}) > 0$ nicht funktioniert. Man muß sie modifizieren, was auch in [39] gemacht wurde.

Ein naiver Wunsch ist, die Konstruktion von Atiyah auf eine beliebige projektive Varietät zu verallgemeinern. Es wird aber ganz schnell klar, daß das schon für eine Kurve vom Geschlecht 2 (und für jede Varietät höherer Dimension) nicht geht. Das Problem der Beschreibung aller unzerlegbaren Vektorbündel enthält als Unterproblem das Problem der Beschreibung eines Paares von Matrizen. Im Klartext: um alle Vektorbündel auf einer Kurve vom Geschlecht grösser als zwei zu beschreiben muß man zuerst eine kanonische

Form eines Paares von quadratischen Matrizen (X, Y) unter dem simultanen Basiswechsel $(X, Y) \sim (S^{-1}XS, S^{-1}YS)$ finden können. Dies hält man in der Darstellungstheorie für hoffnungslos und nennt das entsprechende Problem *wild*. Das erklärt die Tatsache, daß die abgeleitete Kategorie kohärenter Garben auf einer dreidimensionalen Calabi-Yau Varietät so kompliziert ist: schon die Beschreibung von Wolkenkratzergerben mit einpunktigem Träger ist ein wildes Problem.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit flachen Entartungen projektiver Geraden und elliptischer Kurven. Als Mittel benutzen wir die Technik der Matrixprobleme (siehe die Arbeiten der Kiewer Schule der Darstellungstheorie [23], [44], [45], [5], [6]). Dieses Werkzeug ist bisher mit großem Erfolg in der Darstellungstheorie verwendet worden (siehe z.B. [5]), aber die algebraischen Geometer haben es bisher fast gar nicht verwendet. In [19] wurde jedoch gezeigt, daß es für die Untersuchung von Vektorbündeln auf singulären (reduzierten) Kurven ein sehr kräftiges Mittel ist, um Klassifikationsergebnisse zu erhalten, die bisher mit den klassischen Methoden der algebraischen Geometrie nicht erzielt werden konnten.

Im Fall eines Zyklus projektiver Geraden bekommen wir eine ähnliche Beschreibung unzerlegbarer Vektorbündel wie sie in der Arbeit [39] konstruiert wurde. Ein unzerlegbares Vektorbündel ist das Tensorprodukt eines unipotenten Vektorbündels und des direkten Bildes eines Geradenbündels auf einem größerem Zykel projektiver Geraden bezüglich einer etalen Überlagerung. Dabei soll der Multigrad des Geradenbündels gewissen (ziemlich schwachen) Einschränkungen unterliegen. Wie für glatte elliptische Kurven, funktioniert das nur im Fall $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$.

Die Technik von Matrixproblemen gibt eine Antwort, die von der Charakteristik des Grundkörpers unabhängig ist. Ein unzerlegbares Vektorbündel wird durch einen Vektor ganzer Zahlen \mathbf{d} , eine natürliche Zahl m und einen Parameter $\lambda \in \mathbf{k}^*$ beschrieben. Die Vorteile unserer Kombinatorik werden an vielen Beispielen illustriert. Wir beweisen die Formeln für das duale Vektorbündel eines Vektorbündels. Im Fall $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$ geben wir einen neuen Beweis der Tensorproduktformel [54]. Dies zusammen mit der Formeln für Kohomologiegruppen unzerlegbarer Vektorbündel gibt uns eine Beschreibung von stabilen Vektorbündeln auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt. Ganz überraschend wird ein stabiles Vektorbündel auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt durch seinen Rang, seinen Grad und seine Determinante eindeutig bestimmt. Das ist auch im Fall einer glatten elliptischen Kurve so.

Die Beschreibung von Komplexen ist im Fall eines Zyklus (wie auch einer Kette) projektiver Geraden X viel komplizierter. Eine Möglichkeit, die Kombinatorik der Komplexe auf einem Zykel projektiver Geraden zu verstehen, ist sie als das Verkleben von Geradenbündeln und Wolkenkratzergerben in den Urbildern der singulären Punkte auf der Normalisierung zu beschreiben. Es gibt 3 Typen unzerlegbarer Objekte in $D^-(\text{Coh}_X)$:

1. Shifts einer Wolkenkratzergarbe in einem regulären Punkt;
2. *Bänder* $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ (stetige Serien);
3. *Saiten* $\mathcal{S}(w)$ (diskrete Serien, Komplexe unendlicher homologischer Dimension, wie z.B. \mathbf{k}_p , die Strukturgarbe eines singulären Punktes p).

Dabei haben wir eine *komplette* Antwort auf die Trichothomiefrage: auf welchen Kurven ist die Kategorie bzw. abgeleitete Kategorie kohärenter Garben *zahm*.

SATZ. *Sei die Kategorie $D^b(\text{Coh}_X)$ zahm. Dann ist die Kurve X entweder eine elliptische Kurve oder eine rationale Kurve mit dem dualen Graph vom Typ A oder \tilde{A} .*

Die ganze Konstruktion wird dann auf den Fall gewisser assoziativer Algebren verallgemeinert. Eine Einbettung in eine Algebra mit demselben Radikal spielt die Rolle der Normalisierung. Damit erhalten wir eine Beschreibung unzerlegbarer Objekte von vielen

zahmen abgeleiteten Kategorien von Darstellungen eines Köchers. Ein großer Gewinn ist, daß wir jetzt auch abgeleitete Kategorien von Algebren unendlicher homologischer Dimension betrachten können, was durch bis jetzt bekannte Methode von wiederholbaren Algebren nicht möglich war [31]. Wir beweisen auch abgeleitete Zahmheit von gewissen unendlichdimensionalen Algebren (derartigen Algebren nennt man nodale Algebren). Dazu gehört zum Beispiel der berühmte Gelfandsche Köcher. Die Zahmheit der abgeleiteten Kategorie von Darstellungen des Gelfandschen Köchers impliziert, daß auch die abgeleitete Kategorie von Harish-Chandra-Moduln über $SL_2(\mathbb{R})$ zahm ist.

Wir geben nun einen Überblick über die in den folgenden Kapiteln enthaltenen Aussagen. Im ersten Kapitel betrachten wir Vektorbündel und kohärente Garben auf glatten Kurven.

Sei $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, (X, \mathcal{O}_X) eine projektive Kurve über \mathbf{k} , Coh_X die Kategorie der kohärenten Garben auf X . Dann (siehe z.B [32]) gilt für zwei kohärente Garben $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Coh}_X)$

$$\dim_{\mathbf{k}}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})) < \infty.$$

Dies impliziert, daß in Coh_X der verallgemeinerte Satz von Krull-Schmidt gilt: für jede kohärente Garbe \mathcal{F} gibt es eine Zerlegung als direkte Summe

$$\mathcal{F} \cong \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{F}_i^{m_i},$$

wobei alle \mathcal{F}_i unzerlegbar sind und alle \mathcal{F}_i zusammen mit ihren Multiplizitäten eindeutig bestimmt sind. Daher kann man die folgende Frage stellen: *Wie beschreibt man die unzerlegbaren Objekte von Coh_X ?*

Wir beweisen den Satz von Birkhoff-Grothendieck, daß jedes unzerlegbare Vektorbündel auf \mathbf{P}^1 ein Geradenbündel ist. Dann beweisen wir den Satz, daß eine kohärente Garbe auf einer glatten Kurve zur direkten Summe ihres Torsionsteils und ihres torsionsfreien Quotienten isomorph ist. Zusammen liefert das die Beschreibung unzerlegbarer Objekte sowohl von $\text{Coh}_{\mathbf{P}^1}$ als auch von $D^b(\text{Coh}_{\mathbf{P}^1})$. Anschließend beweisen wir den Satz von Drozd und Greuel, daß die Beschreibung unzerlegbarer Vektorbündel auf Kurven vom Geschlecht größer als eins wild ist [19].

Das Problem mit der Beschreibung unzerlegbarer Vektorbündel auf glatten Kurven ist also geklärt. Dieses Problem ist endlich für die projektive Gerade [30], zahm für elliptische Kurven [1] und wild für Kurven vom Geschlecht größer als eins [19]. Im allgemeinen (singulären) Fall gibt es ein Kriterium [19], welches besagt: die Kategorie von Vektorbündeln auf einer reduzierten Kurve X ist

1. endlich, falls X eine Konfiguration projektiver Geraden vom Typ A_n ist;
2. zahm, falls X
 - (a) eine Konfiguration projektiver Geraden vom Typ \tilde{A}_n ,
 - (b) eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt oder
 - (c) eine elliptische Kurve ist;
3. und ansonsten wild.

Darüber hinaus ist dieser Satz wahr, wenn man statt “Kategorie von Vektorbündeln” “Kategorie von torsionsfreien Garben” schreibt.

Das wird im zweiten Kapitel mit Hilfe der Reduktion auf ein Matrixproblem gezeigt. Unzerlegbare Vektorbündel entsprechen gewissen Matrizen in kanonischer Form. Vektorbündel entsprechen den stetigen Serien (den Bändern) des Matrixproblems. Ein unzerlegbares Vektorbündel auf einem Zykel von s projektiven Geraden wird durch die folgenden Parameter beschrieben: den Vektor der Multigrade $\mathbf{d} = d_1, d_2, \dots, d_s, d_{s+1}, \dots, d_{rs}, d_i \in \mathbb{Z}$,

eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ und einen stetigen Parameter $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Wir nennen das diesen Parametern entsprechende Vektorbündel $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$. Gewisse diskrete Serien (Saiten) entsprechen den torsionsfreien Garben, die nicht lokal frei sind. Sie nennt man $\mathcal{S}(\mathbf{d})$.

Im dritten Kapitel beweisen wir verschiedene Eigenschaften von Vektorbündeln auf Zykeln projektiver Geraden. Sei $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$. Dann gilt [54]:

$$\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda) \cong \mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda) \otimes \mathcal{B}(0, m, 1).$$

Das Vektorbündel $\mathcal{B}(0, m, 1)$ heißt unipotent. Man bekommt es durch Erweiterungen

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{B}(0, m, 1) \longrightarrow \mathcal{B}(0, m-1, 1) \longrightarrow 0.$$

Das Vektorbündel $\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$ ist das direkte Bild des Geradenbündels $\mathcal{L}(\mathbf{d}, \lambda)$ auf dem Zykel $X_{r,s}$. Anschließend beweisen wir eine Formel für das duale Vektorbündel eines Vektorbündels: es gilt (Theorem 3.1)

$$\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)^\vee \cong \mathcal{B}(-\mathbf{d}, m, \lambda^{-1}).$$

Die Beschreibung von Vektorbündeln auf Zykeln projektiver Geraden durch etale Überlagerungen liefert uns einen neuen Beweis der Formel für das Tensorprodukt zweier Vektorbündel $\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$ und $\mathcal{B}(\mathbf{e}, 1, \mu)$ (Algorithmus 4.4).

Anschließend beschreiben wir einfache Vektorbündel auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt. Wie im Fall einer elliptischen Kurve werden sie durch Rang r , Grad d und Determinante λ eindeutig bestimmt; dabei sollen r und d teilerfremd sein. Wir geben einen Algorithmus an, um den Vektor \mathbf{d} eines stabilen Vektorbündels mit festen r, d, λ auszurechnen (Theorem 5.5).

Im Kapitel 4 beschäftigen wir uns mit der abgeleiteten Kategorie kohärenter Garben auf einer Kette und auf einem Zykel projektiver Geraden. Ein Komplex aus der abgeleiteten Kategorie auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt ist entweder Shift einer Wolkenkratzergarbe in einem regulären Punkt oder läßt sich als eine Verklebung von Geradenbündeln und Wolkenkratzergarben in den Urbildern der singulären Punkte vorstellen. Wir geben zuerst die ‘‘Verklebungsregel’’ an. Das erlaubt uns eine lokal freie Auflösung eines Komplexes zu schreiben.

Dann fangen wir mit dem Beweis an. Um unzerlegbare Objekte zu beschreiben führen wir eine neue Kategorie TC_X (Kategorie von Tripeln) ein (Definition 3.1). Es gibt eine Darstellungsäquivalenz zwischen $D^-(\text{Coh}_X)$ und TC_X (Theorem 3.3). Die Beschreibung unzerlegbarer Objekte von TC_X ist zu einem Matrixproblem äquivalent. Zuerst beschreiben wir dieses Matrixproblem im Fall von $D^-(\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)\text{-mod})$. Dann beweisen wir es für eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt, und schließlich den allgemeinen Fall.

Das Hauptergebnis dieser Dissertation ist der folgende Satz (Theorem 6.6).

SATZ. *Sei X ein Zykel projektiver Geraden. Dann gibt es drei Typen unzerlegbarer Objekte in $D^-(\text{Coh}_X)$:*

1. *Shifts von Wolkenkratzergarben in einem regulären Punkt;*
2. *Bänder $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$,*
3. *Saiten $\mathcal{S}(w)$.*

Die Saiten sind genau die Komplexe unendlicher homologischer Dimension.

Diese Beschreibung erlaubt uns auch die Bedingungen auf die Kohomologien dieser Komplexe zu übertragen. Wir zeigen auch, welche kanonischen Formen den unzerlegbaren kohärenten Garben auf X entsprechen (Theorem 7.1).

Als Folgerung erhalten wir einen neuen Beweis des klassischen Problems der Beschreibung aller $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Moduln.

Unser nächster Schritt ist, diese Konstruktion auf den Fall assoziativer Algebren zu verallgemeinern. Das wird im Kapitel 5 gemacht (Theorem 1.3). Wir beweisen die Zahmheit der abgeleiteten Kategorien vieler assoziativer Algebren. Dazu gehören zum Beispiel sogenannte nodale Algebren (Theorem 5.2). Als eine Folgerung bekommen wir, daß die abgeleiteten Kategorien von Harish-Chandra-Moduln über $SL_2(\mathbb{R})$ und $SO(1, n)$ zahm sind (Korollar 4.2, Korollar 6.3). Unsere Technik funktioniert für Algebren, für die das Quadrat des Radikales trivial ist. Das wird an einem Beispiel illustriert.

Anschließend geben wir einen Überblick über die Darstellungstheorie von affinen Dynkin-Köchern und wiederholen ihre Auslander-Reiten-Theorie. Dies wird später für die Beschreibung unzerlegbarer Objekte einer zarten Algebra und einer clannischen Algebra benutzt. Letztere liefert gewisse Information über die abgeleitete Kategorie konstruierbarer Garben auf topologischen Mannigfaltigkeiten. Die Verklebung konstruierbarer Komplexe bezüglich der Stratifizierung scheint mit dem Verkleben aus dem Matrixproblem eng verbunden zu sein. Damit haben wir einen Zusammenhang mit der Theorie von \mathcal{D} -Moduln, da die abgeleitete Kategorie konstruierbarer Garben den \mathcal{D} -Moduln vermöge der Riemann-Hilbertschen Korrespondenz entspricht.

Anschließend betrachten wir eine exzeptionelle Kollektion auf einer Kette projektiver Geraden (Theorem 12.1). Der Endomorphismusköcher dieser Kollektion ist eine zarte Algebra. Die Bedeutung dieser Tatsache liegt daran, daß man exzeptionelle Kollektionen auch auf singulären Fano-Varietäten betrachten kann.

Es bleiben auch Fragen, die wir nicht beantwortet haben. Zum Beispiel bleibt offen, ob die homologische Spiegelsymmetrievermutung von M.Kontsevich für singuläre Kurven richtig ist. Dazu gehört auch die Frage über das Verhalten von Vektorbündeln auf Kurven von arithmetischen Geschlecht 1 in Familien.

Ganz wahrscheinlich gibt es einen Zusammenhang zwischen der abgeleiteten Kategorie kohärenter Garben auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt und der abgeleiteten Kategorie einer zarten Algebra.

In einer Arbeit von Polishchuk wurde ein Zusammenhang zwischen den Vektorbündeln auf Zykeln projektiver Geraden und Lösungen der klassischen Yang-Baxter-Gleichung festgestellt. Polishchuk hat vermutet, daß es eine Korrespondenz zwischen den sogenannten sphärischen Objekten der abgeleiteten Kategorie kohärenter Garben auf Zykeln projektiver Geraden und trigonometrischen Lösungen der Yang-Baxter-Gleichung gibt. Dabei taucht die Frage nach der Klassifikation aller sphärischen Objekte auf.

Man kann auch nach der Gruppe exakter Selbstäquivalenzen aller untersuchten Kategorien fragen. Über diese und andere offene Probleme wird im letzten Kapitel diskutiert.

Der Satz von Drozd und Greuel sowie alle Ergebnisse aus dem zweiten Kapitel waren zuerst in der Arbeit von Yu.Drozd und G.-M.Greuel [19] bewiesen. Wir haben die Reduktion der Beschreibung unzerlegbarer Vektorbündel auf ein Matrixproblem nur didaktisch erwähnt.

Die Formel für das duale Vektorbündel eines unzerlegbaren Vektorbündels aus dem dritten Kapitel wurde in der Arbeit I.Burban, Yu.Drozd und G.-M.Greuel [12] veröffentlicht. Die Beschreibung von Vektorbündeln auf Zykeln projektiver Geraden durch étalen Überlagerungen ist neu. Die Beschreibung von stabilen Vektorbündeln auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt wird im Artikel [9] des Autors erscheinen. Die Formel für das Tensorprodukt zweier unzerlegbarer Vektorbündel auf einem Zykel projektiver Geraden wurde zuerst in der Diplomarbeit von I.Yudin [54] bewiesen. Wir geben einen einfacheren Beweis dieser Formel (er geht aber nur im Fall $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$).

Die Ergebnisse des vierten Kapitels werden in einer gemeinsamen Arbeit mit Yu. Drozd [10] erscheinen. Die Resultate über die abgeleitete Kategorie nodaler Algebren aus dem fünften Kapitel werden in einer gemeinsamen Arbeit mit Yu. Drozd in [11] veröffentlicht.

Die abgeleiteten Kategorien von zarten und clannischen Algebren waren auch von anderen Autoren [40], [47], [26], [3] und [4] untersucht. Das Ergebnis über Kipp-Moduln auf einer Kette projektiver Geraden ist neu.

Über die Resultate dieser Dissertation wurde auf den Tagungen “Vector bundles on algebraic curves”, Bad Honnef, September 2000; “Algebraic geometry and its applications to coding theory, physics and computation”, Eilat, Februar 2001; “GAEL-IX” in Luminy, März 2001; “4-th Ukrainian algebraic conference”, Symu (Ukraine), Juli 2001; “WAGP2002 - K-theory, derived categories and strings”, Genova, Juni 2002, “ICRA-X”, Toronto, August 2002; “Specialized workshop in commutative algebra, algebraic geometry and representation theory”, Toronto, August 2002; sowie auf den Seminaren an der Universität Bielefeld, Universität Essen, Universität Freiburg, Universität Kaiserslautern, Taras Schewtschenko Universität Kiew, Universität Mainz und Universität Paderborn vorgetragen.

Dankeworte

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Mein besonderer Dank geht an Prof. Yu.A.Drozd an der Kiewer Universität für die gute und herzliche Betreuung und an Prof. G.-M.Greuel für die Betreuung vor Ort. Weiterhin möchte ich mich bei Prof. S.A.Ovsienko für die inspirierende Einführung in die Homologische Algebra und Algebraische Geometrie, bei C.Baciu, L.Bodnarchuk, Dr. A.Caldararu, Dr. habil. B.Kreußler, Prof. H.Lenzing, Prof. C.-M.Ringel, Prof. W.Sörgel, Prof. D.van Straten und I.Yudin für die fruchtbaren Diskussionen sowie bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Algebraische Geometrie für die angenehme und arbeitsfördernde Atmosphäre bedanken. Ich bedanke mich bei B.Afshordel, A.Dreyer, M.Perling, E.Westenberger, Dr. habil. K.Wirthmüller und Dr. J.Zintl für die Sprachkorrektur dieser Arbeit.

Diese Arbeit wurde durch das Graduiertenstipendium des Landes Rheinland-Pfalz, das DFG Projekt “Abgeleitete Kategorien kohärenter Garben und Darstellungen associativer Algebren”, den DFG Schwerpunkt “Globale Methoden in der komplexen Geometrie” und CRDF Grant UM2-2094 gefördert.

Kohärente Garben auf glatten Kurven

In diesem Kapitel werden allgemeine Eigenschaften kohärenter Garben auf glatten Kurven untersucht. Wir zeigen, daß eine kohärente Garbe auf einer glatten Kurve zur direkten Summe ihres Torsionsanteiles und ihres torsionsfreien Quotienten isomorph ist. Weiter beweisen wir den Satz von Birkhoff und Grothendieck über die Klassifikation von Vektorbündeln auf \mathbf{P}^1 . Schließlich zeigen wir, daß die Klassifikation von Vektorbündeln auf Kurven vom Geschlecht größer als eins ein wildes Problem ist [19].

1. Satz über die Struktur von unzerlegbaren Objekten

Sei X eine glatte Kurve, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ ihre Strukturgarbe, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_X$ die konstante Garbe der rationalen Funktionen. Sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X . Der Torsionsanteil $T(\mathcal{F})$ ist gegeben durch

$$T(\mathcal{F}) := \ker(\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}).$$

LEMMA 1.1. *Die Garbe $T(\mathcal{F})$ ist eine Untergarbe von \mathcal{F} . Darüber hinaus ist der Träger von $T(\mathcal{F})$ nulldimensional, und $\mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ ist torsionsfrei.*

BEWEIS. Sei A ein kommutativer Noetherscher nullteilerfreier Ring, Q der Quotientenkörper von A , M ein endlich erzeugter Modul. Dann ist der Torsionsanteil von M :

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists a \in A, a \neq 0 : am = 0\} = \ker(M \longrightarrow M \otimes_A Q).$$

Daraus folgt:

$$T(\mathcal{F})_x = (\ker(\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}))_x = \ker(\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{K}_x).$$

Dies bedeutet: \mathcal{F} ist torsionsfrei $\iff \mathcal{F}_x$ ist ein torsionsfreier $\mathcal{O}_{X,x}$ -Modul für alle $x \in X$. Damit ist $\mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ torsionsfrei. \square

Jetzt werden wir zeigen, daß die Sequenz

$$0 \longrightarrow T(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/T(\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

spaltet (X ist glatt!).

Die Garben $T(\mathcal{F})$ und $\mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ sind kohärent (da $T(\mathcal{F}) = \ker(\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee})$). Jetzt benutzen wir die Bedingung der Glattheit von X : für alle Punkte $x \in X$ ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ein diskreter Bewertungsring. Ein Modul über diesem Ring ist genau dann frei, wenn er torsionsfrei ist. Damit ist $\mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ ein Vektorbündel, weil es kohärent und torsionsfrei ist. Insbesondere folgt $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}/T(\mathcal{F}), T(\mathcal{F})) = 0$. Wir wollen zeigen, daß $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}/T(\mathcal{F}), T(\mathcal{F})) = 0$ gilt. Den Zusammenhang zwischen $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1$ und $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1$ liefert Lerays Spektralsequenz. Es gilt $\text{Hom} = \Gamma \circ \text{Hom}$ und deswegen konvergiert die Spektralsequenz $H^p(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \implies \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{p+q}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

Mit dieser Spektralsequenz wird eine exakte Sequenz assoziiert

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{0,2} \longrightarrow H^2 \longrightarrow \dots$$

oder

$$0 \longrightarrow H^1(\text{Hom}) \longrightarrow \text{Ext}^1 \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1) \longrightarrow 0,$$

da $\mathcal{E}xt^2 = 0$ ist. Da sowohl $T(\mathcal{F})$ als auch $\mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ kohärent sind, gilt

$$(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}/T(\mathcal{F}), T(\mathcal{F}))_x = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x/T(\mathcal{F}_x), T(\mathcal{F}_x)).$$

$T(\mathcal{F})$ hat 0-dimensionalen Träger, also ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}/T(\mathcal{F}), T(\mathcal{F}))$ auch eine Wolkenkratzergarbe. Nach dem Grothendieckschen Verschwindungssatz ist $H^1(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}/T(\mathcal{F}), T(\mathcal{F}))) = 0$ und damit

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}/T(\mathcal{F}), T(\mathcal{F})) = H^0(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}/T(\mathcal{F}), T(\mathcal{F}))) = 0.$$

Das beweist, daß die obige Sequenz spaltet und wir erhalten das folgende Korollar.

KOROLLAR 1.2. *Sei X eine glatte Kurve. Dann ist jede kohärente Garbe auf X zu einer direkten Summe von Vektorbündeln und Wolkenkratzergerben isomorph.*

Dieses Korollar hat eine wichtige Folgerung für unser Klassifikationsproblem. Die unzerlegbaren Wolkenkratzergerben haben eine einfache Struktur: $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^n$ ($x \in X, n \in \mathbb{N}$). Zur Beschreibung der Kategorie Coh_X genügt es die Kategorie der Vektorbündel VB_X zu klassifizieren.

2. Vektorbündel auf \mathbf{P}^1

In diesem Kapitel behandeln wir folgendes

THEOREM 2.1. (Siehe [30].) Sei \mathcal{E} eine lokal-freie Garbe auf \mathbf{P}^1 . Dann ist

$$\mathcal{E} \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(n)^{m_n}.$$

BEWEIS. Dieses Theorem hat einen eleganten Beweis mittels Induktion nach dem Rang von \mathcal{E} . Nach dem Grothendieckschen Verschwindungssatz hat $\mathcal{E}(-i)$ keine globalen Schnitte für $i \gg 0$. Sei i die größte ganze Zahl der Art, daß $H^0(\mathcal{E}(-i)) \neq 0$ ist. Dann hat man (nach Wahl eines globalen Schnittes von $\mathcal{E}(-i)$) eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(i) \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Die Garbe \mathcal{F} ist lokal-frei: jedenfalls ist \mathcal{F} zur direkten Summe ihres Torsionsanteiles $T(\mathcal{F})$ und des lokal freien Quotienten $\mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ isomorph. Man betrachte $\mathcal{G} = p^{-1}(T(\mathcal{F}))$, ein Geradenbündel. Die Geradenbündel auf \mathbf{P}^1 sind jedoch bekannt: $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Darüber hinaus impliziert die Existenz eines Monomorphismus $\mathcal{O}(i) \longrightarrow \mathcal{O}(k)$, daß $k > i$ ist. Es gibt also einen Monomorphismus $\mathcal{O}(k) \longrightarrow \mathcal{E}$ mit einem $k > i$. Widerspruch. Also ist $T(\mathcal{F}) = 0$.

\mathcal{F} ist ein Vektorbündel von kleinerem Rang. Nach der Induktionsannahme ist $\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{O}(j)^{r_j}$. Gäbe es ein j mit $j > i$ mit $r_j \neq 0$, dann hätte $\mathcal{E}(-i-1)$ einen globalen Schnitt. Dies folgt aus der Kohomologiesequenz der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{E}(-i-1) \xrightarrow{p} \mathcal{F}(-i-1) \longrightarrow 0.$$

$H^0(\mathcal{O}(-1)) = H^1(\mathcal{O}(-1)) = 0$, und deshalb ist $H^0(\mathcal{E}(-i-1)) = H^0(\mathcal{F}(-i-1))$. Die üblichen Kohomologieberechnungen ergeben, daß $H^0(\mathcal{O}(i)) = \mathbf{k}[x_0, x_1]_i$ für $i \geq 0$ und $H^0(\mathcal{O}(i)) = 0$ für $i < 0$. Dann aber gilt $\text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{O}(i)) = 0$ (weil $\text{Ext}^1(\mathcal{O}(i), \mathcal{O}(j)) = 0$ für $j \geq i$), und deshalb $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}(i)$ ist. □

Skizzieren wir jetzt einen anderen Beweis des Grothendieckschen Satzes. Wir betrachten die zwei Karten $U_0 = \{(x_0 : x_1) | x_0 \neq 0\}$ und $U_1 = \{(x_0 : x_1) | x_1 \neq 0\}$, die eine trivialisierende affine Überdeckung von \mathbf{P}^1 bilden: $U_i \cong \mathbf{A}^1$, $i = 1, 2$ (jedes Vektorbündel auf der affinen Gerade ist trivial). Sei $T = x_0/x_1$. Dann gilt $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(U_1 \cap U_2) = \mathbf{k}[T, T^{-1}]$. Ein Vektorbündel vom Rang n wird durch eine invertierbare Matrix $M \in GL_n(\mathbf{k}[T, T^{-1}])$ definiert. Die Frage ist nun, wann zwei Matrizen M und \tilde{M} isomorphe Vektorbündel definieren. Aus der Definition von Vektorbündel folgt, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn invertierbare Matrizen $U_1 \in GL_n(\mathbf{k}[T])$ und $U_2 \in GL_n(\mathbf{k}[T^{-1}])$ existieren, so daß $\tilde{M} = U_1^{-1} M U_2$.

LEMMA 2.2. Sei M eine invertierbare $n \times n$ Matrix über $\mathbf{k}[T, T^{-1}]$. Mittels elementarer Transformationen in Form von

1. elementaren Spaltentransformationen über $\mathbf{k}[T]$,
2. elementaren Zeilentransformationen über $\mathbf{k}[T^{-1}]$

kann M in eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} T^{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T^{m_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T^{m_n} \end{pmatrix}$$

mit $m_i \in \mathbb{Z}$ umgeformt werden.

Dieses Lemma läßt sich elementar beweisen. Da das Geradenbündel $\mathcal{O}(n)$ die Übergangsmatrix T^n hat, bekommen wir einen einfacheren Beweis des Theorems 2.1.

3. Satz von Drozd-Greuel über die Wildheit des Klassifikationsproblems für Kurven vom Geschlecht größer als eins

Wir haben bereits gesehen, wie man die unzerlegbaren Vektorbündel auf \mathbf{P}^1 klassifiziert. Jetzt werden wir zeigen, daß für Kurven vom Geschlecht größer als eins dieses Problem wild ist. Um die Wildheit zu zeigen, verwendet man häufig folgendes

LEMMA 3.1. *Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie, $M, N \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ mit $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$. Seien $\xi, \xi' \in \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(N, M)$ zwei Erweiterungen,*

$$\xi : 0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

$$\xi' : 0 \longrightarrow M \longrightarrow K' \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Dann ist $K \cong K'$ genau dann, wenn es zwei Isomorphismen $f : M \longrightarrow M$ und $g : N \longrightarrow N$ existieren, so daß $f\xi = \xi'g$ ist.

BEWEIS. Sei $f\xi = \xi'g$ in $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(N, M)$. Das bedeutet die Existenz des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccccccccc} \xi : & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow id & & \\ f\xi = \xi'g : & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \tilde{K} & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow g & & \\ \xi' : & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Damit ist $K \cong K'$ nach dem 5-Lemma.

Sei jetzt $K \cong K'$, $h : K \longrightarrow K'$ ein Isomorphismus.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow h & & & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & K' & \xrightarrow{\beta} & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Dann gilt $h(M) \subseteq M$. Wäre $h(M) \not\subseteq M$, dann wäre $\beta h : M \longrightarrow N$ ungleich Null. Widerspruch! Also ist $h(M) \subseteq M$, und es entsteht ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow h & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Mit h^{-1} verfahren wir analog. Deswegen ist f ein Isomorphismus. \square

LEMMA 3.2. *Sei X eine glatte Kurve vom Geschlecht größer als eins, $x, y \in X, x \neq y$. Dann gilt*

$$\dim_{\mathbf{k}}(H^1(X, \mathcal{O}(y-x))) = g - 1.$$

BEWEIS. Wegen $g(X) > 0$ impliziert $x \neq y$, daß $x \not\sim y$ ist, also hat $\mathcal{O}(x-y)$ keine globalen Schnitte. Es gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)) = \Gamma \circ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)) = \Gamma(X, \mathcal{O}(y-x)) = 0.$$

Die Garben $\mathcal{O}(x)$ und $\mathcal{O}(y)$ sind lokal frei, deshalb ist $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)) = 0$. Uns interessiert $\text{Ext}^1(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y))$. Die exakte Sequenz der jüngeren Terme der Spektralsequenz der Verknüpfung $\Gamma \circ \mathcal{H}om$ lautet

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{H}om(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y))) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)) \longrightarrow H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y))) \longrightarrow 0.$$

Also ist $\text{Ext}^1(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)) = H^1(X, \mathcal{O}(y-x))$. Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt

$$\dim_{\mathbf{k}}(H^0(X, \mathcal{O}(y-x))) - \dim_{\mathbf{k}}(H^1(X, \mathcal{O}(y-x))) = \deg(y-x) - g + 1 = 1 - g,$$

oder $\dim_{\mathbf{k}}(H^1(X, \mathcal{O}(y-x))) = g-1 \geq 0$. \square

THEOREM 3.3. *Sei X eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann ist die Kategorie der Vektorbündel auf X wild.*

BEWEIS. Die Wildheit bedeutet folgendes: auf $X \times A^2$ gibt es eine strikte Garbe \mathcal{M} . Das heißt, \mathcal{M} ist ein $\mathcal{O}_X \otimes \mathbf{k}[x, y] = \mathcal{O}_{X \times A^2}$ -Modul mit der Eigenschaften:

1. Falls N ein endlich-dimensionaler unzerlegbarer $\mathbf{k}[x, y]$ -Modul ist, dann ist auch $\mathcal{M} \otimes_{\mathbf{k}[x, y]} N$ unzerlegbar.
2. Falls N, N' zwei nicht isomorphe $\mathbf{k}[x, y]$ -Moduln sind, dann sind auch $\mathcal{M} \otimes_{\mathbf{k}[x, y]} N$ und $\mathcal{M} \otimes_{\mathbf{k}[x, y]} N'$ nicht isomorph.

Bezeichnen wir $\Lambda = \mathbf{k}[x, y], \mathcal{S} = \mathcal{O} \otimes \Lambda, \mathcal{S}(x) = \mathcal{O}(x) \otimes \Lambda$. Offensichtlich gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)) \otimes \Lambda,$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^1(\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(y)) \cong \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}(x), \mathcal{O}(y)) \otimes \Lambda.$$

Sei \mathcal{M} ein Objekt, das durch die Erweiterung

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(x_1) \oplus \mathcal{S}(x_2) \oplus \mathcal{S}(x_3) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{S}(x_4) \oplus \mathcal{S}(x_5) \longrightarrow 0$$

gegeben wird, mit paarweise verschiedenen $x_1, \dots, x_5 \in X$.

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{S}(x_4) \oplus \mathcal{S}(x_5), \mathcal{S}(x_1) \oplus \mathcal{S}(x_2) \oplus \mathcal{S}(x_3)) =$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(x_4), \mathcal{O}(x_1)) \otimes \Lambda & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(x_5), \mathcal{O}(x_1)) \otimes \Lambda \\ \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(x_4), \mathcal{O}(x_2)) \otimes \Lambda & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(x_5), \mathcal{O}(x_2)) \otimes \Lambda \\ \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(x_4), \mathcal{O}(x_3)) \otimes \Lambda & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(x_5), \mathcal{O}(x_3)) \otimes \Lambda \end{pmatrix}.$$

Wir wissen, daß $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(x_i), \mathcal{O}(x_j)) \neq 0$. Sei $0 \neq \xi_{ij} \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(x_i), \mathcal{O}(x_j))$, und \mathcal{M} entspricht

$$\begin{pmatrix} \xi_{14} & \xi_{15} \\ \xi_{24} & \xi_{25}x \\ \xi_{34} & \xi_{35}y \end{pmatrix}.$$

Sei N ein endlich-dimensionaler $\mathbf{k}[x, y]$ -Modul. Dann entspricht $\mathcal{M}(N) = \mathcal{M} \otimes_{\Lambda} N$ einer Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi_{14}I & \xi_{15}I \\ \xi_{24}I & \xi_{25}X \\ \xi_{34}I & \xi_{35}Y \end{pmatrix}.$$

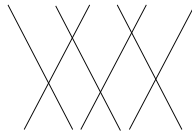
I, X, Y sind quadratische Matrizen der Größe $\dim_{\mathbf{k}}(N)$, X, Y sind die Matrizen der Multiplikation mit x und y . Es gibt keine Homomorphismen zwischen dem Faktormodul $\mathcal{A}_2 = \mathcal{S}(x_4) \oplus \mathcal{S}(x_5)$ und dem Untermodul $\mathcal{A}_1 = \mathcal{S}(x_1) \oplus \mathcal{S}(x_2) \oplus \mathcal{S}(x_3)$. Wir haben ein Kriterium, welches besagt, wann zwei Erweiterungen isomorphen Moduln entsprechen (die Automorphismen von $\mathcal{A}_1 \otimes N$ und $\mathcal{A}_2 \otimes N$ sind die Blockmatrizen):

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{14}I & \xi_{15}I \\ \xi_{24}I & \xi_{25}X \\ \xi_{34}I & \xi_{35}Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{14}I & \xi_{15}I \\ \xi_{24}I & \xi_{25}\tilde{X} \\ \xi_{34}I & \xi_{35}\tilde{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}.$$

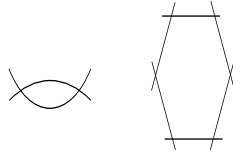
Daraus folgt: $T_1 = T_2 = T_3 = S_1 = S_2$. Dies bedeutet, daß $S^{-1}XS = \tilde{X}$, $S^{-1}YS = \tilde{Y}$, und schließlich $N \cong \tilde{N}$. Dasselbe Ausrechnen zeigt, daß $\mathcal{M}(N)$ unzerlegbar ist genau dann, wenn der $\mathbf{k}[[x, y]]$ -Modul N unzerlegbar ist. \square

Die komplette Antwort auf die Frage, auf welchen projektiven Kurven die Kategorie von Vektorbündeln endlich, zahm oder wild ist, sieht so aus:

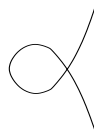
Die Kategorie von Vektorbündeln VB_X auf einer reduzierten Kurve X ist



1. endlich, falls X eine Konfiguration projektiver Geraden vom Typ ist,
2. zahm, falls X
 - (a) eine Konfiguration projektiver Geraden vom Typ



- ist,
- (b) eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt ist,



- (c) eine glatte elliptische Kurve ist.
3. Ansonsten ist das Klassifikationsproblem wild.

Im nächsten Kapitel geben wir die explizite Beschreibung der unzerlegbaren Objekte im endlichen und zahmen Fall.

Vektorbündel auf rationalen Kurven mit gewöhnlichen Doppelpunkten

In diesem Kapitel werden Vektorbündel auf rationalen Kurven mit gewöhnlichen Doppelpunkten untersucht. Diese Ergebnisse wurden zum ersten mal in [19] bewiesen. Man reduziert die Beschreibung unzerlegbarer Vektorbündel auf ein Matrixproblem. Im Fall einer Kette projektiver Geraden beweisen wir, daß alle unzerlegbaren Vektorbündel Geradenbündel sind. Im Fall eines Zyklus projektiver Geraden erhalten wir ein zahmes Matrixproblem. Ein unzerlegbares Vektorbündel wird durch einen Vektor ganzer Zahlen \mathbf{d} , eine natürliche Zahl m und einen stetigen Parameter $\lambda \in \mathbf{k}^*$ beschrieben. Für das entsprechende Vektorbündel benutzen wir die Notation $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$. Die Matrizen aus diskreten Serien des Matrixproblems, die vollen Spaltenrang haben, entsprechen den torsionsfreien Garben, die nicht lokal frei sind. Sie bezeichnet man $\mathcal{S}(\mathbf{d})$.

1. Kategorie der Tripel

Sei X eine reduzierte singuläre Kurve, $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ ihre Normalisierung, $\tilde{\mathcal{O}} = \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ (das bedeutet $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x} = \bar{\mathcal{O}}_{X,x}$, wobei $\bar{\mathcal{O}}_{X,x}$ der ganze Abschluß ist).

LEMMA 1.1. *Seien X und Y zwei algebraische Schemata, $f : Y \rightarrow X$ ein affiner Morphismus. Dann sind die Kategorien von kohärenten \mathcal{O}_Y -Moduln und kohärenten $f_*(\mathcal{O}_Y)$ -Moduln äquivalent.*

BEWEIS. Bemerken wir zuerst, daß aufgrund der Tatsache, daß der Morphismus f affin ist, f_* kohärente \mathcal{O}_Y -Garben in kohärente \mathcal{O}_X -Garben abbildet. Sei $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ eine affine Überdeckung von X , etwa mit $U_i = \text{Spec}(A_i)$. Sei $V_i = f^{-1}(U_i) = \text{Spec}(B_i)$. Man konstruiert den quasiinversen Funktor $(f_*(\mathcal{O}_Y)\text{-mod}) \rightarrow (\mathcal{O}_X\text{-mod})$. Sei \mathcal{F} ein $f_*(\mathcal{O}_Y)$ -Modul. Seine Einschränkung $\mathcal{F}|_{U_i}$ läßt sich als ein B_i -Modul betrachten. Wegen $Y = \bigcup_{i=1}^n \text{Spec}(B_i)$ kann man diese Moduln zu einem \mathcal{O}_Y -Modul verkleben. Die ganze Konstruktion ist lokal und daher erhalten wir einen kohärenten \mathcal{O}_Y -Modul. \square

Sei $\mathcal{J} = \text{Ann}_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ der Konduktor, $\mathcal{A} = \mathcal{O}/\mathcal{J}$ und $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{J}$. Der Träger von \mathcal{A} (bzw. $\tilde{\mathcal{A}}$) besteht aus den singulären Punkten von X , also ist er endlich. Unser Ziel ist, die Kategorie VB_X der Vektorbündel auf X zu beschreiben ($\text{VB}_{\mathcal{C}}$ bezeichnet die Kategorie lokal freier \mathcal{C} -Moduln, wobei \mathcal{C} eine Ringgarbe auf X ist).

Das folgende Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \text{VB}_{\mathcal{O}} & \longrightarrow & \text{VB}_{\mathcal{A}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{VB}_{\tilde{\mathcal{O}}} & \longrightarrow & \text{VB}_{\tilde{\mathcal{A}}} \end{array}$$

kommutiert. Wir wollen ein Vektorbündel \mathcal{B} aus seinen Bildern in $\text{VB}_{\tilde{\mathcal{O}}}$ und $\text{VB}_{\mathcal{A}}$ rekonstruieren. Da definieren wir wie folgt:

DEFINITION 1.2. Die Kategorie der Tripel (Bezeichnung T_X) besteht aus folgenden Daten:

1. Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{M}, \tilde{i})$, wobei $\tilde{\mathcal{F}} \in \text{VB}_{\tilde{\mathcal{O}}}$, $\mathcal{M} \in \text{VB}_{\mathcal{A}}$, $\tilde{i} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{F}} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}}$ ist.
2. Ein Morphismus $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{M}, \tilde{i}) \xrightarrow{(\Phi, \varphi)} (\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{N}, \tilde{j})$ wird durch ein Paar $(\Phi : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}, \varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N})$ gegeben, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \mathcal{F} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} \\ \varphi \otimes \downarrow & & \downarrow \Phi \otimes \\ \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \mathcal{G} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} \end{array}$$

kommutiert.

THEOREM 1.3. Der Funktor $\mathbf{F} : \text{VB}_X \rightarrow T_X$

$$\mathcal{E} \rightarrow (\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{M}, \tilde{i})$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= \mathcal{E} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{O}}, \quad \mathcal{M} = \mathcal{E} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \mathcal{A}, \\ \tilde{i} : \mathcal{E} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} &\xrightarrow{\cong} \mathcal{E} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{O}} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

sind, ist eine Äquivalenz der Kategorien.

BEWEIS. Wir betrachten den inversen Funktor $T_X \xrightarrow{\Psi} \text{VB}_X$. Sei $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{M}, \tilde{i})$ ein Tripel, i die Verknüpfung von \tilde{i} mit der kanonischen Einbettung $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}}$. Man betrachte das Pullbackdiagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

in der Kategorie der $\tilde{\mathcal{O}}$ -Moduln. Das Pullback ist funktoriell, also muß man zeigen:

1. das Pullback von π und i ist ein Vektorbündel,
2. die Funktoren Φ und Ψ sind quasiinvers zueinander.

1. Um den ersten Punkt zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß der $\tilde{\mathcal{O}}_X$ -Modul \mathcal{F} kohärent ist (weil ein kohärenter $\tilde{\mathcal{O}}$ -Modul auch $\tilde{\mathcal{O}}_X$ -kohärent ist). Man muß also zeigen, daß für alle Punkte $x \in X$ $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{O}_{X,x}^r$ ($r = \text{rank}(\tilde{\mathcal{F}})$) ist. Falls x ein regulärer Punkt ist, ist die Aussage klar:

$$(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}})_x \cong (\tilde{\mathcal{F}})_x \cong \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}^r \cong \mathcal{O}_{X,x}^r.$$

Sei jetzt $x \in \text{Sing}(X)$. Man bezeichne $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,x}$, $\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{\mathcal{O}}_{X,x}$, $J = \mathcal{J}_x$, $\mathcal{A} = \mathcal{O}/J$, $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{O}}/J$, $F = \mathcal{F}_x$, $\tilde{F} = \tilde{\mathcal{F}}_x$, $M = \mathcal{M}_x$. Aus der Projektivität von \mathcal{O} erzielt sich das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathcal{O}^r & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \mathcal{A}^r & & \\ & & \psi & & \downarrow \text{iso} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{F} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{F} & \longrightarrow & \tilde{F} & \longrightarrow & \tilde{F}/\mathcal{J}\tilde{F} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Die Injektivität der Abbildung i impliziert, daß $F \rightarrow \tilde{F}$ auch injektiv ist. Dann ist F torsionsfrei. Die Abbildung ψ ist ein Isomorphismus modulo J : wenn man das Diagramm mit A tensoriert, dann ist die Abbildung $J\tilde{F} \otimes_O A \rightarrow F \otimes_O A$ die Nullabbildung und die induzierte Abbildung $\bar{\psi} : A^r \rightarrow F/JF$ ein Isomorphismus. Nach Nakayamas Lemma ist ψ ein Epimorphismus. Wir müssen noch zeigen, daß ψ injektiv ist. Um dies zu beweisen, tensoriert man die erste Zeile mit $\otimes_O \tilde{A}$ und die zweite mit $\otimes_O \tilde{A}$. Das Diagramm bleibt dabei kommutativ, und nach Nakayamas Lemma ist $F \otimes_O \tilde{O} \rightarrow \tilde{F}$ ein Epimorphismus ($\tilde{i} : M \otimes_A \tilde{A} \rightarrow \tilde{F}/J\tilde{F}$ ist nach Voraussetzung ein Isomorphismus). Also ist $\text{rank}(F) = \text{rank}_Q(F \otimes_A Q) = \text{rank}(\tilde{F}) = r$. Aber ein Epimorphismus zweier torsionsfreier Moduln vom selben Rang ist ein Isomorphismus: der Kern hat einerseits den Rang 0, also ist ein Torsionsmodul. Andererseits ist er ein Untermodul eines torsionsfreien Moduls). Damit sind $O^r \xrightarrow{\psi} F$ und $F \otimes_O \tilde{O} \rightarrow \tilde{F}$ Isomorphismen. Wir haben den ersten Punkt bewiesen.

2. Sei $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \otimes_O \tilde{O}$. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \Phi & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

und die universelle Eigenschaft des Pullbacks implizieren, daß $\Psi\Phi(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$ ist. Interessanter ist der Beweis von $\Phi\Psi(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{M}, \tilde{i}) \cong (\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{M}, \tilde{i})$: aus dem letzten Diagramm erhält man

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} \otimes_O \tilde{O} & \longrightarrow & \mathcal{F} \otimes_O \tilde{O} \otimes_{\tilde{O}} \tilde{A} & \longleftarrow & \mathcal{F} \otimes_O \mathcal{A} \\ \downarrow \Phi \otimes \text{id} & & \downarrow & & \downarrow \Psi \otimes \text{id} \\ \tilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}} \otimes_{\tilde{O}} \tilde{A} & \longleftarrow & \mathcal{M} \end{array}$$

Wir haben schon gezeigt, daß $\Phi \otimes \text{id}$ ein Isomorphismus ist. Durch Anwendung des Funktors $\otimes_O \mathcal{A}$ auf die exakte Sequenz

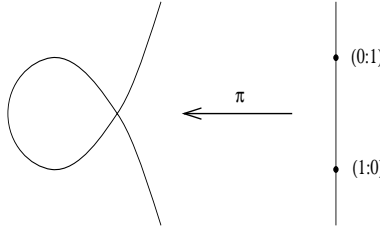
$$0 \longrightarrow \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

erhält man $0 \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_O \mathcal{A} \xrightarrow{\Psi \otimes \text{id}} \mathcal{M} \longrightarrow 0$. Dies impliziert, daß die Funktoren Φ und Ψ quasiinvers sind. □

2. Vektorbündel auf einer rationalen Kurve mit gewöhnlichem Doppelpunkt

Sei X die ebene Kurve, die durch die Gleichung $zy^2 - x^3 - zx^2 = 0$ gegeben wird. Ihre Normalisierung ist $\mathbf{P}^1 = \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$. Wie im letzten Kapitel sei $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$, $\tilde{\mathcal{O}} = \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$, $\mathcal{J} = \text{Ann}_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$.

Die Normalisierungsabbildung ist endlich, und wir dürfen die kohärenten $\tilde{\mathcal{O}}$ -Moduln mit den kohärenten $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -Moduln identifizieren. Es ist klar, daß der Konduktor \mathcal{J} sich mit der Idealgarbe \mathcal{I} der beiden Urbilder des singulären Punktes identifizieren läßt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß diese Punkte $(0 : 1) = 0$ und $(1 : 0) = \infty$ sind.



Berechnen wir nun die Garben $\mathcal{A} = \mathcal{O}/\mathcal{J}$ und $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{J}$. Ihre Träger bestehen aus dem singulären Punkt der Kurve X ; also genügt es, die Keime dieser Garben im singulären Punkt zu berechnen. Man betrachte die nahliegende affine Karte der Kurve X . $\mathcal{O}_0 = \mathbf{k}[x, y]_{\langle x, y \rangle} / (y^2 - x^3 - x^2)$. Die Normalisierung von $\mathbf{k}[x, y] / (y^2 - x^3 - x^2)$ ist $\mathbf{k}[t]$, wobei die Abbildung durch $x \mapsto t^2 - 1, y \mapsto t(t^2 - 1)$ gegeben wird. Die multiplikativ abgeschlossene Menge $(x, y)\mathbf{k}[x, y]$ wird in $\{p(t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \mid p(0, 0) \neq 0\} = \{q(t) \mid q(-1) \neq 0, q(+1) \neq 0\}$ abgebildet. Dies ist wiederum eine multiplikativ abgeschlossene Menge, und die Lokalisierung von $\mathbf{k}[t]$ bezüglich dieser Menge ist zu $\tilde{\mathcal{O}}_0$ isomorph.

Hieraus sieht man, daß der Konduktor $\mathcal{J}_0 = (x, y) = (t^2 - 1)$ ist. Darüber hinaus folgt: $\mathcal{A} = (\mathbf{k})_p$, $\tilde{\mathcal{A}} = (\mathbf{k} \times \mathbf{k})_p$, wobei p der singuläre Punkt der Kurve X ist.

Im folgenden benutzen wir die Bezeichnung $\tilde{\mathcal{O}}(n) = \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n))$, $n \in \mathbb{Z}$.

Was impliziert das Ergebnis des letzten Kapitels? Ein Vektorbündel \mathcal{F} auf der Kurve X wird eindeutig durch ein Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{M}, \tilde{i})$ bestimmt. $\tilde{\mathcal{F}}$ ist ein lokal freier $\tilde{\mathcal{O}}$ -Modul, oder, was dasselbe ist, ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$ -Modul. Nach dem Satz von Grothendieck ist $\tilde{\mathcal{F}} \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{O}}(n)^{m_n}$.

Weil $\mathcal{A} = \mathbf{k}_p$ ist, ist \mathcal{M}_0 einfach ein \mathbf{k} -Vektorraum, und $\tilde{i} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}}$ ist nichts anderes als eine $(\mathbf{k} \times \mathbf{k})$ -lineare Abbildung. Deshalb hat die Abbildung \tilde{i} zwei Komponenten $i(0)$ und $i(\infty)$. Die Abbildung $\mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ ist die Diagonalabbildung $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{k}$, die Bedingung, daß $\tilde{i} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}$ ein Isomorphismus ist bedeutet deshalb, daß die beiden Matrizen $i(0)$ und $i(\infty)$ quadratisch und nicht entartet sind.

Fixieren wir eine Zerlegung in die direkte Summe unzerlegbarer Objekte:

$\tilde{\mathcal{F}} \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{O}}(n)^{m_n}$. Wir identifizieren $\tilde{\mathcal{O}}(n)/\mathcal{J}$ mit $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n)/\mathcal{I}$ (wobei $\mathcal{I} = \pi^*(\mathcal{J})$ ist) und

wählen lokale Basen von $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n)$ in den Punkten 0 und ∞ . Dies induziert eine Basis des $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -Moduls $\tilde{\mathcal{O}}(n)/\mathcal{J}$ und bedeutet, daß die Matrizen $i(0)$ und $i(\infty)$ sich in einer Blockform schreiben lassen:

BEISPIEL 2.1. Das folgende Datum (Band) definiert ein unzerlegbares Vektorbündel vom Rang 2 auf X :

Normalisierung: $\tilde{\mathcal{O}} \oplus \mathcal{O}(n)$, $n \neq 0$, Verklebungsmatrizen:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \mathbf{n} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \lambda \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{0} \quad \mathbf{0}$$

3. Klassifikation torsionsfreier Garben

Wir haben bereits gesehen, daß die Klassifikation der Vektorbündel auf Konfigurationen projektiver Geraden sich auf ein Matrixproblem reduzieren läßt.

Dieses Matrixproblem hat zwei Typen von unzerlegbaren Objekten: Bänder und Saiten (siehe den Anhang). Die Bänder (sie hängen von einem stetigen Parameter ab) entsprechen den Vektorbündeln. Die natürliche Frage ist: was entspricht den Saiten? Wir werden in diesem Kapitel sehen, daß sie denjenigen torsionsfreien Garben entsprechen, die keine Vektorbündel sind.

Sei \mathcal{B} eine torsionsfreie Garbe auf X (äquivalent: $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{K}_X$ ist injektiv). Man betrachte $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{\mathcal{O}}_X$; diese Garbe kann Torsion haben.

Sei zum Beispiel $R = \mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$; dann ist die Normalisierung $\bar{R} = \mathbf{k}[[x]] \times \mathbf{k}[[y]]$. In $\bar{R} \otimes_R \bar{R}$ ist $[1, x] \otimes [1, y] - [1, y] \otimes [1, x] \neq 0$ ein Torsionselement: es wird von $[y, x]$ annulliert.

Wir setzen

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{\mathcal{O}}_X / T(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{\mathcal{O}}_X).$$

Es ist klar, daß die kanonische Abbildung von \mathcal{O}_X -Moduln $\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ injektiv ist. Wie im Fall von Vektorbündeln wird eine torsionsfreie Garbe auf X durch ein Tripel $(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}/\mathcal{J}\mathcal{B}, i : \mathcal{B}/\mathcal{J}\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}})$ beschrieben.

DEFINITION 3.1. *Man betrachte die folgende Kategorie $\tilde{\mathcal{T}}_X$: ihre Objekte sind Tripel $(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{M}, i)$, wobei*

1. $\tilde{\mathcal{B}}$ ein torsions-freier (= lokal freier) $\tilde{\mathcal{O}}$ -Modul,
2. \mathcal{M} ein lokal freier \mathcal{A} -Modul und
3. $i : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}$ eine Einbettung von \mathcal{A} -Moduln ist, derart daß die induzierte Abbildung $\tilde{i} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}$ ein Epimorphismus ist.

Die Morphismen zwischen zwei Tripeln $(\tilde{\mathcal{B}}_1, \mathcal{M}_1, i_1)$ und $(\tilde{\mathcal{B}}_2, \mathcal{M}_2, i_2)$ sind wiederum Paare (Φ, φ) , bestehend aus einem Morphismus von $\tilde{\mathcal{O}}$ -Moduln $\tilde{\mathcal{B}}_1 \xrightarrow{\Phi} \tilde{\mathcal{B}}_2$ und einem Morphismus von \mathcal{A} -Moduln $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}_2$. Dabei wird verlangt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{B}}_1 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}}_1 \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} & \xleftarrow{i_1} & \mathcal{M}_1 \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \tilde{\Phi} & & \downarrow \varphi \\ \tilde{\mathcal{B}}_2 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}}_2 \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} & \xleftarrow{i_2} & \mathcal{M}_2 \end{array}$$

kommutiert.

THEOREM 3.2. *Der Funktor*

$$\begin{array}{c} \text{TF}_X \longrightarrow \tilde{\mathcal{T}}_X \\ \mathcal{B} \mapsto (\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}/\mathcal{J}\mathcal{B}, \mathcal{B}/\mathcal{J}\mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}) \end{array}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

BEWEIS. Wie im Fall von Vektorbündeln betrachtet man den inversen Funktor

$$\tilde{\mathcal{T}}_X \longrightarrow \text{TF}_X,$$

welcher durch ein Pullback gegeben wird:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Als Untermodul eines torsionsfreien Moduls ist \mathcal{B} torsionsfrei. Wie bei Vektorbündeln ist $\text{rank}(\mathcal{B}) = \text{rank}(\tilde{\mathcal{B}})$. Die Abbildung $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ ist es ein Epimorphismus modulo dem Konduktor (man wende den Funktor $\otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}}$ auf das Pullback-Diagramm an). Aus Nakayamas Lemma folgt, daß $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ ein wirklicher Epimorphismus ist. Aber die Torsion von $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}$ liegt im Kern dieser Abbildung, und die induzierte Abbildung

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}} / T(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$$

ist ein Epimorphismus zweier torsionsfreier Moduln vom gleichen Rang. Deshalb ist diese Abbildung ein Isomorphismus. \square

Dieses Ergebnis bedeutet, daß die Beschreibung von TF_X dem VB_X -Matrixproblem entspricht. Die torsionsfreien Moduln, welche nicht lokal frei sind, entsprechen der diskreten Serie des Matrixproblems. Die Bedingung, daß $\tilde{i} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}} / \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}$ ein Epimorphismus ist, bedeutet, daß die beiden Matrizen, die einem singulären Punkt entsprechen, eine Abbildung von vollem Rang definieren.

BEISPIEL 3.3. Sei X eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt. $\tilde{\mathcal{O}}$ ist eine kohärente torsionsfreie Garbe und eine natürliche Frage ist, was diesem Objekt in der Kategorie der Tripel entspricht? Die Quotientengarbe $\tilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}} / t(\tilde{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}})$ ist $\tilde{\mathcal{O}}$ und die Abbildung $\tilde{\mathcal{O}} / \mathcal{J} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}} / \mathcal{J}$ einfach die Identitätsabbildung. Also entspricht die Garbe $\tilde{\mathcal{O}}$ dem Tripel: $(\tilde{\mathcal{O}}, \mathbf{k}^2, i)$, und die Matrizen sind

$$\begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

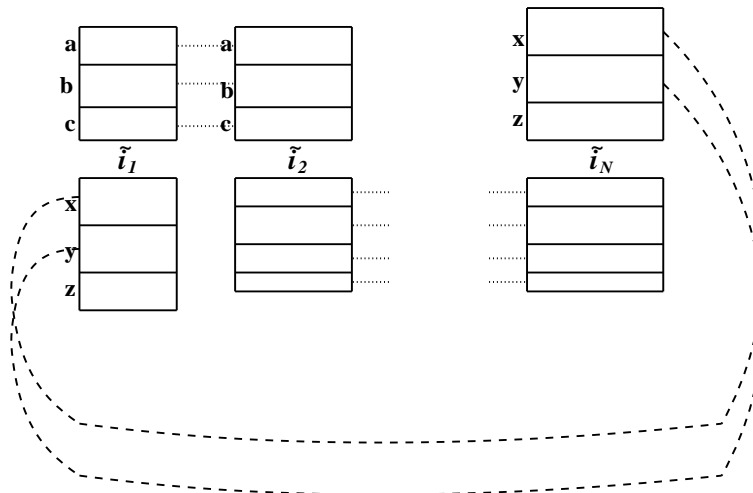
4. Reduktion der Beschreibung von Vektorbündeln und torsionsfreien Garben auf ein Matrixproblem

Die Kurve X sei ein Zykel von Geraden (d.h. eine Konfiguration vom Typ \tilde{A}_n), $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ die Normalisierung (also $\tilde{X} = \coprod_{s=1}^n L_s$; jede Komponente X_s isomorph zu \mathbf{P}^1) und $\tilde{\mathcal{O}} = \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$, $\mathcal{J} = \text{Ann}_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$. Wir schreiben auch $\tilde{\mathcal{O}}_s = \pi_*(\mathcal{O}_{X_s})$. Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ die Menge der singulären Punkte von X , $\{x'_i, x''_i\} = \pi^{-1}(x_i)$ und $x''_{n+1} = x''_1$; dann liegen die Punkte x'_i und x''_{i+1} auf L_i . Wie im letzten Kapitel identifizieren wir kohärente $\tilde{\mathcal{O}}$ -Moduln und kohärente $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -Moduln. Der Konduktor $\mathcal{J} \subset \tilde{\mathcal{O}}$ entspricht der Idealgarbe der regulären Funktionen, die in den Urbildern der singulären Punkte verschwinden.

Sei \mathcal{E} eine torsionsfreie Garbe auf X , gegeben durch das Tripel $(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{M}, i)$. $\tilde{\mathcal{E}}$ ist ein kohärenter $\tilde{\mathcal{O}}$ -Modul derart, daß jeder Keim ein freier Modul ist (wobei der Rang von $\tilde{\mathcal{E}}$ auf den einzelnen Komponenten verschieden sein kann). Man kann $\tilde{\mathcal{E}} = \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\mathcal{E}}_i$ schreiben, wobei $\tilde{\mathcal{E}}_i$ ein lokal freier $\tilde{\mathcal{O}}_i$ -Modul ist (die Modulstruktur wird von der Einbettung $\tilde{\mathcal{O}}_i \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ induziert). Ferner gilt $\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{\mathcal{E}}_i, \tilde{\mathcal{E}}_j) = 0$ für $i \neq j$, also wird ein Endomorphismus von $\tilde{\mathcal{E}}$ durch die Menge der Endomorphismen von $\tilde{\mathcal{E}}_i, i = 1, \dots, n$ eindeutig bestimmt.

Man betrachte $\tilde{i} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}}$. Diese Abbildung läßt sich mit der Menge der Abbildungen $\tilde{i}_k : (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}})_{x_k} \rightarrow (\mathcal{E})_{x_k}$ identifizieren. Wir betrachten $\tilde{\mathcal{E}}$ als eine lokal freie Garbe auf \tilde{X} und wählen lokale Basen von $\tilde{\mathcal{E}}$ in den Urbildern der singulären Punkte. Jedes i_k wiederum wird als eine $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -lineare Abbildung durch zwei Matrizen gegeben. Schauen wir, was für ein Matrixproblem wir nun haben. Wir wählen die lokalen Koordinaten auf den Geraden X_i so, daß $x'_i = (0 : 1)$ und $x''_{i+1} = (1 : 0)$ ist. Sei $\Phi : \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ ein Automorphismus, $\Phi_s : \tilde{\mathcal{E}}_s \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_s$ ($s = 1, \dots, n$) die s -te Komponente von Φ . Sei $\tilde{\mathcal{E}}_s = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{O}}_s(n)^{m_n(s)}$ eine Zerlegung in eine direkte Summe unzerlegbarer Objekte.

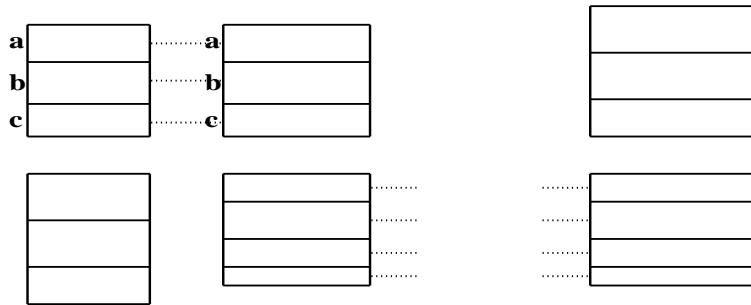
Die Identifizierung von $\tilde{\mathcal{O}}_i$ -Moduln mit $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$ -Moduln impliziert, daß Φ_s durch eine untere Dreiecksmatrix mit homogenen Polynomen als Einträgen gegeben wird. Ferner wird $\bar{\Phi}_s : \tilde{\mathcal{E}}_s/\mathcal{J} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_s/\mathcal{J}$ als $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -lineare Abbildung durch die Matrix $\text{diag}(\Phi_s(0 : 1), \Phi_s(1 : 0))$ beschrieben. $\bar{\Phi}_s$ ist genau dann ein Automorphismus, wenn die $m_n(s) \times m_n(s)$ -Matrizen, die den Automorphismen von $\tilde{\mathcal{O}}_s(n)^{m_n(s)}$ entsprechen, invertierbar sind. Darüber hinaus erhalten wir das folgende Matrixproblem:



Die Matrizen mit konjugierten Spalten stehen übereinander, die konjugierten Zeilen werden im Bild gezeigt. Man kann nun folgende Umformungen durchführen:

1. jede beliebige simultane Transformation innerhalb der konjugierten vertikalen oder horizontalen Blöcke
2. man kann ein Vielfaches einer Zeile von kleinerem Gewicht zu einer Zeile von größerem Gewicht addieren.

Der Fall der Konfigurationen A_n ist völlig analog: der einzige Unterschied ist, daß wir keine konjugierten Zeilen der ersten und der letzten Matrizen haben.



Mit anderen Worten wird das Matrixproblem folgendermaßen beschrieben: man betrachtet die Menge aller Paare $I = \{(L, x)\}$, wobei L eine irreduzible Komponente der Kurve \tilde{X} ist und x ein Urbild eines singulären Punktes von X mit $x \in L$ ist. Dieses Paar (L, x) entspricht zwei partiell geordneten Mengen $E_{(L,x)}$ und $F_{(L,x)}$. Die Menge $F_{(L,x)}$ besteht aus einem Element, $E_{(L,x)}$ ist eine Kette (total geordnete Menge). Falls L' eine andere Komponente von \tilde{X} ist, die x enthält, dann ist $F_{(L,x)} \sim F_{(L',x)}$. Falls x' ein anderer Punkt auf L ist, dann ist $E_{(L,x)}(i) \sim E_{(L,x')}(i)$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Dabei schreiben wir $E_{(L,x)} \sim E_{(L,x')}$. Es handelt sich um einen Kettenbund im Sinne von Bondarenko [6] und [5]. Hier in unserem Fall folgen aus der Definition der Kategorie der Tripel einige Einschränkungen an diese Matrizen. Die Vektorbündel auf einer \tilde{A}_n -Konfiguration entsprechen den Bänderdarstellungen. Die Saitendarstellungen mit vollen Zeilenrang jeder Matrix entsprechen den torsionsfreien Garben, die keine Vektorbündel sind. Hier sieht man eine Analogie zu den Modulräumen der Vektorbündel auf Flächen: die torsionsfreien Garben, die nicht lokal frei sind, liegen “auf der Grenze”; sie sind die Entartungen der Vektorbündel. Wir sehen auch, daß die Kategorie der torsionsfreien Garben auf einer A_n -Konfiguration endlich ist (es gibt keine Bänderdarstellungen). Die Kategorie der torsionsfreien Garben auf einer \tilde{A}_n -Konfiguration ist zahm. Wir haben also die Trichotomiefrage über die Kategorien der torsionsfreien Garben auf Kurven vollständig beantwortet.

BEMERKUNG 4.1. *Sei X eine Kette projektiver Geraden. Dann ist jedes unzerlegbare Vektorbündel auf X ein Geradenbündel, wird also durch die Grade seiner Einschränkungen auf die unzerlegbaren Komponenten beschrieben. Wir benutzen die Notation $\mathcal{B}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Torsionsfreie, aber nicht lokal freie Garben haben ebenso den Rang eins (genauer gesagt, auf jeder Komponente den Rang Eins oder Null) und sie werden ebenso durch die Grade ihrer Einschränkungen auf die irreduziblen Komponente beschrieben.*

Eigenschaften von Vektorbündeln auf Zykeln projektiver Geraden

In diesem Kapitel werden weitere Eigenschaften von Vektorbündeln auf Zykeln projektiver Geraden untersucht. Wir beschreiben zuerst einen Algorithmus, der zu einem Band $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ die entsprechenden Verklebungsmatrizen bestimmt. Aus diesen Matrizen bekommt man leicht die Beschreibung von Vektorbündeln auf nodalen Kurven durch die Verklebung von Fasern nach Seshadri [52]. Im Fall $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$ haben die unzerlegbaren Vektorbündel eine elegante Beschreibung durch étale Überlagerungen. Dies verallgemeinert die Klassifikation von Oda der Vektorbündel auf glatten elliptischen Kurven [39]. Das liefert einen neuen Beweis der Formel für das Tensorprodukt zweier unzerlegbarer Vektorbündel (siehe [54]). Anschließend beweisen wir die Formel $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)^\vee \cong \mathcal{B}(-\mathbf{d}, m, \lambda^{-1})$ und schließlich beschreiben wir stabile Vektorbündel auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt.

1. Kanonische Form der Matrizen

Wir haben bereits gesehen, daß die Beschreibung der Vektorbündel auf Zykeln projektiver Geraden sich auf ein Matrixproblem reduzieren läßt. Die Matrizen, die ein unzerlegbares Vektorbündel definieren, haben eine kanonische Form (wir nennen sie “Bänder”), die wir jetzt explizit beschreiben wollen.

Sei $X = X_s$ ein Zykel von s projektiven Geraden. Ein Band $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda) = (\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{M}, \tilde{i})$ wird durch die folgenden Parameter gegeben:

1. Der Parameter $\mathbf{d} = d_1, d_2, \dots, d_s, d_{s+1}, d_{s+2}, \dots, d_{2s}, \dots, d_{rs-s+1}, d_{rs-s+2}, \dots, d_{rs}$ ist eine Folge ganzer Zahlen, die den Graden eines Geradenbündels auf einer jeden Komponente der Normalisierung \tilde{X} entsprechen. Diese Folge darf nicht periodisch sein, d.h. keine Potenz einer anderen Folge \mathbf{e} sein.
2. Die natürliche Zahl m ist die Größe eines Elementarblockes dieser Matrizen. Diese beiden Daten bedeuten, daß die Einschränkung des normalisierten Vektorbündels auf die l -te Komponente von \tilde{X} zu

$$\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{L_i}(d_{l+is})^m$$

isomorph ist.

3. $\lambda \in \mathbf{k}^*$ ist ein kontinuierlicher Parameter.

Wir haben $2s$ Matrizen $M(L_i, a'_i)$ und $M(L_i, a''_{i+1}), i = 1, \dots, s$, die dem Band $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ entsprechen. Jede dieser Matrizen, die die Größe $mr \times mr$ hat, teilt man in Quadratablöcke der Größe $m \times m$. Wir betrachten die Unterfolge $\mathbf{d}(i) = d_i d_{i+s} \dots d_{i+(r-1)s}$ und markieren die Horizontalblöcke von $M(L_i, a'_i)$ und $M(L_i, a''_{i+1})$ entsprechen den Einträgen dieser Folge. Wenn eine ganze Zahl d k -mal in der Folge $\mathbf{d}(i)$ auftritt, dann besteht der Horizontalblock mit Markierung d aus k horizontalen Unterblöcken der Größe $m \times mr$. Wir beschreiben jetzt einen Algorithmus, der die dem Tripel (\mathbf{d}, m, λ) entsprechenden Matrizen $M(L, a)$ in einer kanonischen Form bringt.

1. Schreibe die Folge

$$(L_1, a_2'') \xrightarrow{1} (L_2, a_2') \xrightarrow{1} (L_2, a_2'') \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{1} (L_1, a_1') \xrightarrow{1} (L_1, a_1'') \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{r} (L_1, a_1').$$

2. Jetzt rollen wir die Folge \mathbf{d} aus. Das heißt, daß wir über jedes (L_i, a) den entsprechenden Term von $\mathbf{d}(i)$ zusammen mit der Anzahl des bisherigen Auftretens in $\mathbf{d}(i)$ schreiben:

$$(L_1, a_2'')^{(d_1,1)} \xrightarrow{1} (L_2, a_2')^{(d_2,1)} \xrightarrow{1} (L_2, a_2'')^{(d_2,1)} \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{r} (L_s, a_1'')^{d_{rs},*} \xrightarrow{r} (L_1, a_1')^{(d_1,1)}.$$

3. Jetzt sind wir in der Lage die Matrizen $M(L, a)$ mit Einträgen auszufüllen:

- (a) Man betrachte jeden Pfeil: $(L, a)^{(d,i)} \xrightarrow{k}$ und setze die Matrix I_m in den Block $((d, i), k)$ der Matrix $M(L, a)$ ein (dieser Block ist der Schnitt des i -ten horizontalen Unterstreifens mit Markierung d und des k -ten vertikalen Streifens).
- (b) An der $((d_1, 1), r)$ -ten Stelle der Matrix $M(L_1, a_1')$ setze man den Jordanschen Block $J_m(\lambda)$ ein (nur an dieser Stelle taucht der stetige Parameter λ auf).

BEISPIEL 1.1. Sei X Vereinigung zweier projektiver Geraden, die sich transversal in zwei Punkten schneiden, $\mathbf{d} = 0, 1, 1, 3, 1, -2$. Dann ist $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ ein Vektorbündel vom Rang $3m$ mit der Normalisierung

$$(\mathcal{O}_{L_1}^m \oplus \mathcal{O}_{L_1}(1)^{2m}) \oplus (\mathcal{O}_{L_2}(-2)^m \oplus \mathcal{O}_{L_2}(1)^m \oplus \mathcal{O}_{L_2}(3)^m)$$

und Matrizen

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}(L_1, \mathbf{a}_1) & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \mathbf{M}(L_1, \mathbf{a}_2) \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & J_m \\ \hline I_m & & \\ \hline & & I_m \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline I_m & & \\ \hline & I_m & \\ \hline & & I_m \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}(L_2, \mathbf{a}_1) & \begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 3 \end{array} & \mathbf{M}(L_2, \mathbf{a}_2) \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & I_m \\ \hline I_m & & \\ \hline & & I_m \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & I_m \\ \hline I_m & & \\ \hline & & I_m \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Die entsprechende Folge sieht so aus:

$$\begin{array}{l} (L_1, a_2'')^{(0,1)} \xrightarrow{1} (L_2, a_2')^{(1,1)} \xrightarrow{1} (L_2, a_2'')^{(1,1)} \xrightarrow{1} (L_1, a_1')^{(1,1)} \xrightarrow{1} (L_1, a_1'')^{(1,1)} \xrightarrow{2} (L_2, a_2')^{(3,1)} \\ \xrightarrow{2} (L_2, a_2'')^{(3,1)} \xrightarrow{2} (L_1, a_1')^{(1,2)} \xrightarrow{2} (L_1, a_1'')^{(1,2)} \xrightarrow{3} (L_2, a_2')^{(-2,1)} \xrightarrow{3} (L_2, a_2'')^{(-2,1)} \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{3} (L_1, a_1')^{(0,1)} \end{array}$$

2. Geometrische Beschreibung unzerlegbarer Vektorbündel

Die Matrizen aus dem Matrixproblem haben eine geometrische Interpretation. Sei X eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt, $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ ihre Normalisierung, p der singuläre Punkt von X , $\{0, \infty\} = \pi^{-1}(p)$, \mathcal{E} ein Vektorbündel vom Rang n auf X und $\tilde{\mathcal{E}} = \pi_*\pi^*(\mathcal{E})$. Wenn $(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{M}, \tilde{i})$ das \mathcal{E} entsprechende Tripel ist, dann ist $\mathcal{M} = (\mathbf{k}(p))^n$ und \tilde{i} eine $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -lineare Abbildung $(\mathbf{k} \times \mathbf{k})(p)^n \rightarrow (\mathbf{k} \times \mathbf{k})(p)^n$. Sie hat zwei Komponenten $i(0)$ und $i(\infty)$. Geometrisch gesehen haben wir einen Morphismus der Schemata $\pi^*(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, der Abbildungen in den Fasern $\pi^*(\mathcal{E})(0) \rightarrow \mathcal{E}(p)$ und $\pi^*(\mathcal{E})(\infty) \rightarrow \mathcal{E}(p)$ induziert. Sie werden durch $i(0)^{-1}$ bzw. $i(\infty)^{-1}$ gegeben. Sie sind aber Isomorphismen; das heißt, daß die Matrix $i(0)^{-1}i(\infty)$ eine Verklebung der Faser $\pi^*(\mathcal{E})(0)$ und $\pi^*(\mathcal{E})(\infty)$ liefert. Das ist die Beschreibung von Vektorbündeln auf nodalen Kurven nach Seshadri [52].

Sei jetzt $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$ vorausgesetzt. Dann haben die unzerlegbaren Vektorbündel auf X eine geometrische Beschreibung durch étale Überlagerungen.

LEMMA 2.1. [54] *Es gilt*

$$\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda) \cong \mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}(\mathbf{0}, m, 1).$$

Die Vektorbündel $\mathcal{F}_m = \mathcal{B}(\mathbf{0}, m, 1)$ heißen *unipotent*. \mathcal{F}_2 bekommt man durch eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0.$$

Für $n > 2$ können wir \mathcal{F}_n weiter rekursiv definieren:

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{n-1} \rightarrow 0.$$

Man kann zeigen, daß \mathcal{F}_n durch diese Eigenschaft eindeutig definiert ist (der Beweis geht nach dem Muster von Atiyahs Arbeit [1]).

Die nächste Behauptung hängt nicht von der Charakteristik von \mathbf{k} ab.

THEOREM 2.2. *Sei X_s ein Zykel projektiver Geraden und $\pi_n : X_{ns} \rightarrow X_s$ eine étale Überlagerung vom Grad n . Sei \mathcal{E} ein Vektorbündel auf X_{ns} mit Verklebungsmatrizen*

$$\left(\frac{M'_1}{M''_1} \right), \left(\frac{M'_2}{M''_2} \right), \dots, \left(\frac{M'_{ns}}{M''_{ns}} \right).$$

Dann haben die Verklebungsmatrizen von $\pi_{n}(\mathcal{E})$ die Gestalt (s gerade)*

$$\left(\begin{array}{cccc} M'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M'_{s+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M'_{(n-1)s+1} \\ \hline 0 & M''_{s+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M''_{(n-2)s+1} \\ M''_1 & 0 & & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} M'_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M'_{s+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M'_{(n-1)s+2} \\ \hline M''_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M''_{s+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M''_{(n-1)s+2} \end{array} \right), \dots,$$

$$\text{und} \left(\begin{array}{cccc} M'_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M'_{2s} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M'_{ns} \\ \hline M''_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M''_{2s} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M''_{ns} \end{array} \right).$$

Die Blöcke der Verklebungsmatrizen von $\pi_{n*}(\mathcal{B})$ werden nach der folgenden Regel ausgefüllt: “wenn die Zeilen bzw. Spalten der Verklebungsmatrizen von \mathcal{B} konjugiert waren, dann bleiben sie auch in den Verklebungsmatrizen von $\pi_{n*}(\mathcal{B})$ konjugiert”.

Insbesondere ist $\mathcal{L}(\mathbf{d}, \lambda) = \mathcal{L}(d_1, d_2, \dots, d_s, d_{s+1}, \dots, d_{2s}, \dots, d_{ns}, \lambda)$ ein Geradenbündel auf X_{ns} mit nichtperiodischer Folge \mathbf{d} , so ist $\pi_{n*}(\mathcal{L}) = \mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$.

BEMERKUNG 2.3. Wir verwenden in diesem Kapitel die folgende Notation

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \boxed{\mathbf{M}_1} \\ \vdots \\ \boxed{\mathbf{M}_2} \end{array}$$

Mit anderen Worten sind die Spalten von M_1 und M_2 konjugiert.

BEMERKUNG 2.4. Auch wenn die Folge $\mathbf{d} = d_1, d_2, \dots, d_s, d_{s+1}, \dots, d_{2s}, \dots, d_{ns}$ periodisch ist, kann man natürlich das direkte Bild vom \mathcal{L} betrachten. Dieses wird aber zerlegbar. Im Fall von $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$ gilt die folgende Regel: sei $\mathbf{d} = \mathbf{e}^k = \underbrace{\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \dots \mathbf{e}}_{k \text{ mal}}$ und \mathbf{e}

nicht periodisch. Dann gilt

$$\pi_{n*}(\mathcal{L}(\mathbf{d}, \lambda)) = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}(\mathbf{e}, 1, \lambda_i),$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die k -ten Wurzeln aus λ sind [54]. Der Fall $\text{char}(\mathbf{k}) > 0$ ist viel komplizierter, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL 2.5. Betrachte eine étale Überlagerung $X_4 \rightarrow X_2$. Sei $\mathbf{d} = 1, 0, 1, 0$ eine periodische Folge und $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{d}, \lambda)$. Dann hat $\pi_{2*}(\mathcal{L})$ die Verklebungsmatrizen

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

Wir können mit der Matrix

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{array} \right)$$

Konjugationstransformationen durchführen. Im Fall $\text{char}(\mathbf{k}) \neq 2$ ist diese Matrix diagonalisierbar. Im Fall $\text{char}(\mathbf{k}) = 2$ gilt aber

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc} \sqrt{\lambda} & 1 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{array} \right),$$

und also $\pi_*(\mathcal{L}(0, 1, 0, 1), \lambda) \cong \mathcal{B}((0, 1), 2, \sqrt{\lambda})$.

BEWEIS. Wir nehmen an, daß X eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt ist (für einen Zykel geht der Beweis völlig analog), $p: X_n \rightarrow X$ eine étale Überlagerung vom Rang n . Wir betrachten die Normalisierungen $\tilde{X} \rightarrow X$ und $\tilde{X}_n \rightarrow X_n$. Wie man leicht sieht, bekommt man ein Pullbackdiagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_n & \xrightarrow{N} & X_n \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{X} & \xrightarrow{n} & X \end{array}$$

Sei \mathcal{E} ein Vektorbündel auf X_n und $\tilde{\mathcal{E}} = N_*N^*(\mathcal{E})$. Was ist $p_*(\tilde{\mathcal{E}})$?

Nach der Basiswechselformel gilt:

$$p_*(\tilde{\mathcal{E}}) = n_*n^*p_*(\mathcal{E}) = n_*\tilde{p}_*N^*(\mathcal{E}) = p_*N_*N^*(\mathcal{E}) = p_*(\tilde{\mathcal{E}}).$$

Das bedeutet, daß die kanonische Abbildung $p_*(\mathcal{E}) \rightarrow p_*(\tilde{\mathcal{E}})$ das direkte Bild der Abbildung $\mathcal{E} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ ist. p bezeichne den singulären Punkt der Kurve X und p_1, p_2, \dots, p_n die singulären Punkte der Kurve X_n . Weil die Abbildung $p: X_n \rightarrow X$ étale ist, dann sind die induzierten Abbildungen $\widehat{\mathcal{O}}_{X,p} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X_n,p_i}$ Isomorphismen für $1 \leq i \leq n$ (ein Morphismus ist genau dann étale, wenn er Isomorphismus der Tangentenräume induziert).

Wir haben ein kommutatives Diagramm kanonischer Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,p} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}_{X,p} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_n,p_i} & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\mathcal{O}}_{X_n,p_i} \end{array}$$

Völlig analog haben wir ein weiteres kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_p & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{E}}_p \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_*(\mathcal{E})_p & \longrightarrow & p_*(\tilde{\mathcal{E}})_p \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{id} \\ \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}_{p_i} & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\mathcal{E}}_{p_i} \end{array}$$

Sei $\mathcal{J} = \text{Ann}_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ der Konduktor. Es gilt $\bigoplus \mathcal{J}_{p_i} = \mathcal{J}_p(\bigoplus \mathcal{O}_{X_n,p_i})$. Dies bedeutet, daß man in obigen Diagrammen die induzierten Abbildungen in den Fasern betrachten kann:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(p) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{E}}(p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}(p_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\mathcal{E}}(p_i). \end{array}$$

Sei

- $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X/\mathcal{J} = \mathbf{k}(p)$,
- $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{O}}_X/\mathcal{J} = (\mathbf{k} \times \mathbf{k})(p)$,
- $\mathcal{O}_{X_n}/\mathcal{J} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n = \mathbf{k}(p_1) \times \mathbf{k}(p_2) \times \dots \times \mathbf{k}(p_n)$,
- $\tilde{\mathcal{O}}_{X_n}/\mathcal{J} = \tilde{\mathcal{A}}_1 \times \tilde{\mathcal{A}}_2 \times \dots \times \tilde{\mathcal{A}}_n = (\mathbf{k} \times \mathbf{k})(p_1) \times (\mathbf{k} \times \mathbf{k})(p_2) \times \dots \times (\mathbf{k} \times \mathbf{k})(p_n)$.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{A}}_1 \times \tilde{\mathcal{A}}_2 \times \dots \times \tilde{\mathcal{A}}_n \end{array}$$

kommutiert.

Die Abbildung $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}(p_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \tilde{\mathcal{E}}(p_i)$ wird durch $2n$ Matrizen

$$\left(\begin{array}{c} M_1 \\ M_{2n} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} M_2 \\ M_3 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} M_{2n-2} \\ M_{2n-1} \end{array} \right)$$

gegeben (n gerade). Die Abbildung $p_*(\mathcal{E})(p) \rightarrow \widetilde{p_*(\mathcal{E})}(p)$ ergibt sich einfach, wenn wir den Vergißfunktorkomplex $((\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n) - \text{mod}) \rightarrow (\mathcal{A} - \text{mod})$ anwenden. Damit wird die Abbildung $p_*(\mathcal{E})(p) \rightarrow \widetilde{p_*(\mathcal{E})}(p)$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{2n-1} \\ \hline M_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{2n} \end{pmatrix}$$

gegeben. Es ist aber zu beachten, daß die horizontalen Blöcke jeder Komponente verschiedene Gewichte haben (Urbilder eines singulären Punktes können auf verschiedenen Komponenten der Normalisierung liegen). Ordnet man die Horizontalblöcke so um, daß die entsprechenden Blöcke jeder Komponente der Matrix gleiche Gewichte haben, dann hat die Matrix die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{2n-1} \\ \hline 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{2n-2} \\ M_{2n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Beweis im Fall eines Zyklus projektiver Geraden ist völlig analog. □

3. Das duale Vektorbündel eines Vektorbündels

THEOREM 3.1. *X sei entweder eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt oder ein Zykel projektiver Geraden. Für jedes Vektorbündel $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ auf X gilt $\mathcal{B}^\vee \cong \mathcal{B}(-\mathbf{d}, m, \lambda^{-1})$.*

BEWEIS. Sei \mathcal{B} ein Vektorbündel auf X . Dann gilt

$$\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{O}}}(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{O}}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{O}})) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{O}}).$$

Weil \mathcal{B} lokal frei ist, ist die kanonische Abbildung $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{O}) \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{O}})$ ein Isomorphismus. Sei $\tilde{\mathcal{B}}$ die Normalisierung von \mathcal{B} , dann ist $\tilde{\mathcal{B}}^\vee$ die Normalisierung von \mathcal{B}^\vee . Ist \mathcal{B} durch ein Tripel $(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{M}, \tilde{i})$ gegeben, so bekommt man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Um die Verklebungsmatrizen des Moduls $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{O})$ zu bekommen, wenden wir den Funktor $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(_, \mathcal{O})$ an:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}) \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B}, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}). \end{array}$$

Da X nur nodale Singularitäten hat, gilt $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{O}) = 0$, und damit auch $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}) = 0$. Die Kurve X ist Gorensteinsch, deshalb ist \mathcal{K}/\mathcal{O} ein injektiver \mathcal{O} -Modul (\mathcal{K} bezeichnet die Garbe rationaler Funktionen). Also ist die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

eine injektive Auflösung von \mathcal{O} .

Wir betrachten nun eine Wolkenkratzergarbe \mathcal{N} . Dann ist laut der Matlisschen Dualität $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{K}) = 0$, und $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ ist funktoriell isomorph zu $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{K}/\mathcal{O})$. Da \mathcal{N} vom maximalen Ideal annulliert wird, gilt $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{K}/\mathcal{O}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^1(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \end{array}$$

wobei $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ durch die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{i} \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J} \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B} \longrightarrow 0$$

induziert wird.

Berechnen wir jetzt $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O})$ und $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O})$

1. Wir haben einen kanonischen Homomorphismus von \mathcal{O} -Moduln

$$\mathcal{J}\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{O}}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{J}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}).$$

Alle Moduln aus dieser Sequenz sind kohärente \mathcal{O} -Moduln. Man sieht leicht, daß diese Abbildung auf den Keimen ein Isomorphismus ist (weil alle Singularitäten einfache Knoten sind).

2. Wir haben eine kanonische Abbildung von \mathcal{O} -Moduln

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{J}) \longleftarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{O}}),$$

die ebenfalls Isomorphismen auf den Keimen induziert.

Alle benötigte Daten ergeben sich jetzt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{O}}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{O}}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow \text{id} & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{O}}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{O}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Es bleibt nur die Abbildung von \mathcal{A} -Moduln

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \xrightarrow{i^*} \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$$

zu beschreiben.

Sei x ein singulärer Punkt, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ eine Basis von \mathcal{M}_x und $\{v_1, v_2, \dots, v_n; w_1, w_2, \dots, w_n\}$ eine Basis von $(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}})_x$. Wir nehmen an, daß i_x durch

$$\begin{cases} i_x(v_1) = \sum a_{i1}v_i + \sum b_{i1}w_i \\ i_x(v_2) = \sum a_{i2}v_i + \sum b_{i2}w_i \\ \vdots \\ i_x(v_n) = \sum a_{in}v_i + \sum b_{in}w_i. \end{cases}$$

gegeben wird. Sei $(\tilde{\mathcal{A}})_x = \langle \alpha, \beta \rangle$, $(\mathcal{A})_x = \langle \gamma \rangle$. Dann hat $\tilde{\mathcal{A}}$ vermöge der Diagonaleinbettung $(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})_x = \langle \alpha, \beta \rangle / \langle \gamma, \gamma \rangle$ die Struktur eines \mathcal{A} -Moduls. Wir können also annehmen, daß der Isomorphismus $(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})_x \longrightarrow \mathbf{k}$ durch $[\alpha] \mapsto 1$, $[\beta] \mapsto -1$ gegeben wird.

Der Vektorraum $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ hat die Basis $v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*; w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*$, wobei $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}[\alpha]$, $v_i^*(w_j) = 0$, $w_i^*(v_j) = 0$, $w_i^*(w_j) = \delta_{ij}[\beta]$. Darüber hinaus gilt

$$i_x^*(v_i^*)(u_j) = a_{ij}[\alpha] = a_{ij}.$$

Andererseits ist

$$i_x^*(w_i^*)(u_j) = b_{ij}[\beta] = -b_{ij}.$$

Wenn also i_x der Matrix $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ entspricht, dann wird i_x^* durch $(A^T, -B^T)$ gegeben. Wenn die Matrix i kanonische Form hatte, dann läßt sich die Matrix der Einbettung des Kernes von i^* leicht ablesen. Daraus folgt die Behauptung des Satzes. \square

4. Kohomologie, Homomorphismenräume und Tensorprodukt von Vektorbündeln auf Zyklen projektiver Geraden

4.1. Kohomologie unzerlegbarer Vektorbündel. Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$. Die entwickelte Technik ermöglicht uns, die Kohomologie von \mathcal{B} durch die Kombinatorik von \mathbf{d} auszudrücken. Sei $(\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{M}, i)$ das \mathcal{B} entsprechende Tripel. Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B} \longrightarrow 0.$$

Die lange exakte Kohomologiesequenz ist dann

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{B}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{B}}) \xrightarrow{f} H^0(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B}) \longrightarrow H^1(\mathcal{B}) \longrightarrow H^1(\tilde{\mathcal{B}}) \longrightarrow 0.$$

Man kann die Abbildung $f : H^0(\tilde{\mathcal{B}}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{B})$ explizit ausrechnen: sie ist einfach die Verknüpfung

$$H^0(\tilde{\mathcal{B}}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}})/H^0(\mathcal{B}/\mathcal{J}\mathcal{B}).$$

Es gilt aber $\mathcal{B}/\mathcal{J}\mathcal{B} \cong \mathcal{M}$, und die Einbettung $H^0(\mathcal{B}/\mathcal{J}\mathcal{B}) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{B}}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{B}})$ wird durch die Matrix i gegeben. Damit können wir die Kohomologie als Kern und Kokern von f ausrechnen. Siehe [24] für den ausführlichen Beweis. Wir formulieren nur die Antwort:

$$\dim_{\mathbf{k}} H^0(\mathcal{B}) = m \left(\sum_{i=1}^{rs} (d_i + 1)^+ - \theta(\mathbf{d}) \right) + \delta(\mathbf{d}, \lambda),$$

$$\dim_{\mathbf{k}} H^1(\mathcal{B}) = m \left(\sum_{i=1}^{rs} (d_i + 1)^- + rs - \theta(\mathbf{d}) \right) + \delta(\mathbf{d}, \lambda),$$

wobei $\delta(\mathbf{d}, \lambda) = 1$ falls $\mathbf{d} = (0, \dots, 0)$, $\lambda = 1$ ist und 0 sonst; $k^+ = k$ falls $k > 0$ und Null sonst, $k^- = k^+ - k$. Eine Unterfolge $\mathbf{p} = (d_{k+1}, \dots, d_{k+l})$, wobei $0 \leq k < rs$ und $1 \leq l \leq rs$ ist, heißt *positiver Teil* von \mathbf{d} , falls alle $d_{k+j} \geq 0$ sind und entweder $l = rs$ ist oder die beiden $d_k < 0$ und $d_{k+l+1} < 0$ sind. Für einen solchen positiver Teil ist $\theta(\mathbf{p}) = l$, falls $l = rs$ oder $\mathbf{p} = (0, \dots, 0)$ ist, und $\theta(\mathbf{p}) = l + 1$ sonst. Dann ist $\theta(\mathbf{d}) = \sum \theta(\mathbf{p})$, wobei die Summe durch die alle positive Unterteile von \mathbf{d} läuft.

4.2. Tensorprodukt zweier Vektorbündel. Seien \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 zwei unzerlegbare Vektorbündel auf einem Zykel projektiver Geraden. Wie berechnet man dann das Tensorprodukt $\mathcal{B}_1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}_2$?

Seien $(\tilde{\mathcal{B}}_1, \mathcal{M}_1, \tilde{i}_1)$ und $(\tilde{\mathcal{B}}_2, \mathcal{M}_2, \tilde{i}_2)$ die \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 entsprechenden Tripel. Man sieht leicht, daß $\mathcal{B}_1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}_2$ dem Tripel $(\tilde{\mathcal{B}}_1 \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{B}}_2, \mathcal{M}_1 \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2, \tilde{i}_1 \otimes \tilde{i}_2)$ entspricht. Darüber hinaus ist $\tilde{i}_1 \otimes \tilde{i}_2$ einfach das Kroneckersche Produkt von Matrizen. Das Problem liegt darin, daß man sich auch um die Aufteilung auf horizontale Blöcke kümmern muß.

Für $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$ gilt [54]

$$\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda) \cong \mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}(\mathbf{0}, m, 1).$$

Sei $n \geq m \geq 1$. Dann gilt:

$$\mathcal{B}(\mathbf{0}, m, 1) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}(\mathbf{0}, n, 1) \cong \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{B}(\mathbf{0}, n - m - 1 + 2j, 1).$$

In Fall $\text{char}(\mathbf{k}) = 0$ haben wir die Beschreibung von unzerlegbaren Vektorbündeln durch étale Überlagerungen.

LEMMA 4.1. X sei ein Zykel projektiver Geraden, $\pi_i : X_i \rightarrow X$ für $i = 1, 2$ seien zwei étale Überlagerungen und \mathcal{B}_i ein Vektorbündel auf X_i . Wir betrachten das Faserprodukt X' von X_1 und X_2 über X :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{p_1} & X_1 \\ \downarrow p_2 & & \downarrow \pi_1 \\ X_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X. \end{array}$$

Bezeichnet $\tilde{\pi} : X' \rightarrow X$ die Verknüpfung $\pi_1 p_1$, so gilt

$$\pi_{1*}(\mathcal{E}_1) \otimes \pi_{2*}(\mathcal{E}_2) \cong \tilde{\pi}_*(p_1^*(\mathcal{E}_1) \otimes p_2^*(\mathcal{E}_2))$$

und

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_{1*}(\mathcal{E}_1), \pi_{2*}(\mathcal{E}_2)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{\pi}_*(p_1^*(\mathcal{E}_1) \otimes p_2^*(\mathcal{E}_2)), \mathcal{O}_X).$$

BEWEIS. Nach der Basiswechselformel und der Projektionsformel gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_*(p_1^*(\mathcal{E}_1) \otimes p_2^*(\mathcal{E}_2)) &= \pi_{2*} p_{2*} (p_1^*(\mathcal{E}_1) \otimes p_2^*(\mathcal{E}_2)) = \pi_{2*} (p_{2*} p_1^*(\mathcal{E}_1) \otimes \mathcal{E}_2) = \\ &= \pi_{2*} (\pi_2^* \pi_{1*}(\mathcal{E}_1) \otimes \mathcal{E}_2) = \pi_{1*}(\mathcal{E}_1) \otimes \pi_{2*}(\mathcal{E}_2). \end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Formel ist völlig analog; statt der Projektionsformel benutzt man die Adjungiertheit des direkten und des inversen Bildes:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_X(\pi_{1*}(\mathcal{E}_1), \pi_{2*}(\mathcal{E}_2)) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\pi_2^* \pi_{1*}(\mathcal{E}_1), \mathcal{E}_2) = \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(p_{2*} p_1^*(\mathcal{E}_1), \mathcal{E}_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(p_1^*(\mathcal{E}_1), p_2^*(\mathcal{E}_2)). \end{aligned}$$

□

Sei X_s ein Zykel von s projektiven Geraden, $\pi_i : X_{d_i s} \rightarrow X_s$ seien zwei étale Überlagerungen. Wir wollen das Faserprodukt von X_1 und X_2 über X jetzt ausrechnen. Dazu markieren wir die irreduziblen Komponenten von X_1 und X_2 mit Indizes $0, 1, \dots$. Wir nehmen an, daß der Morphismus π_i die nullte Komponente in die nullte Komponente abbildet.

THEOREM 4.2. Sei $d = (d_1, d_2)$ der größte gemeinsame Teiler, und $D = [d_1, d_2]$ das kleinste gemeinsame Vielfache von d_1 und d_2 . Sei $\tilde{X} = \coprod_{i=1}^d X_{D_s}^{(i)}$, dann ist $p_1 : X_{D_s}^{(i)} \rightarrow \mathbf{E}_{d_1 s}$ eine étale Überlagerung, die die i -te Komponente der Kurve $X_{D_s}^{(i)}$ auf die nullte Komponente der Kurve $X_{d_1 s}$ abbildet. Der Morphismus $p_2 : X_{D_s}^{(i)} \rightarrow X_{d_2 s}$ bildet die nullte Komponente auf die nullte Komponente ab.

BEWEIS. Es genügt zu prüfen, daß \tilde{X} die universelle Eigenschaft des Faserproduktes hat. Seien Y ein Schema, $f_i : Y \rightarrow X_{d_i s}$ zwei Morphismen, die die Gleichung $\pi_1 f_1 = \pi_2 f_2$ erfüllen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß Y irreduzibel ist. Dann gehört das Bild der jeden Abbildung f_i einer irreduziblen Komponente der Kurve $X_{d_i s}$, $i = 1, 2$. Nehmen wir an, daß das Bild der Abbildung f_1 zur Komponente mit der Nummer a gehört, $0 \leq a < d_1 s$, und daß das Bild der Abbildung f_2 zur Komponente mit der Markierung b , $0 \leq b < d_2 s$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Komponente der Kurve $X_{D_s}^{(y)}$, $0 \leq y < d$ mit der Nummer x , $0 \leq x < Ds$ und eine Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow X_{D_s}^{(y)}$ so, daß $p_i \tilde{f} = f_i$ ist, $i = 1, 2$. Das ist äquivalent zur eindeutigen Lösbarkeit des Systems von Kongruenzen

$$\begin{cases} x + ys \equiv a \pmod{d_1 s} \\ x \equiv b \pmod{d_2 s} \end{cases}$$

mit zusätzlichen Bedingungen $0 \leq x < Ds$, $0 \leq y < d$. Sei $d_i = dd'_i$, $i = 1, 2$, wobei d'_1, d'_2 teilerfremd sind. Aus der zweiten Gleichung folgt $x = b + kd_2 s$. Aus der Ungleichung

$0 \leq x < Ds$ folgt $0 \leq k < d'_1$. Aus der ersten Gleichung folgt $x + ys = a + ld_1s$ für $0 \leq l \leq d'_2$. Also gilt

$$ys = a - b + ds(ld'_1 - kd'_2).$$

Aus der Bedingung $0 \leq y < d$ folgt, daß der Quotient $ld'_1 - kd'_2$ und der Rest ys eindeutig bestimmt sind. Die Zahl $ys - a + b$ ist ein Vielfaches von ds . Damit ist ihr maximaler Wert $(d'_2 - 1)ds$ und ihr minimaler Wert $(-d'_1 + 1)ds$. Also haben wir die Ungleichung

$$(-d'_1 + 1)ds \leq ld'_1 - kd'_2 \leq (d'_2 - 1)ds.$$

Die Behauptung des Satzes folgt aus dem folgenden offensichtlichen Lemma.

LEMMA 4.3. *Seien a, b natürliche teilerfremde Zahlen, $-a < k < b$. Dann hat die Gleichung $ax - by = k$ genau eine ganzzahlige Lösung (x, y) in der Menge $[0, b) \times [0, a)$.*

□

Als Korollar bekommen wir den folgenden Algorithmus für Berechnung des Tensorproduktes zweier unzerlegbarer Vektorbündel.

ALGORITHMUS 4.4. *Es seien $\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$ und $\mathcal{B}(\mathbf{e}, 1, \mu)$ zwei unzerlegbare Vektorbündel vom Rang k bzw. l , mit $\mathbf{d} = d_1 d_2 \dots d_k$ und $\mathbf{e} = e_1 e_2 \dots e_l$. Sei D das kleinste gemeinsame Vielfache und d der größte gemeinsame Teiler von k und l . Man betrachte die d Folgen*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= d_1 + e_1, d_2 + e_2, \dots, d_k + e_l, \\ \mathbf{f}_2 &= d_1 + e_2, d_2 + e_3, \dots, d_k + e_1, \\ &\vdots \\ \mathbf{f}_d &= d_1 + e_d, d_2 + e_{d+1}, \dots, d_k + e_{d-1}, \end{aligned}$$

der Länge D . Dann gilt

$$\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{e}, 1, \mu) \cong \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbf{f}_i, 1, \lambda^{\frac{l}{d}} \mu^{\frac{k}{d}}).$$

Allerdings kann die Folge \mathbf{f}_i periodisch sein: wir benutzen dann die Formel

$$\mathcal{B}(\mathbf{g}^l, 1, \lambda) = \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{B}(\mathbf{g}, 1, \xi^i \sqrt[l]{\lambda}),$$

wobei $\mathbf{g}^l = \underbrace{\mathbf{g} \mathbf{g} \dots \mathbf{g}}_l$ und ξ eine primitive l -te Wurzel aus 1 ist.

Dieser Algorithmus wurde zuerst in [54] mit einer anderen Methode bewiesen.

5. Stabile Vektorbündel auf einer Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt

Sei $X \subseteq \mathbf{P}^2$ die durch $zy^2 = x^3 - x^2z$ gegebene rationale Kurve, \mathcal{E} eine lokal freie Garbe auf X . Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt:

$$\deg(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E}) + (p_a(X) - 1)\text{rank}(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E}).$$

Wenn \mathcal{E} eine kohärente Garbe ist, können wir diese Formel als Definition des Grades einer Garbe benutzen.

DEFINITION 5.1. *Eine lokal freie Garbe \mathcal{E} heißt stabil, wenn für jeden torsionsfreien Quotienten \mathcal{F} von \mathcal{E} gilt:*

$$\frac{\deg(\mathcal{E})}{\text{rank}(\mathcal{E})} < \frac{\deg(\mathcal{F})}{\text{rank}(\mathcal{F})}$$

LEMMA 5.2. *Sei \mathcal{E} eine lokal freie Garbe auf X , \mathcal{F} eine torsionsfreie Garbe. Dann gilt:*

$$\deg(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \deg(\mathcal{E})\text{rank}(\mathcal{F}) + \deg(\mathcal{F})\text{rank}(\mathcal{E}).$$

BEWEIS. Es sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz lokal freier Garben. Dann ist die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

auch exakt. Daraus folgt

$$\deg(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \deg(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F}) + \deg(\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{F}).$$

Es reicht also, die Behauptung des Lemmas im Falle $\text{rank}(\mathcal{E}) = 1$ zu beweisen. Jedes Geradenbündel auf X hat die Gestalt $\mathcal{O}(D_2 - D_1)$, wobei D_1 und D_2 zwei effektive Weil-Divisoren mit den Trägern im regulären Teil der Kurve $\text{Reg}(X)$ sind. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D_1) \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_{D_1} \longrightarrow 0.$$

Da \mathcal{F} auf der Menge aller regulären Punkte lokal frei ist, gilt $\text{Tor}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{D_1}) = 0$. Deswegen ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D_1) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_{D_1} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

auch exakt, ebenso wie

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-D_1) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}(D_2 - D_1) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_{D_2} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Der Träger von D_1 und D_2 liegt in $\text{Reg}(X)$, deshalb ist

$$\deg(\mathcal{O}_{D_i} \otimes \mathcal{F}) = \chi(\mathcal{O}_{D_i} \otimes \mathcal{F}) = \deg(D_i)\text{rank}(\mathcal{F}),$$

und wir erhalten

$$\deg(\mathcal{O}(D_2 - D_1) \otimes \mathcal{F}) = \text{rank}(\mathcal{F})(\deg(D_2 - D_1)) + \deg(\mathcal{F}),$$

was zu beweisen war. □

Es ist bekannt, daß jedes stabile Vektorbündel automatisch einfach ist. Im Falle der Kurven von arithmetischem Geschlecht 1 ist auch die Umkehrung richtig (darauf hat uns A. Caldararu hingewiesen).

LEMMA 5.3. *Sei \mathcal{E} ein einfaches Vektorbündel auf X . Dann ist \mathcal{E} stabil.*

BEWEIS. Wir nehmen an, \mathcal{E} sei instabil. Dann gibt es einen Epimorphismus $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ auf eine torsionsfreie Garbe \mathcal{F} mit

$$\frac{\deg(\mathcal{E})}{\text{rank}(\mathcal{E})} \geq \frac{\deg(\mathcal{F})}{\text{rank}(\mathcal{F})}.$$

Unter diesen Umständen ist $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \neq 0$.

Da die Garbe \mathcal{E} lokal frei ist, können wir die Serresche Dualität anwenden:

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) = \text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = H^1(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}).$$

Nach dem Satz vom Riemann-Roch gilt

$$h^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) - h^1(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) = \deg(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}).$$

Aber nach dem vorherigen Lemma gilt

$$\deg(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) = -\deg(\mathcal{E})\text{rank}(\mathcal{F}) + \text{rank}(\mathcal{E})\deg(\mathcal{F}) \leq 0.$$

Aber $h^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) = \dim_{\mathbf{k}}(\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})) > 0$. Deshalb gilt $h^1(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) > 0$. Das impliziert, daß es eine Abbildung $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ gibt, die weder null noch ein Isomorphismus ist. Damit erhalten wir einen Widerspruch dazu, daß \mathcal{E} einfach ist. □

Sei $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ stabil. Wir benutzen jetzt, daß

$$\text{End}(\mathcal{E}) = H^0(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}).$$

Die Formeln für das duale Vektorbündel und das Tensorprodukt liefern die folgenden Bedingungen:

1. $m = 1$.
2. Es gilt $|d_i - d_j| \leq 1$ für alle $1 \leq i, j \leq r$.
3. Keine der möglichen Differenzen $\mathbf{d} - \mathbf{d}[t]$ enthält eine Unterfolge der Gestalt $10 \dots 01$, wobei

$$\mathbf{d}[t] = d_{t+1} \dots d_r d_1 \dots d_{t-1} d_t$$

ein Shift von \mathbf{d} ist.

Aufgrund dieser Bedingungen können wir durch Tensorieren mit einem Geradenbündel erreichen, daß \mathbf{d} nur aus 0 und 1 besteht.

Jetzt werden wir die explizite Gestalt von \mathbf{d} beschreiben. Für $\mathbf{d} = 0, 1$ ist $\mathcal{B}(\mathbf{d}, 1, \lambda)$ stabil. Jetzt sei die Länge des Vektors \mathbf{d} größer als zwei. Da die Folge $0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1$ periodisch ist (und damit das entsprechende Vektorbündel zerlegbar ist), folgt, daß $1, 1$ oder $0, 0$ eine Unterfolge von \mathbf{d} ist. Die dritte Bedingung in der Charakterisierung einfacher Vektorbündel liefert, daß sich diese beiden Möglichkeiten gegenseitig ausschließen.

Angenommen, daß \mathbf{d} die Unterfolge $1, 1$ enthält. Sei $\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k+1 \text{ mal}}$ die längste Unterfolge aus Einsen der Folge \mathbf{d} . Dann hat \mathbf{d} keine Unterfolge $\underbrace{01, 1, \dots, 10}_{\leq k-1 \text{ mal}}$ (das folgt wiederum aus der dritten Bedingung der Charakterisierung einfacher Vektorbündel). Wir führen die folgende Notation ein: $a = \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k+1 \text{ mal}}$, $b = \underbrace{1, 1, \dots, 1}_k$. Dann hat \mathbf{d} die Gestalt

$$0, a, 0, a, \dots, 0, b, 0, \dots$$

Es ist klar, daß \mathbf{d} sich eindeutig aus der Folge

$$a, a, \dots, a, b, b, \dots, b, a \dots$$

rekonstruieren läßt. Man sieht leicht, daß die neue Folge die folgenden Bedingungen erfüllen soll:

1. Wenn die Folge

$$\underbrace{a, a, \dots, a}_{k+1}$$

aufgetreten hat, dann tritt die Folge

$$b \underbrace{a, a, \dots, a}_{k-1 \text{ mal}}, b$$

nicht auf,

2. Umgekehrt gilt: wenn die Folge

$$\underbrace{b, b, \dots, b}_{k+1}$$

aufgetreten hat, dann tritt die Folge

$$a, \underbrace{b, b, \dots, b}_{\leq k-1 \text{ mal}}, a.$$

nicht auf.

Wir haben dieselben kombinatorischen Bedingungen bekommen, die wir für die Folge \mathbf{d} hatten. Die neue Folge hat aber kleinere Länge. Wir können diese Prozedur rekursiv fortsetzen: nach der Annahme, daß a, a aufgetreten hat, die Blöcke a, a, \dots, a bilden usw.

Da die Länge der Folge immer kleiner wird, wird es nach endlich vielen Schritten terminieren. Daraus folgt der folgende Algorithmus.

ALGORITHMUS 5.4. *Wir fangen mit der Folge $aa \dots ab$ an. Wir haben zwei Möglichkeiten diese Folge "aufzublasen":*

1. *Statt jedes Buchstabens a setzen wir den Block $\underbrace{a, a, \dots, a}_{k+1}$ ein, wobei $k \geq 2$ ist;*

statt b setzen wir den Block $\underbrace{a, a, \dots, a}_{k-1}$ ein. Zwischen den neuen Blöcken setzen wir

Buchstaben b ein.

2. *Statt jedes Buchstabens a setzen wir den Block $\underbrace{a, a, \dots, a}_k$ ein, wobei $k \geq 1$ ist;*

statt b setzen wir den Block $\underbrace{a, a, \dots, a}_{k+1}$ ein. Zwischen den neuen Blöcken setzen wir

Buchstaben b ein.

Die neue Folge können wir weiter nach der gegebenen Regel aufblasen. Angenommen, daß nach einem Schritt wir die Folge \mathbf{d} erhalten haben. Dann setze statt a 1 und statt b 0 ein, oder umgekehrt statt a 0 und statt b 1 ein. Damit bekommt man eine Folge, die alle Kriterien der Einfachheit erfüllt.

Jetzt wollen wir diesen Algorithmus analysieren. Nehmen wir an, daß es nach einem gewissen Schritt, x Buchstaben a und y Buchstaben b gab. Die Länge der Folge ist dann $x + y$. Wir haben ein Tripel ganzer Zahlen $(x, y, x + y)$. Nach dem nächsten Schritt wird aus diesem Tripel das Tripel $(k(x + y) - x, x + y, (k + 1)(x + y))$ oder $(k(x + y) - y, x + y, (k + 1)(x + y))$. Unser ursprüngliches Tripel war $(x, 1, x + 1)$. Alle Zahlen dort waren teilerfremd. Es bleibt deshalb so auch im aufgeblasenen Tripel und es folgt: wenn ein stabiles Vektorbündel den Rang r und Grad d hat, dann sind r und d teilerfremd.

Es bleibt noch festzustellen, wodurch ein stabiles Vektorbündel eindeutig bestimmt wird. Wir betrachten ein stabiles Vektorbündel vom Rang r und vom Grad d . Dann gilt $(r, d) = 1$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $0 \leq d < r$ gilt. Wir diskutieren speziell den Fall $d \geq r - d$, dann hat das \mathbf{d} entsprechende Tripel die

Gestalt $(d, r-d, r)$. Der Vorgänger dieses Triples sei $(x, y, r-d)$, wobei $0 \leq y \leq x < r-d$, $x+y = r-d$ ist. Aber dann gilt $d = k(r-d) - x$ oder $d = k(r-d) - x$. Darüber hinaus gilt $x+y = r$, und die Wahl von x bestimmt y eindeutig und umgekehrt. Aufgrund der Bedingung $x \geq y$ ist das Tripel $(x, y, x+y)$ dann eindeutig bestimmt.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

THEOREM 5.5. *Sei X eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt, $r > 0$ und d seien teilerfremde ganze Zahlen, und es sei $\lambda \in \mathbf{k}^* = X_{\text{reg}}$ ist. Dann gibt es genau ein stabiles Vektorbündel \mathcal{E} mit Rang r , Grad d und der Determinante $\mathcal{O}(d\lambda)$. Umgekehrt gilt: wenn \mathcal{E} ein stabiles Vektorbündel auf X ist, dann sind sein Rang und sein Grad zueinander teilerfremd.*

BEMERKUNG 5.6. *Die Tripel aus dem Beweis haben nichts mit der Kategorie von Tripeln zu tun.*

Wir haben damit eine explizite Beschreibung aller stabilen Vektorbündel auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt gewonnen. Sei $\mathbf{d} = d_1, d_2, \dots, d_r$ eine nicht periodische Folge ganzer Zahlen, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Dann ist das Vektorbündel $\mathcal{B}(\mathbf{d}, m, \lambda)$ genau dann stabil, wenn $d_1 + d_2 + \dots + d_r = d$ ist, $m = 1$ und die Folge \mathbf{d} nach dem obigen Algorithmus konstruiert wird.

BEISPIEL 5.7. Man finde den Vektor der Multigrade eines stabilen Vektorbündels vom Rang 19 und Grad 11. Die Reduktionen haben die Gestalt

$$(11, 8, 19) \longrightarrow (5, 3, 8) \longrightarrow (2, 1, 3).$$

Damit bekommen wir als Sequenz der Aufblasungen

$$a, a, b \longrightarrow a, a, b, a, a, b, a, b \longrightarrow a, b, a, b, a, a, b, a, b, a, b, a, a, b, a, b, a, a, b$$

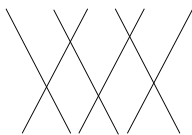
und setzen statt $a = 1$ und statt $b = 0$ ein.

Kohärente Garben auf singulären projektiven Kurven

1. Einführung

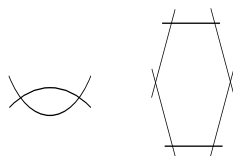
Unsere Aufgabe ist die Beschreibung unzerlegbarer Objekte der Kategorie kohärenter Garben Coh_X auf einer reduzierten projektiven Kurve X . Nach [19] wissen wir, daß das Problem der Beschreibung der Kategorie von Vektorbündeln

1. endlich ist, falls X eine Konfiguration projektiver Geraden vom Typ



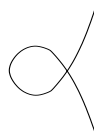
ist;

2. zahm ist, falls X entweder
 - (a) eine Konfiguration projektiver Geraden vom Typ



oder

- (b) eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt,



oder

- (c) eine elliptische Kurve ist.

3. Ansonsten ist das Klassifikationsproblem wild.

Wir haben schon gesehen, daß im glatten Fall die Klassifikation der kohärenten Garben äquivalent zur Klassifikation der Vektorbündel ist. Was passiert im singulären Fall? Sei $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Coh}_X)$. Wir haben wieder eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/T(\mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

$\mathcal{F}/T(\mathcal{F})$ ist eine torsionsfreie Garbe. Allerdings ist sie nicht unbedingt ein Vektorbündel, also ist im allgemeinen $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}/T(\mathcal{F}), \bullet) \neq 0$. Insbesondere können wir nicht folgern, daß diese Sequenz spaltet und im singulären Fall eine kohärente Garbe nicht unbedingt eine direkte Summe von torsionsfreien Garben und Wolkenkratzergerben. Die Wolkenkratzergerben sind bekannt: da die Kurve X projektiv ist, sind sie endlich-dimensional über \mathbf{k} . Andererseits haben wir eine Bijektion

endlich-dimensionale $\mathcal{O}_{X,p}$ -Modul \iff endlich-dimensionale $\widehat{\mathcal{O}}_{X,p}$ -Moduln.

Im Fall der obengenannten Konfigurationen ist in einem singulären Punkt p gilt $\widehat{\mathcal{O}}_{X,p} \cong \mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$; die Klassifikation endlich-erzeugter Moduln ist dafür bekannt (siehe [44], [7], [29]). Wir stehen jetzt vor dem folgenden Problem: \mathcal{A} sei eine abelsche Kategorie, \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_3 zwei volle additive Unterkategorien von \mathcal{A} . Betrachten wir exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0,$$

wobei \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_3 die alle möglichen Objekte von \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_3 durchlaufen. Wie kann man die Kategorie der möglichen \mathcal{F}_2 beschreiben?

Leider gibt es keinen allgemeinen Algorithmus, um diese Frage zu antworten. Man braucht hier eine neue Idee, und zwar den Übergang zu abgeleiteten Kategorien. Wir haben die Einbettung $\text{Coh}_X \hookrightarrow D^-(\text{Coh}_X)$; im folgenden werden wir versuchen, die unzerlegbaren Objekte von $D^-(\text{Coh}_X)$ zu beschreiben.

Zuerst beschreiben wir unzerlegbare Komplexe auf einem Zykel projektiver Geraden durch das ‘‘Verkleben’’ der Komplexe auf der Normalisierung. Um diese Beschreibung zu bekommen, führen wir eine neue Kategorie TC_X ein und konstruieren einen Funktor $D^-(\text{Coh}_X) \longrightarrow \text{TC}_X$, der Isomorphieklassen der Objekte respektiert. Die Beschreibung unzerlegbarer Objekte der Kategorie TC_X läßt sich auf ein Matrixproblem reduzieren. Wir diskutieren dieses Problem zuerst für $D^-(\mathbf{k}[[x, y]]/(xy))$. Dann beschreiben wir das Matrixproblem für eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt. Schließlich wird das Problem im allgemeinen Fall betrachtet. Der Hauptergebnis dieser Arbeit ist der folgende Satz:

SATZ. *Sei X ein Zykel projektiver Geraden. Dann gibt es drei Typen unzerlegbarer Objekte in $D^-(\text{Coh}_X)$:*

1. *Shifts von Wolkenkratzergeraden in einem singulären Punkt,*
2. *Bänder $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$,*
3. *Saiten $\mathcal{S}(w)$.*

Die Saiten sind genau die Komplexe von unendlicher homologischer Dimension.

Wir zeigen auch, welche kanonischen Formen den unzerlegbaren kohärenten Garben auf X entsprechen. Die Beschreibung erlaubt auch das abgeleitete Tensorprodukt zweier Komplexe auszurechnen.

Als Folgerung erhalten wir einen neuen Beweis für das klassische Problem der Beschreibung aller endlich dimensionalen $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Moduln [29].

2. Beschreibung unzerlegbarer Komplexe

Sei $X = X_s$ ein Zykel von s projektiven Geraden. Um die unzerlegbaren Komplexe von $D^-(\text{Coh}_X)$ zu beschreiben, führen wir die folgenden kombinatorische Daten ein.

DEFINITION 2.1. 1. Das Alphabet \mathfrak{A} besteht aus folgenden Symbolen ("Buchstaben"):

- (a) n_k , wobei $n, k \in \mathbb{Z}$ (wir nennen sie 0-Buchstaben oder 0-Symbole);
- (b) x_k^n, y_k^n , wobei $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, (wir nennen sie entsprechend x -Buchstaben und y -Buchstaben).

Man schreibt $\text{ind}(a) = k$ für den Index von a , wenn a eines der obigen Symbole ist.

2. Die Menge der aktiven Indizes eines Symbols a wird folgendermaßen definiert:

- (a) sie ist $\{k\}$, wenn $a = n_k$ ist;
- (b) sie ist $\{k, k+1\}$, wenn $a = x_k^n$ oder y_k^n ist.

3. Ein Wort ist eine Abbildung $w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{A}$, so daß gilt:

- (a) wenn man alle 0-Symbole streicht, dann wechseln sich x -Symbole und y -Symbole ab;
- (b) Je zwei benachbarte Symbole haben einen gemeinsamen aktiven Index, und jeder aktive Index eines Buchstabens ist auch ein aktiver Index eines seiner Nachbarn, z.B. $\dots x_{k+2}^1 y_{k+1}^2 x_k^2 n_k m_m y_k^1 x_{k-1}^1 \dots$.

4. Für jedes Wort w definieren wir die Funktionen δ_w und $j_w : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$ nach den folgenden Regeln:

- (a) wenn es ein $m' > m$ gibt, so daß $w(m')$ ein y -Buchstabe ist und alle $w(m'')$ mit $m < m'' < m'$ 0-Buchstaben sind, dann sei $\delta_w(m) = -1$; ansonsten sei $\delta_w(m) = 1$;
- (b) $j_w(0) = 0$ und $j_w(m+1) = j_w(m) + \delta_w(m)$ für jedes m .

Wenn $s = 1$ ist, dann sind beide Funktionen j_w und δ_w trivial.

5. Eine Saite $\mathcal{S}(w)$ wird durch ein Wort w gegeben, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (a) es gibt eine ganze Zahl K , sodaß $\text{ind}(w(m)) \geq K$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist (das heißt, daß der entsprechende Komplex von rechts beschränkt sein soll);
- (b) für jede ganze Zahl m ist die Menge $\{m \in \mathbb{Z} \mid \text{ind}(w(m)) = m\}$ endlich (das impliziert, daß jede Komponente des Komplexes kohärent ist)

6. Wenn $l \in \mathbb{N}$ ist, dann definiert man den l -ten Shift w^l des Wortes w durch $w^l(m) = w(m+l)$, $m \in \mathbb{Z}$. Wir nennen diesen Shift erlaubt, wenn $j_w(0) = j_w(l)$ ist.

7. Ein Zykel ist ein Wort w , so daß $w^l = w$ für einen erlaubten Shift ist. Die kleinste natürliche Zahl l mit dieser Eigenschaft heißt die Periode des Zyklus w .

Es ist klar, daß das Wort w durch das Segment $w(0)w(1)\dots w(l-1)$ vollkommen festgestellt ist. Im weiteren werden wir deshalb den Zykel w mit diesem Segment identifizieren. Man beachte, daß im Fall $s > 1$ nicht jedes Wort einen Zykel definiert: die Bedingung $j_w(0) = j_w(l)$ ist eine starke Einschränkung.

8. Ein Band $\mathcal{B} = \mathcal{B}(w, d, \lambda)$ wird durch ein Tripel (w, d, λ) gegeben, wobei $d \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbf{k}^* = \mathbf{k} \setminus \{0\}$ und w ein Zykel ist.

9. Wir bezeichnen mit w° das inverse Wort, d.h. $w^\circ(m) = w(-m)$.

10. Zwei Saiten $\mathcal{S}(v)$, $\mathcal{S}(w)$ heißen äquivalent, wenn es einen erlaubten Shift v^l gibt, so daß $v^l = w$ oder $v^l = w^\circ$ gilt.

11. Zwei Bänder $\mathcal{B}(w, d, \lambda)$ und $\mathcal{B}(v, d, \mu)$ sind äquivalent, wenn es einen erlaubten Shift v^l gibt, sodaß entweder $w = v^l$ und $\mu = \lambda$ ist, oder $w^\circ = v^l$ und $\mu = \lambda^{-1}$ und nicht alle Buchstaben in w 0-Buchstaben sind.

Die Funktionen j_w und δ_w haben die folgende Interpretation. Die Zahl $j_w(0)$ bezeichnet diejenige Komponente der Kurve X , mit der wir begonnen haben (d.h. $w(0)$ hat seinen Träger auf der Komponente mit der Nummer $j_w(0)$). Die Funktion δ_w zeigt die Richtung des ‘‘Sprunges’’ aus einer irreduziblen Komponente von X auf eine der benachbarten Komponenten und $j_w(m)$ ist die Nummer der Komponente, auf der $w(m)$ seinen Träger hat.

THEOREM 2.2. *Es gibt eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte der abgeleiteten Kategorie $D^-(\text{Coh}_X)$, die zu keinem Shift einer Wolkenkratzergarbe in einem regulären Punkt isomorph sind, und Äquivalenzklassen von Saiten und Bändern.*

BEISPIEL 2.3. Sei X eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt. Betrachte den folgenden Komplex aus $D^-(\text{Coh}_X)$

$$\mathcal{F}_\bullet = (\mathcal{O} \xrightarrow{xy^2(x-\mu y)} \mathcal{B}(4, 1, \lambda)).$$

Dann ist er zu einer direkten Summe zweier Wolkenkratzergarben

$$\mathcal{F}_\bullet \cong \mathcal{O}_\mu/\mathfrak{m}_\mu \oplus \mathcal{B}((x_0^1, y_0^2), 1, \lambda)$$

isomorph, wobei die erste Garbe eine Wolkenkratzergarbe im regulären Punkt $\mu \in \mathbf{k}^* = X_{\text{reg}}$ ist. Die zweite hat hingegen ihren Träger im singulären Punkt und wird durch ein Band gegeben.

Dieser Satz wird in den nächsten Kapiteln bewiesen. Jetzt wollen wir zeigen, wie man den einem Band bzw. einer Saite entsprechenden Komplex konstruieren kann. Um die Notation einfacher zu halten, nehmen wir an, daß unser Zykel einfach eine irreduzible rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt ist. Dann ist $s = 1$, so spielt die Funktion j_w keine Rolle und jeder Shift ist erlaubt. Um die Konstruktion zu beschreiben, bemerken wir, daß die Vektorbündel über X von denjenigen Bändern beschrieben werden, die nur 0-Buchstaben mit dem Index $k = 0$ enthalten (so daß wir den weglassen dürfen). Wenn n_0, n_1, \dots, n_{l-1} ein Zykel ist, dann kann man ein Vektorbündel auf X durch Verklebung von Vektorbündeln auf der Normalisierung beschreiben. Ausgehend von $\bigoplus_{i=0}^{l-1} \tilde{\mathcal{O}}(n_i)^d$, wähle seine Trivialisierungen und identifiziere die Faser über 0 und ∞ nach der folgenden Regel:

- ist $0 \leq i < l - 1$, so wird die Basis von $\tilde{\mathcal{O}}(n_i)^d$ in ∞ mit der Basis von $\tilde{\mathcal{O}}(n_{i+1})^d$ in 0 identifiziert;
- die Basis von $\tilde{\mathcal{O}}(n_{l-1})^d$ in ∞ wird mit der getwisteten Basis von $\tilde{\mathcal{O}}(n_0)^d$ in 0 identifiziert, wobei der Twist durch die Jordansche Zelle $J_d(\lambda)$ vom Format $d \times d$ mit dem Eigenwert λ gegeben ist.

Völlig analog definiert man Verkleben in der abgeleiteten Kategorie. Man betrachte einen Zykel w , der durch sein Segment $w(0)w(1) \dots w(l-1)$ gegeben wird. Dann setze:

- statt des 0-Buchstabens n_k den k -ten Shift des Vektorbündels $\tilde{\mathcal{O}}(n)^d$,
- statt des x -Symbols x_k^n den k -ten Shift des Komplexes $(\tilde{\mathcal{O}}(-n) \xrightarrow{x^n} \tilde{\mathcal{O}})^d$ und
- statt des x -Symbols y_k^n den k -ten Shift des Komplexes $(\tilde{\mathcal{O}}(-n) \xrightarrow{y^n} \tilde{\mathcal{O}})^d$ ein.

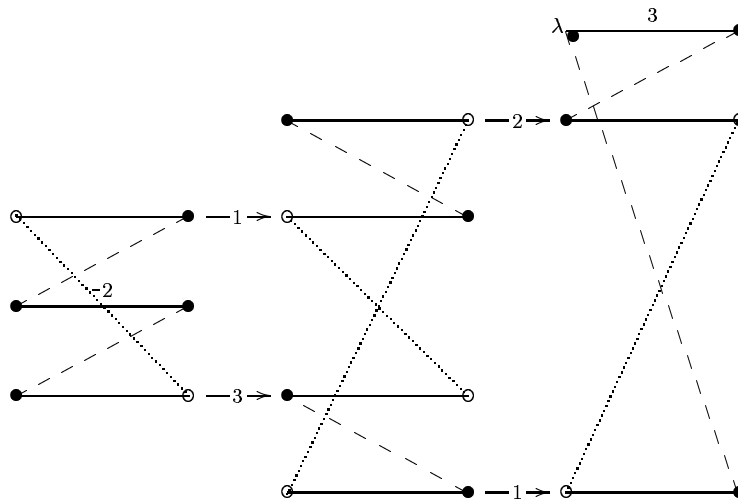
Hier sind $\tilde{\mathcal{O}}(-n) \xrightarrow{x^n} \tilde{\mathcal{O}}$ und $\tilde{\mathcal{O}}(-n) \xrightarrow{y^n} \tilde{\mathcal{O}}$ die lokal freien Auflösungen der Wolkenkratzergarben $\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}_0^n$ und $\tilde{\mathcal{O}}/\mathfrak{m}_\infty^n$. Wir nehmen eine direkte Summe aller dieser Komplexe, legen lokale Trivialisierungen fest und identifizieren die Faser über den Punkten 0 und ∞ . Und zwar, wenn i der gemeinsame aktive Index von $w(m)$ und $w(m+1)$ ist (es gilt $w(l) = w(0)$, $\delta = \delta_w(m)$) nach den *Regeln*:

1. Wenn $\delta = 1$ ist, dann verklebe die Faser über ∞ der i -ten Komponente des m -ten Komplex mit der Faser über 0 der i -ten Komponente des $(m + 1)$ -ten Komplexes (getwistet mit $J_d(\lambda)$, wenn $m = l - 1$ ist);
2. Wenn $\delta = -1$ ist, dann verklebe den Faser über dem Punkt 0 der i -ten Komponente des m -ten Komplexes mit der Faser über ∞ der i -ten Komponente des $(m + 1)$ -ten Komplexes (getwistet mit $J_d(\lambda)$, wenn $m = l - 1$ ist);
3. Verklebe die anderen Basen im Punkt 0 (die von den y -Buchstaben herkommen) mit den restlichen Basen im Punkt ∞ (die von den x -Buchstaben stammen), sodaß das "Parallelogrammprinzip" erfüllt wird. Dies heißt, daß wenn wir zwei Basen von Komplexen verkleben, die den Buchstaben x_k^n und y_k^r auf der k -ten Komponente entsprechen, dann wird dieselbe Verklebung auch auf der $(k + 1)$ -ten Komponente dieses Komplexes durchgeführt. Die Bedingung (3a) aus der Definition stellt sicher, daß das immer möglich ist.

BEMERKUNG 2.4. Diese Konstruktion muß im Fall $X = X_s$ mit $s \geq 3$ modifiziert werden. Um Komplexe lokal freier Moduln zu bekommen, müssen wir gewisse triviale Komplexe von $\tilde{\mathcal{O}}$ -Moduln $\tilde{\mathcal{O}}_i \xrightarrow{id} \tilde{\mathcal{O}}_i$ zum Verklebungsdatum addieren. Für mehr Details siehe das nächste Kapitel.

Man sieht leicht, daß wir in jeder Komponente des Komplexes ein Vektorbündel konstruiert haben. Das Differential des Komplexes auf \tilde{X} induziert Homomorphismen zwischen diesen Vektorbündeln. Wir erhalten einen Komplex lokal freier Garben auf X , der ein Objekt der abgeleiteten Kategorie definiert.

Betrachten wir ein paar Beispiele. Sei $\mathcal{B}(w, 1, \lambda)$ das dem Wort $w = 3_0x_0^2y_1^1 - 2_2x_1^3y_0^1$ entsprechende Band. Dann erhalten wir den Komplex:



In diesem und künftigen Diagrammen bezeichnen die durchgezogenen Kanten Vektorbündel auf der Normalisierung, ihre linken bzw. rechten Enden bezeichnen die Fasern über den Punkten 0 und ∞ . Die hochgestellten Ziffern zeigen Grade von Geradenbündeln an. Vektorbündel in derselben Spalte gehören derselben Komponente eines Komplexes. Im Beispiel entspricht die linke Spalte der zweiten Komponente und die rechte der nullten Komponente des Komplexes. Horizontale Pfeile stehen für das Differential: es wird durch x^n (oder durch y^n) gegeben, wenn das linke (bzw. rechte) Ende des entsprechenden Geradenbündels fette Punkte sind. Der absolute Grad dieser Geradenbündel spielt keine Rolle, nur ihre Differenz n (die in den Pfeilen eingebeten ist) ist wichtig. Der Twist mit λ wird am entsprechenden Ende angezeigt. Gestrichelte Kanten zeigen vorgegebene Verklebung

nach den Regeln 1 und 2; punktierte Kanten zeigen das “willkürliche” Verkleben nach dem “Parallelogrammprinzip” 3 an. Diese Kanten enden in kleinen Kreisen.

Der so konstruierte Komplex entspricht keiner kohärenten Garbe, denn er hat in der nullten und der zweiten Komponente nicht-triviale Kohomologie, die den durchgezogenen Kanten auf dem ersten und dem vierten Niveau entspricht. Man kann auch eine lokal freie Auflösung dieses Komplexes hinschreiben:

$$\mathcal{B}((-2, 0, 0), 1, 1) \longrightarrow \mathcal{B}((0, 0, 1, 3), 1, 1) \longrightarrow \mathcal{B}((3, 1, 2), 1, \lambda)$$

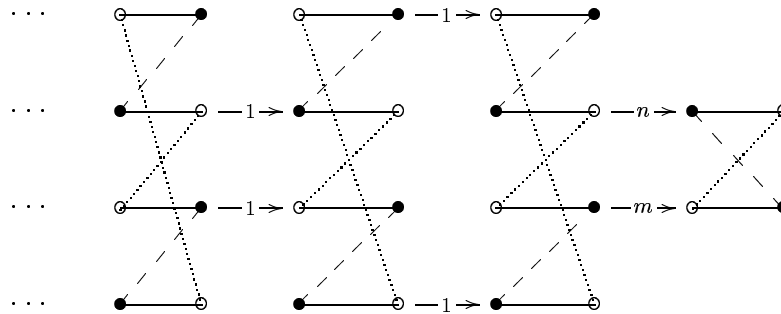
(da Differentiale werden durch Differentiale des normalisierten Komplexes induziert).

BEMERKUNG 2.5. Seien \mathcal{E} und \mathcal{F} zwei lokal freie \mathcal{O} -Moduln, $\tilde{\mathcal{E}}$ und $\tilde{\mathcal{F}}$ die entsprechenden $\tilde{\mathcal{O}}$ -Moduln. Die Differentiale des Diagramms sind Abbildungen von $\tilde{\mathcal{O}}$ -Moduln. Sie gehören zum Bild der kanonischen Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{O}}}(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{F}}),$$

definieren also Homomorphismen von \mathcal{O} -Moduln.

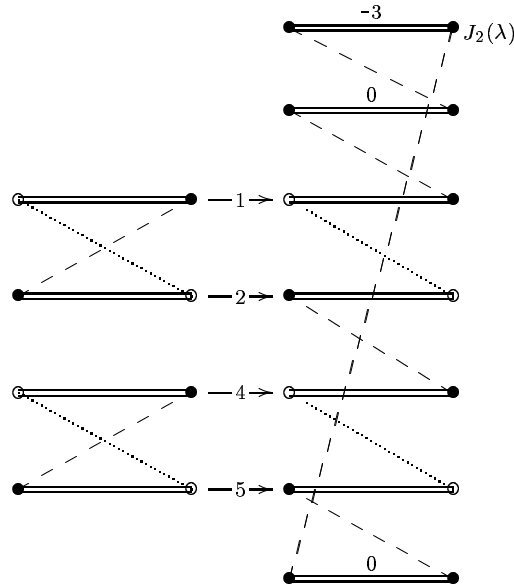
Das folgende Beispiel ist eine Saite $\mathcal{S}(w)$, wobei $w = \dots y_3^1 x_2^1 y_1^1 x_0^n y_0^m x_1^1 y_2^1 x_3^1 \dots$ ist. Sie entspricht einer Wolkenkratzergarbe im singulären Punkt p (also $\mathbf{k}(p)$, falls $n = m = 1$ ist). Der durch diese Saite gegebene Komplex ist:



Seine lokal freie Auflösung ist

$$\dots \longrightarrow \mathcal{B}((1, 0, 0, 1), 1, 1) \longrightarrow \mathcal{B}((1, 0, 0, 1), 1, 1) \longrightarrow \mathcal{B}((n, m), 1, 1).$$

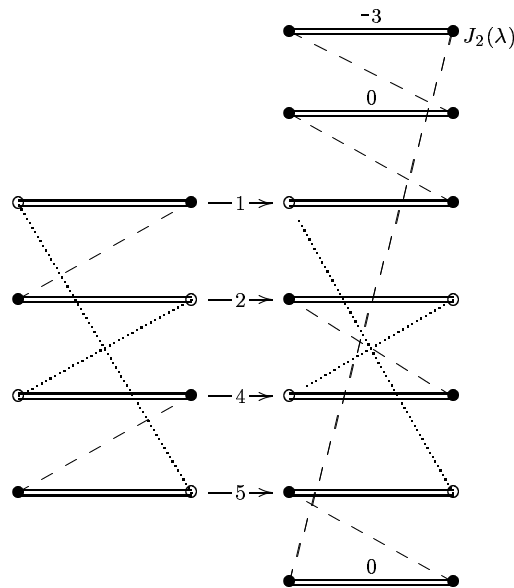
Das durch $w = -3_0 0_0 y_0^1 x_0^2 y_0^4 x_0^5 0_0$ gegebene Band $\mathcal{B}(w, 2, \lambda)$ definiert eine *gemischte* kohärente Garbe, d.h. eine Garbe, die weder torsionsfrei noch nulldimensional ist. Der entsprechende Komplex ist:



Die Verdopplung horizontaler Kanten zeigt an, daß jedes Geradenbündel zweimal genommen werden soll. Der Twist mit der Jordanschen Zelle wird an der entsprechenden Stelle angezeigt. Eine lokal freie Auflösung dieses Komplexes ist

$$\mathcal{B}((0, 0), 2, 1) \oplus \mathcal{B}((0, 0), 2, 1) \longrightarrow \mathcal{B}((-3, 0, 1, 2, 4, 5, 0), 2, \lambda).$$

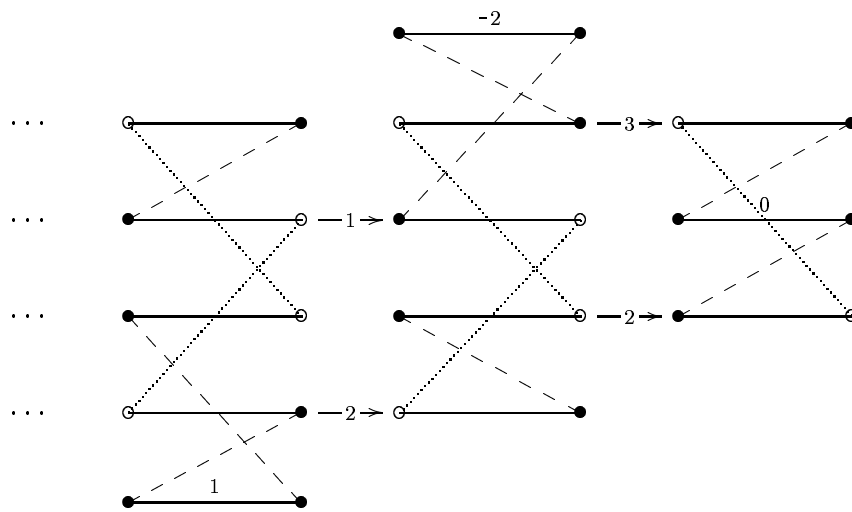
In diesem Beispiel können die freien Enden auch anders verbunden werden:



Wir bekommen einen isomorphen Komplex aus $D^-(\text{Coh}_X)$:

$$\mathcal{B}((0, 0, 0, 0), 2, 1) \longrightarrow \mathcal{B}((-3, 0, 1, 5, 0), 2, \lambda) \oplus \mathcal{B}((2, 4), 2, 1).$$

Das letzte Beispiel ist ein Objekt der Kategorie $D^-(\text{Coh}_X)$, das nicht zur Kategorie der beschränkten Komplexe $D^b(\text{Coh}_X)$ gehört. Es handelt sich um eine Saite $\mathcal{S}(w)$, wobei $w = \dots y_2^2 x_1^1 - 2_1 y_0^3 0_0 x_0^2 y_1^2 1_2 \dots$ ist. Diese Saite hat 0-Buchstaben mit allen Indizes, und das liefert, daß alle Kohomologien ungleich Null sind. Der entsprechende Komplex ist:



und seine lokal freie Auflöschung

$$\dots \longrightarrow \mathcal{B}((-2, 1, 2, 0, 0), 1, 1) \longrightarrow \mathcal{B}((0, 2, 3), 1, 1).$$

3. Die Hauptkonstruktion

Sei X eine reduzierte singuläre Kurve mit nodalen Singularitäten, $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ ihre Normalisierung, $\tilde{\mathcal{O}} = \pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ (also $\tilde{\mathcal{O}}_{X,x} = \bar{\mathcal{O}}_{X,x}$ ist) und $\mathcal{J} = \text{Ann}_{\mathcal{O}}(\tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$ der Konduktor. Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem zweiten Kapitel.

DEFINITION 3.1. *Die Kategorie der Tripel von Komplexen (Bezeichnung TK_X) wird folgendermaßen definiert:*

1. Objekte sind Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$, wobei $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \in D^-(\text{Coh}_{\tilde{\mathcal{O}}})$, $\mathcal{M}_\bullet \in D^-(\text{Coh}_{\mathcal{A}})$ und $\tilde{i} : \mathcal{M}_\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}}$ ein Isomorphismus aus $D^-(\text{Coh}_{\tilde{\mathcal{A}}})$ ist.
2. Ein Morphismus $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i}) \xrightarrow{(\Phi, \varphi)} (\tilde{\mathcal{G}}_\bullet, \mathcal{N}_\bullet, \tilde{j})$ wird durch ein Paar $(\Phi : \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}_\bullet, \varphi : \mathcal{M}_\bullet \rightarrow \mathcal{N}_\bullet)$ gegeben, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} \\ \varphi \otimes \downarrow & & \downarrow \Phi \otimes \\ \mathcal{N}_\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{\mathcal{G}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} \end{array}$$

kommutiert.

BEMERKUNG 3.2. *Sei $f : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ ein Ringhomomorphismus. Er induziert die Funktoren $f_* : \tilde{\mathcal{A}}\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$ und $f^* : \mathcal{A}\text{-mod} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}\text{-mod}$. Der Funktor f_* ist exakt. Der kanonische Morphismus von Funktoren $\text{id} \rightarrow f_* f^*$, induziert deshalb einen Morphismus abgeleiteter Funktoren*

$$\text{id} \rightarrow f_* Lf^*.$$

Es gilt

$$\text{Hom}(Lf^* \mathcal{M}_\bullet, \mathcal{N}_\bullet) = \text{Hom}(\mathcal{M}_\bullet, f_*(\mathcal{N}_\bullet)).$$

Damit erhalten wir in der abgeleiteten Kategorie $D^-(\text{Coh}_{\mathcal{A}})$ eine kanonische Abbildung $\mathcal{M}_\bullet \rightarrow \mathcal{M}_\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}}$ (siehe [28] für die allgemeine Eigenschaften abgeleiteter Kategorien).

THEOREM 3.3. *Bezeichne $\tilde{i}_{\mathcal{F}_\bullet}$ den natürlichen Isomorphismus*

$$(\mathcal{F}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}) \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{F}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{A}} \simeq (\mathcal{F}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}}.$$

Dann ist der Funktor $\mathbf{F} : D^-(\text{Coh}_X) \rightarrow \text{TC}_X$, $\mathcal{F}_\bullet \mapsto (\mathcal{F}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{F}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}, \tilde{i}_{\mathcal{F}_\bullet})$, dicht und entdeckt Isomorphismen (d.h. $\mathbf{F}(\mathcal{F}_\bullet) \cong \mathbf{F}(\mathcal{G}_\bullet)$ impliziert $\mathcal{F}_\bullet \cong \mathcal{G}_\bullet$). \mathbf{F} ist aber keine Äquivalenz (\mathbf{F} ist nicht treu).

BEWEIS. Im folgenden nehmen wir an, daß alle Komplexe lokal frei sind. Zuerst werden wir zeigen, daß Φ die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Jedes Objekt in TK_X ist isomorph zu einem $\Phi(\mathcal{F}_\bullet)$ für geeignetes $\mathcal{F}_\bullet \in \text{Ob}(D^-(\text{Coh}_X))$.
2. $\Phi(\mathcal{F}_{1\bullet}) \cong \Phi(\mathcal{F}_{2\bullet}) \Leftrightarrow \mathcal{F}_{1\bullet} \cong \mathcal{F}_{2\bullet}$.

Die erste Frage ist: wie erhält man aus dem Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ ein Objekt aus $D^-(\text{Coh}_X)$? Die Idee kommt aus der Analogie zu den Vektorbündeln.

Wir haben eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow 0.$$

Diese Sequenz ist exakt sowohl in $\text{Com}(\tilde{\mathcal{O}}\text{-mod})$ als auch in $\text{Com}(\mathcal{O}\text{-mod})$. Also hat man in den abgeleiteten Kategorien ein Dreieck

$$\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet[-1].$$

Sei i die Verknüpfung von \tilde{i} mit der kanonischen Abbildung $\mathcal{M}_\bullet \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}}$. Die Kegelaixiome und Ergänzungsaxiome besagen, daß es einen Morphismus $\mathcal{F}_\bullet \xrightarrow{\Phi} \tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ gibt, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet[-1] \\ id \uparrow & & \Phi \uparrow & & i \uparrow & & id \uparrow \\ \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{F}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{M}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet[-1]. \end{array}$$

Mit anderen Worten ist $\mathcal{F}_\bullet = \text{Con}(\mathcal{M}_\bullet \longrightarrow \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet[-1])[1]$. Da der Morphismus $\mathcal{F}_\bullet \xrightarrow{\Phi} \tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ nicht kanonisch ist, hat man keinen Funktor $\text{TK}_X \longrightarrow D^-(\text{Coh}_X)$. Die Axiome einer triangulierten Kategorie sagen uns aber, daß isomorphe Tripel isomorphen Komplexen entsprechen. Also haben wir eine Abbildung (keinen Funktor!) $\Psi : \text{Ob}(\text{TK}_X) \longrightarrow \text{Ob}(D^-(\text{Coh}_X))$, die isomorphen Objekten isomorphe Objekte zuordnet.

Jetzt prüfen wir, daß $\Phi^{-1} = \Psi$ auf Isomorphieklassen von Objekten ist, d.h. daß die Abbildungen

$$(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i}) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{F}_\bullet \xrightarrow{\Phi} (\mathcal{F}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{F}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{j}) \cong (\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$$

und

$$\mathcal{F}_\bullet \xrightarrow{\Phi} (\mathcal{F}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{O}}, \mathcal{F}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{j}) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{F}_\bullet$$

Isomorphismen sind. Sei $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet = \mathcal{F}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{O}}$. Falls \mathcal{F}_\bullet ein Komplex lokal freier Moduln ist, dann ist $\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet = \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ als Komplex von $\tilde{\mathcal{O}}$ -Moduln (siehe dieselbe Aussage für lokal-freie $\tilde{\mathcal{O}}$ -Moduln).

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet[-1] \\ id \uparrow & & & & i \uparrow & & id \uparrow \\ \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{F}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{F}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet[-1]. \end{array}$$

Nach dem Satz über Isomorphismen von Kegeln folgt: das Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ gibt uns \mathcal{F}_\bullet zurück. Der Beweis der zweiten Aussage ist viel interessanter. Beweisen wir zuerst ein Lemma

LEMMA 3.4. *Jedes Tripel $T = (\tilde{\mathcal{G}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ aus TC_X ist zu einem Tripel $T' = (\tilde{\mathcal{G}}'_\bullet, \mathcal{M}'_\bullet, \tilde{i}')$ isomorph, bei dem \tilde{i}' ein Isomorphismus von Komplexen ist (beachte, daß \tilde{i} nur ein Isomorphismus in $D^-(\text{Coh}_{\tilde{\mathcal{A}}})$ ist).*

BEWEIS. Wir identifizieren kohärente \mathcal{A} -Moduln mit endlich dimensionalen Darstellungen der endlich-dimensionalen Algebra $\mathbf{A} = \prod_{x \in S} \mathcal{A}_x$ ($S = \text{Sing}(X)$), entsprechend werden kohärente $\tilde{\mathcal{A}}$ -Moduln mit Darstellungen von $\tilde{\mathbf{A}} = \bigoplus_{x \in S} \tilde{\mathcal{A}}_x$ identifiziert. Ferner identifizieren wir $D^-(\text{Coh}_{\mathcal{A}})$ und $D^-(\text{Coh}_{\tilde{\mathcal{A}}})$ mit Homotopiekategorien von Komplexen projektiver Moduln [28]. Sei \mathbf{J} (bzw. $\tilde{\mathbf{J}}$) das Radikal von \mathbf{A} (bzw. $\tilde{\mathbf{A}}$). Ein Komplex \mathcal{M}_\bullet projektiver \mathbf{A} -Moduln heißt *minimal*, wenn $\text{Im } d_n \subseteq \mathbf{J}\mathcal{M}_{n-1}$ für jedes n gilt; dieselbe Einschränkung haben wir auf $\tilde{\mathcal{A}}$ -Moduln und $\tilde{\mathcal{A}}$ -Garben. Die beiden Algebren sind kommutativ, damit gilt $\mathbf{J} \subseteq \tilde{\mathbf{J}}$. Wenn \mathcal{M}_\bullet minimal ist, dann ist $\tilde{\mathcal{M}}_\bullet = \mathcal{M}_\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}$ auch minimal. Jeder Komplex $\mathcal{M}_\bullet \in D^-(\text{Coh}_{\mathcal{A}})$ ist eine direkte Summe $\mathcal{M}_\bullet^m \oplus \mathcal{M}_\bullet^t$, wobei \mathcal{M}_\bullet^m ein minimaler und \mathcal{M}_\bullet^t ein *trivialer* Komplex ist, d.h. isomorph zu einer direkten Summe von *kurzen trivialen Komplexen* der Gestalt $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\cong} \mathcal{M} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$.

Die Komplexe \mathcal{M}_\bullet^m und \mathcal{M}_\bullet^t heißen entsprechend der *minimale* und der *triviale Teil* des Komplexes \mathcal{M}_\bullet .

Man sieht leicht, daß

- die Einbettung $\mathcal{M}_\bullet^m \rightarrow \mathcal{M}_\bullet$ ein Quasiisomorphismus ist und
- jeder Quasiisomorphismus von minimalen Komplexen ein Isomorphismus von Komplexen ist.

Das Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ ist isomorph zu $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet^m, \tilde{i}^m)$, worin $\tilde{i}^m : \tilde{\mathcal{M}}_\bullet^m \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet^m$ die minimale Komponente von $\tilde{i} : \tilde{\mathcal{M}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet$, \tilde{i}^m ein Isomorphismus von Komplexen ist. Nun bemerken wir zunächst, daß sowohl $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ als auch \mathcal{M}_\bullet^m lokal frei ist: dann ist auch $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet^t$ lokal frei, also zu einer direkten Summe von Komplexen $\tilde{\mathcal{A}}_x^n \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathcal{A}}_x^n$ isomorph. Jetzt liften wir jeden Isomorphismus $\tilde{\mathcal{A}}_x^n \xrightarrow{\text{id}} \tilde{\mathcal{A}}_x^n$ zu $\mathcal{A}_x^n \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{A}_x^n$. Dabei können wir erreichen, daß $\tilde{i} : \tilde{\mathcal{M}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ ein Isomorphismus der Komplexe ist. \square

Sei jetzt $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ ein Tripel, mit \tilde{i} einem Isomorphismus von Komplexen. Wir betrachten das Pullback der Abbildungen $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet / \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ und i :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{F}_\bullet & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{M}_\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \Phi & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet / \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \longrightarrow 0. \end{array}$$

Wie im Fall von Vektorbündeln man zeigt, daß \mathcal{F}_\bullet ein Komplex lokal freier \mathcal{O} -Moduln ist und daß $\tilde{\Phi} : \mathcal{F}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ und $\tilde{\psi} : \mathcal{F}_\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_\bullet$ Isomorphismen *von Komplexen* sind. Dies beweist die ersten zwei Aussagen des Haupttheorems.

Der Funktor \mathbf{F} ist allerdings nicht treu, wie man an folgendem Beispiel sieht: seien

$$\mathcal{E}_\bullet[1] = \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow 0 \dots$$

und

$$\mathcal{F}_\bullet = \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathcal{F}}_0 \longrightarrow 0 \dots$$

zwei Komplexe mit Vektorbündel \mathcal{F} und \mathcal{G} . Es ist $\text{Hom}(\mathcal{F}_\bullet, \mathcal{E}_\bullet[-1]) = \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{E})$, und offensichtlich $\text{Hom}_{\text{TK}_X}(\Phi(\mathcal{F}_\bullet), \Phi(\mathcal{E}_\bullet[-1])) = \text{Hom}_{D-(\text{Coh}_{\tilde{X}})}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{E}}[-1]) = \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{O}}_X}^1(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{E}})$. Wäre der Funktor Φ treu, dann wäre die Abbildung

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \longrightarrow \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{O}}_X}^1(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{E}})$$

ein Monomorphismus. Dies ist aber nicht der Fall: $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}, \mathcal{F}) = H^1(X, \mathcal{F})$ und $\text{Ext}_{\tilde{\mathcal{O}}}^1(\tilde{\mathcal{O}}, \tilde{\mathcal{F}}) = H^1(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})$, während andererseits $\dim_{\mathbf{k}}(H^1(X, \mathcal{F})) = \dim_{\mathbf{k}}(H^1(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{F}})) + \dim_{\mathbf{k}}(H^0(X, \tilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}))$. Das beweist unser Haupttheorem. \square

4. Der Fall des Ringes $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$

Wir illustrieren unsere Ideen am Beispiel der Beschreibung unzerlegbarer Objekte der Kategorie $D^-(\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)\text{-mod})$. Sei $R = \mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$, dann ist die Normalisierung $\bar{R} = \mathbf{k}[[x]] \times \mathbf{k}[[y]]$. Die Normalisierungsabbildung $R \rightarrow \bar{R}$ sendet x nach $[x, 0]$ und y nach $[0, y]$. Der Konduktor ist $J = \text{Ann}_R(\bar{R}/R) = (x, y)$, also $R/J = \mathbf{k}$ und $\bar{R}/J = \mathbf{k} \times \mathbf{k}$. Wir können die ganze Konstruktion der Kategorie der Tripel für diese Situation wiederholen.

Der Komplex $F_\bullet \in \text{Ob}(D^-(\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)\text{-mod}))$ wird folglich eindeutig durch ein Tripel $(\tilde{F}_\bullet, M_\bullet, \tilde{i})$ bestimmt. \tilde{F}_\bullet ist ein Komplex der Kategorie $D^-(\mathbf{k}[[x]] \times \mathbf{k}[[y]]\text{-mod}) = D^-(\mathbf{k}[[x]]\text{-mod}) \times D^-(\mathbf{k}[[y]]\text{-mod})$ (direktes Produkt der Kategorien).

Der Ring $\mathbf{k}[[x]]$ ist ein diskreter Bewertungsring, seine homologische Dimension ist also eins. Nach dem Satz vom Dold ([14]) haben die unzerlegbaren Objekte der abgeleiteten Kategorie $D^-(\mathbf{k}[[x]]\text{-mod})$ die Gestalt

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow M \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

mit einem unzerlegbaren $\mathbf{k}[[x]]$ -Modul M . Aber die einzigen unzerlegbaren $\mathbf{k}[[x]]$ -Moduln sind $F_x = \mathbf{k}[[x]]$ und $T_{nx} = \mathbf{k}[[x]]/(x^n)$. In der abgeleiteten Kategorie gilt

$$\mathbf{k}[[x]]/(x^n) = (\mathbf{k}[[x]] \xrightarrow{x^n} \mathbf{k}[[x]]).$$

Wir identifizieren die abgeleitete Kategorie $D^-(\mathbf{k}[[x]]\text{-mod})$ mit der Homotopie-Kategorie der Komplexe von projektiven (= freien) $\mathbf{k}[[x]]$ -Moduln $K_{\mathcal{P}}(\mathbf{k}[[x]]\text{-mod})$. Schreiben wir analog $F_y = \mathbf{k}[[y]]$ und $T_{my} = \mathbf{k}[[y]]/(y^m)$.

So ist

$$\tilde{F}_\bullet = \bigoplus ((F_x[i]^{m_{xi}} \oplus T_{nx}[i]^{m_{nxi}}) \oplus (F_y[i]^{m_{yi}} \oplus T_{ny}[i]^{m_{nyi}})).$$

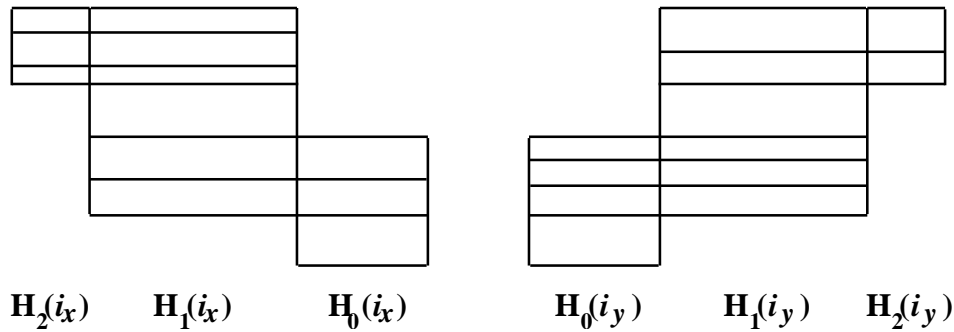
Bemerken wir zunächst, daß $R/J = \mathbf{k}$ und $\bar{R}/J = \mathbf{k} \times \mathbf{k}$, und daß $R/J \rightarrow \bar{R}/J$ die Diagonalabbildung ist. Man sieht, daß $D^-(R/J\text{-mod})$ einfach $D^-(\text{Vekt}_{\mathbf{k}})$, die abgeleitete Kategorie der Kategorie der Vektorräume ist. Weil $\text{Vekt}_{\mathbf{k}}$ die homologische Dimension null hat, haben wir einen funktoriellen Isomorphismus $M_\bullet \rightarrow (H_\bullet(M_\bullet), 0)$ [28]. Ferner gibt es ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M_\bullet \otimes_R \bar{R}/J & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{F}_\bullet \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J \\ \downarrow & & \downarrow \\ (H_\bullet(M_\bullet \otimes_R \bar{R}/J), 0) & \xrightarrow{H_\bullet(\tilde{i})} & (H_\bullet(\tilde{F}_\bullet \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J), 0). \end{array}$$

Also läßt sich die Abbildung \tilde{i} als der Satz von Matrizen $H_k(\tilde{i}) : H_k(M_\bullet \otimes_R \bar{R}/J) \rightarrow H_k(\tilde{F}_\bullet \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J)$ darstellen.

Man betrachte $\tilde{F}_\bullet \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J$. Es gilt $F_x \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J = \mathbf{k}_x$, $F_y \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J = \mathbf{k}_y$, $T_{nx} \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J = (\mathbf{k}_x \xrightarrow{0} \mathbf{k}_x)$, $T_{my} \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J = (\mathbf{k}_y \xrightarrow{0} \mathbf{k}_y)$.

Man wähle die Urbilder der Einselemente von $\mathbf{k}[[x]]$ und $\mathbf{k}[[y]]$ als Basen der $H_k(\tilde{F}_\bullet \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J)$. Die Zerlegung von \tilde{F}_\bullet in eine direkte Summe unzerlegbarer Objekte zerlegt die Matrizen $H_k(\tilde{i}) = (H_k(i_x) | H_k(i_y))$ in horizontale Blöcke:



Insgesamt gilt: ein Komplex F_\bullet aus der $D^-(R\text{-mod})$ wird durch den normalisierten Komplex \tilde{F}_\bullet und die Matrizen $H_k(\tilde{i})$, $k \geq 0$ eindeutig bestimmt. Zwei Tripel $(\tilde{F}_\bullet, M_\bullet, \tilde{i})$ und $(\tilde{G}_\bullet, N_\bullet, \tilde{j})$ ergeben isomorphe Komplexe F_\bullet und G_\bullet genau dann, wenn es Isomorphismen $\tilde{F}_\bullet \xrightarrow{\Phi} \tilde{G}_\bullet$ aus $D^-(\bar{R}\text{-mod})$ und $M_\bullet \xrightarrow{\varphi} N_\bullet$ aus $D^-(R/J\text{-mod})$ gibt, so daß

$$\begin{array}{ccccccc}
\tilde{F}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{F}_\bullet \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J & \longrightarrow & (H_\bullet(\tilde{F}_\bullet \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J), 0) & \longleftarrow & \xrightarrow{H_\bullet(\tilde{i})} (H_\bullet(M_\bullet \otimes_R \bar{R}/J), 0) \\
\downarrow \Phi & & \downarrow \bar{\Phi} & & \downarrow H_\bullet(\bar{\Phi}) & & \downarrow H_\bullet(\varphi) \\
\tilde{G}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{G}_\bullet \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J & \longrightarrow & (H_\bullet(\tilde{G}_\bullet \otimes_{\bar{R}} \bar{R}/J), 0) & \longleftarrow & \xrightarrow{H_\bullet(\tilde{j})} (H_\bullet(N_\bullet \otimes_R \bar{R}/J), 0)
\end{array}$$

kommutativ ist.

Beschreiben wir also zuerst die Automorphismen von \tilde{F}_\bullet . Ganz allgemein sei $\tilde{F}_\bullet = \bigoplus_i \tilde{F}_i^{n_i}$ die Zerlegung in eine direkte Summe unzerlegbarer Objekte. Dann läßt sich ein Element $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{F}_\bullet)$ in einer Matrixform Φ_{ij} schreiben, wobei $\Phi_{ij} \in \text{Hom}(\tilde{F}_i, \tilde{F}_j)^{n_i \times n_j}$ ist. Ein Morphismus Φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn alle $n_i \times n_i$ -Matrizen Φ_{ii} zu $GL_{n_i}(\text{End}(\tilde{F}_i))$ gehören. Wir wollen alle Morphismen zwischen unzerlegbaren Objekten der Kategorie $D^-(\mathbf{k}[[x]]\text{-mod})$ beschreiben. Dabei benutzen wir die Tatsache, daß der kanonische Funktor $A \longrightarrow D^-(A)$ voll und treu ist. Man weiß, daß $\text{End}(\mathbf{k}[[x]]) = \mathbf{k}[[x]]$, $\text{End}(\mathbf{k}[[x]]/(x^n)) = \mathbf{k}[[x]]/(x^n)$. Es ist klar, daß die Automorphismen von F_x^n durch $n \times n$ Matrizen über $\mathbf{k}[[x]]$ gegeben werden. Ein Endomorphismus von T_{nx} hat die Form

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^n} & \mathbf{k}[[x]] \\
\downarrow p(x) & & \downarrow p(x) \\
\mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^n} & \mathbf{k}[[x]]
\end{array}$$

und zwei Polynome $p(x)$ und $p'(x)$ genau dann ergeben denselben Morphismus, wenn $p(x) - p'(x) \in (x^n)$ ist.

Sei $\bar{\Phi}$ ein Endomorphismus von T_{nx}^s . Er ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er ein Isomorphismus modulo des maximalen Ideals (x) ist, d.h. wenn

$$\bar{\Phi} = \Phi \otimes id : T_{nx}^s \otimes_{\mathbf{k}[[x]]} (\mathbf{k}[[x]]/(x)) \longrightarrow T_{nx}^s \otimes_{\mathbf{k}[[x]]} (\mathbf{k}[[x]]/(x))$$

ein Isomorphismus ist. Es ist aber klar, daß

$$T_{nx}^s \otimes_{\mathbf{k}[[x]]} (\mathbf{k}[[x]]/(x)) = (\mathbf{k}_x^s \xrightarrow{0} \mathbf{k}_x^s)$$

ist und $\bar{\Phi}$ durch die Matrix $(\Phi(0), \Phi(0))$ gegeben wird ($\Phi(0)$ ist eine $s \times s$ -Matrix über \mathbf{k} : der Wert der Abbildung Φ im Punkt 0).

Man betrachte jetzt die Transformationen, die wir mit unseren Matrizen $H_k(\tilde{i})$, $k \geq 0$ durchführen können. Jede Matrix $H_k(\tilde{i})$ besteht aus zwei Komponenten $H_k(i_x)$ und $H_k(i_y)$. Die erste entspricht der x -Variable und die zweite y . Die Tatsache, daß

$$H_k(\tilde{i}) : H_k(M_\bullet) \otimes_{R/J} \bar{R}/J \longrightarrow H_k(\tilde{F}_\bullet \otimes_R R/J)$$

ein Isomorphismus ist, liefert, daß die beiden Matrizen $H_k(i_x)$ und $H_k(i_y)$ quadratisch und invertierbar sind. Ein Automorphismus $H_\bullet(\varphi)$ gibt eine elementare Transformation der Spalten von $H_k(i_x)$ und $H_k(i_y)$. Umformungen der Zeilen der Matrizen $H_k(i_x)$ und $H_k(i_y)$ sind unabhängig und werden von Automorphismen der \tilde{F}_\bullet induziert. Also, schauen wir nun, was die Automorphismen von \tilde{F}_\bullet in der Homologie modulo dem Konduktor induzieren. Es gilt:

1. $\text{Hom}(\mathbf{k}[[x]]/(x^n), \mathbf{k}[[x]]/(x^m)) = \mathbf{k}[[x]]/x^{\min(n,m)}$,
2. $\text{Hom}(\mathbf{k}[[x]], \mathbf{k}[[x]]/(x^m)) = \mathbf{k}[[x]]/x^m$
3. $\text{Hom}(\mathbf{k}[[x]]/(x^n), \mathbf{k}[[x]]) = 0$,
4. $\text{Ext}^1(\mathbf{k}[[x]]/(x^n), \mathbf{k}[[x]]/(x^m)) = \mathbf{k}[[x]]/x^{\min(n,m)}$.

1. Sei $n > m$. Ein Morphismus $T_{nx} \rightarrow T_{mx}$ wird gemäß dem Diagramm durch ein Polynom $p(x)$ gegeben

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^n} & \mathbf{k}[[x]] \\ \downarrow x^{n-m}p(x) & & \downarrow p(x) \\ \mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^m} & \mathbf{k}[[x]] \end{array}$$

und induziert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_x & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_x \\ \downarrow 0 & & \downarrow p(0) \\ \mathbf{k}_x & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_x. \end{array}$$

Man beachte, daß $p(0)$ beliebig sein kann.

Sei weiter $n > m$. Ein Morphismus $T_{mx} \rightarrow T_{nx}$ wird wieder durch ein Polynom $p(x)$ gegeben: das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^m} & \mathbf{k}[[x]] \\ \downarrow p(x) & & \downarrow x^{n-m}p(x) \\ \mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^n} & \mathbf{k}[[x]] \end{array}$$

induziert

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_x & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_x \\ \downarrow p(0) & & \downarrow 0 \\ \mathbf{k}_x & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_x. \end{array}$$

2. Wir haben die Morphismen der Komplexe (n, m sind beliebige natürliche Zahlen, $p(x)$ eine beliebige Potenzreihe)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^n} & \mathbf{k}[[x]] \\ \downarrow & & \downarrow p(x) & & \downarrow 0 \\ \mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^n} & \mathbf{k}[[x]] & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

dies induziert:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{k}_x & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_x \\ \downarrow & & \downarrow \lambda & & \downarrow 0 \\ \mathbf{k}_x & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_x & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

3. Wir haben auch

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{k}[[x]] \\ \downarrow & & \downarrow p(x) \\ \mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^n} & \mathbf{k}[[x]], \end{array}$$

und dies induziert:

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{k}_x \\ \downarrow & & \downarrow p(0) \\ \mathbf{k}_x & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_x \end{array}$$

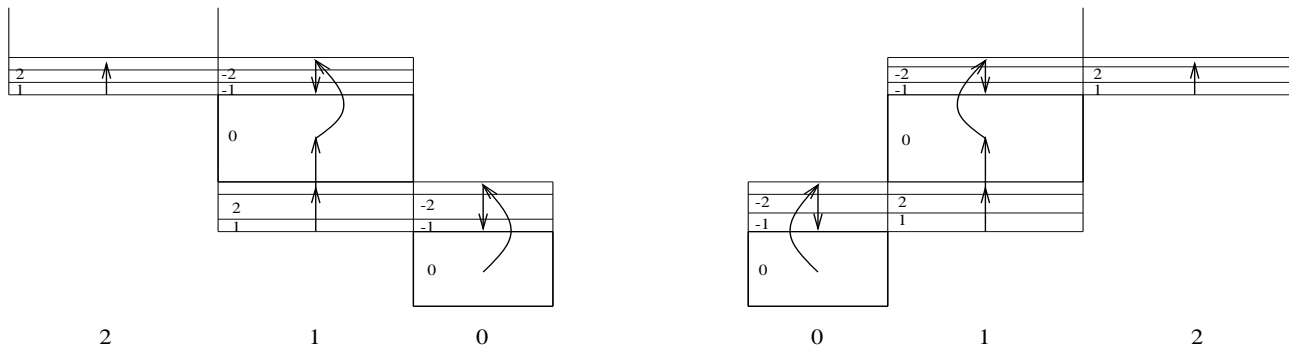
4. Schließlich induziert die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}[[x]] & \xrightarrow{x^n} & \mathbf{k}[[x]] \\ p(x) \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{k}[[x]] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_x & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_x \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{k}_x & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Es gibt keine andere Morphismen unzerlegbarer Objekte in der abgeleiteten Kategorie. Wir erhalten also das folgende Matrixproblem:



Matrizen mit gleicher Nummer, also mit gleichem Grad der Homologie haben die gleiche Größe, die natürlich auch null sein kann. Die Matrizen werden in horizontale Blöcke unterteilt: solche, die von den $F_x[i]$ und $F_y[i]$, und andere, die von $T_{nx}[j]$ und $T_{ny}[j]$ kommen. Jeder Block hat seine Nummer (Gewicht); die partielle Ordnung wird im Bild gezeigt. Den Komponenten der Auflösung der Torsionsmoduln $T_{nx}[j]$ und $T_{ny}[j]$ entsprechende Blöcke sind zueinander konjugiert. Sie haben deshalb die gleiche Zeilenzahl.

1. Wir können simultane Transformationen der Spalten der Matrizen $H_k(i_x)$ und $H_k(i_y)$ durchführen.
2. Wir können beliebige simultane Transformationen innerhalb der konjugierten Blöcke vornehmen.
3. Wir können das Vielfache einer Zeile mit kleinerem Gewicht zu einer Zeile mit größerem Gewicht (innerhalb der Matrizen $H_k(i_x)$ und $H_k(i_y)$) hinzuaddieren. Diese Umformungen kann man unabhängig voneinander machen.

Wir beschreiben jetzt die partiell geordnete Menge, die diesem Matrixproblem entspricht. Seien $\omega_{-1} < \omega_0 < \omega_1$ drei Kardinalzahlen (dies bedeutet, daß $n\omega_{-1} < m\omega_0 < k\omega_1$ für alle ganzen Zahlen n, m, k ist).

1. Jedem Komplex

$$T_{nx}[i] : \quad 0 \longrightarrow \mathbf{k}[[x]] \xrightarrow{x^n} \underbrace{\mathbf{k}[[x]]}_i \longrightarrow 0$$

entsprechen zwei Symbole $E_x(i, -n\omega_{-1})$ und $E_x(i + 1, n\omega_1)$.

2. Jedem Komplex

$$T_{my}[j] : \quad 0 \longrightarrow \mathbf{k}[[y]] \xrightarrow{y^m} \underbrace{\mathbf{k}[[y]]}_j \longrightarrow 0$$

entsprechen zwei Symbole $E_y(j, -m\omega_{-1})$ und $E_y(j + 1, m\omega_1)$.

3. Dem Komplex

$$F_x[i] : \quad 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbf{k}[[x]]}_i \longrightarrow 0$$

entspricht das Symbol $E_x(i, \omega_0)$.

4. Dem Komplex

$$F_y[j] : \quad 0 \longrightarrow \underbrace{\mathbf{k}[[y]]}_j \longrightarrow 0$$

entspricht das Symbol $E_y(j, \omega_0)$.

Sei

$$\mathbf{E}_x(i) = \bigcup_{*} \{E_x(i, *)\}, \quad \mathbf{E}_y(j) = \bigcup_{*} \{E_y(j, *)\},$$

$$\mathbf{E} = \bigcup_{i, j \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}_x(i) \cup \mathbf{E}_y(j).$$

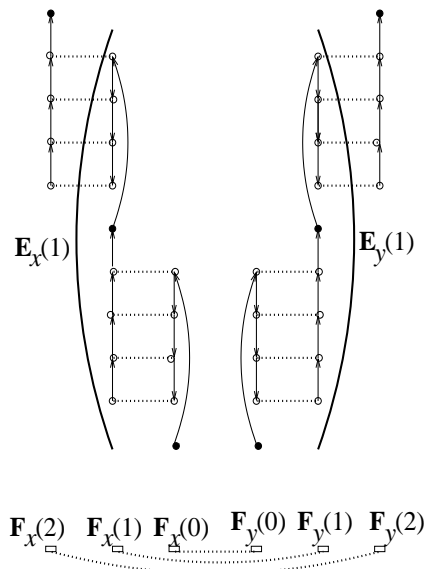
Auf den Mengen $\mathbf{E}_x(i)$ hat man eine natürliche Ordnung: $E_1 < E_2$ falls es einen Morphismus der Komplexe gibt, der in den entsprechenden Homologien eine nichttriviale Abbildung induziert. Die obigen Berechnungen zeigen, daß die Ordnung auf $\mathbf{E}_x(i)$ mit der von Kardinalzahlen induzierten Ordnung übereinstimmt. Die Elemente der Menge \mathbf{E} entsprechen den Zeilenblöcken des Matrixproblems. Wir führen außerdem Symbole $F_x(i)$ und $F_y(i)$ ein, die den Spalten der Matrizen $H_k(i_x)$ und $H_k(i_y)$ entsprechen. Wir bezeichnen $\mathbf{F}_x(i) = \{F_x(i)\}$, $\mathbf{F}_y(i) = \{F_y(i)\}$ und setzen

$$\mathbf{F} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}_x(i) \cup \mathbf{F}_y(i).$$

Auf $\mathbf{E} \cup \mathbf{F}$ führen wir die folgende Äquivalenzrelation ein:

1. $E_x(i, -n\omega_{-1}) \sim E_x(i + 1, n\omega_1)$ für $i \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ (weil beide Symbole demselben Komplex $T_{nx}[i]$ entsprechen).
2. Analog ist $E_y(j, -m\omega_{-1}) \sim E_y(j + 1, m\omega_1)$ für $j \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$.
3. $F_x(i) \sim F_y(i)$.

Im Bild sieht das so aus:

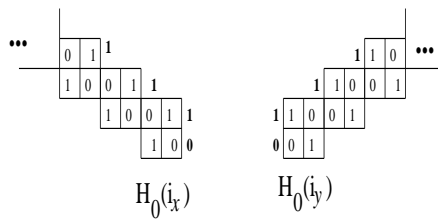


Wir geben nun einige einfache Beispiele:

1. Die folgende Saite definiert den $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Modul \mathbf{k} : die Normalisierung:

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} (T_{1x}[i] \oplus T_{1y}[i]),$$

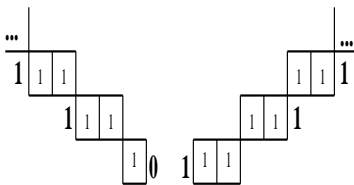
die Matrizen:



2. Der $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Modul $\mathbf{k}[[x]]$ wird durch die Normalisierung

$$\mathbf{k}[[x]] \oplus \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} T_{iy} \oplus T_{i+1x} \right)$$

und die Matrizen



gegeben.

THEOREM 4.1. *Die abgeleitete Kategorie $D^-(\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)\text{-mod})$ hat zwei Typen unzerlegbarer Objekte: Bänder und Saiten (für die Bezeichnungen und Terminologie siehe den Anhang).*

1. Ein Band $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ definiert ein Tripel $(\tilde{F}_\bullet, M_\bullet, \tilde{i})$, wobei
 - (a) w ein geschlossenes Wort über $\mathbf{E} \cup \mathbf{F}$ ist, das keine Potenz eines anderen Wortes ist, das Wort w enthält die ganze Information über \tilde{F}_\bullet ;

- (b) $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist, und
- (c) $\lambda \in \mathbf{k}^*$ ein stetiger Parameter.

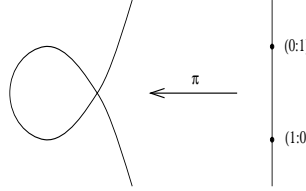
Die einzige Bedingung an das Wort w ist, daß w geschlossen sein muß.

2. Eine Saite $\mathcal{S}(w)$ hängt nur von einem vollen Wort w ab (das endlich oder unendlich sein kann). Die folgenden Bedingungen müssen zusätzlich erfüllt sein (sie folgen aus der Bedingung, daß die Matrizen $H_i(x)$ und $H_i(y)$ die gleiche Größe haben müssen und nicht entartet sein dürfen):
 - (a) Für jede natürliche Zahl i treten die Elemente von $\mathbf{E}_x(i)$, $\mathbf{E}_y(i)$, $\mathbf{F}_x(i)$ und $\mathbf{F}_y(i)$ im Wort w gleich oft auf.
 - (b) Die Unterworte vom Typ $E_x(i, -n\omega_{-1}) - F_x(i)$, $F_x(i) - E_x(i, -n\omega_{-1})$ von einer Seite und vom Typ $E_x(i+1, n\omega_1) - F_x(i+1)$, $F_x(i+1) - E_x(i+1, n\omega_1)$ von der anderen treten gleich oft auf.
 - (c) Dieselbe Bedingung gilt für y .

Die ausführliche Analyse dieses Matrixproblems wird im übernächsten Kapitel durchgeführt. Wir betrachten nun die abgeleitete Kategorie kohärenter Garben auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt.

5. Kohärente Garben auf einer rationalen Kurve mit gewöhnlichem Doppelpunkt

Wir betrachten zuerst den Fall einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt. Ihre Gleichung sei $zy^2 = x^3 - x^2z$. Dann ist die Normalisierung $\tilde{X} = \mathbf{P}^1$. Wir nehmen an, daß die Urbilder des singulären Punktes $(0 : 1) = 0$ und $(1 : 0) = \infty$ sind.



Was liefert uns das Ergebnis des vorletzten Kapitels? Ein Komplex \mathcal{F}_\bullet wird als Datenstruktur eindeutig durch ein Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ bestimmt.

Was ist $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$? Die Kategorie $\text{Coh}_{\mathbf{P}^1}$ hat globale Dimension 1. Das heißt, daß (siehe [14]) die unzerlegbaren Objekte von $D^-(\text{Coh}_{\mathbf{P}^1})$ die folgende Gestalt haben

$$\mathcal{E}_n[r] : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n)}_r \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots,$$

und

$$\mathcal{T}_{kx}[s] : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-kx) \hookrightarrow \underbrace{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}}_s \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Der Komplex $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ ist eine direkte Summe

$$\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \cong \bigoplus \left((\mathcal{E}_n[r]^{N_{n,r}}) \oplus (\mathcal{T}_{kx}[s]^{M_{x,k,s}}) \right).$$

Jetzt klären wir, was der Komplex \mathcal{M}_\bullet ist und was die Abbildung i ist. Die Garbe \mathcal{A} ist eine Wolkenkratzergarbe \mathbf{k}_p (mit dem Keim \mathbf{k} im singulären Punkt p), $\tilde{\mathcal{A}} = (\mathbf{k} \times \mathbf{k})_p$. Dies bedeutet, daß $\text{Coh}_{\tilde{\mathcal{A}}}$ and $\text{Coh}_{\mathcal{A}}$ halbeinfach sind. Es gilt $\mathcal{M}_\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \cong (H_\bullet(\tilde{\mathcal{M}}_\bullet), 0)$, und wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{M}}_\bullet & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_\bullet(\tilde{\mathcal{M}}_\bullet) & \xrightarrow{H_\bullet(\tilde{i})} & H_\bullet(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet). \end{array}$$

Die Abbildung $H_k(\tilde{i}) : H_k(\tilde{\mathcal{M}}_\bullet) \longrightarrow H_k(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)$ ist einfach eine Abbildung zweier $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -Moduln. Dies impliziert, daß die Abbildung $H_k(\tilde{i})$ durch zwei Matrizen $H_k(i|0)$ und $H_k(i|\infty)$ gegeben ist (intuitiv: die erste Matrix entspricht dem Punkt 0 und die zweite dem Punkt ∞). Darüber hinaus haben beide Matrizen die gleiche Größe und sind nicht entartet.

Wir betrachten die Bilder der Komplexe $\mathcal{E}[n]$ und $\mathcal{T}_{kx}[n]$ nach dem Tensorieren mit $\otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}}$. Offensichtlich gilt

$$\tilde{\mathcal{O}}(n) \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} = \mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty.$$

Sei $x = 0 = (0 : 1)$. Dann gilt

$$\mathcal{T}_{kx} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} = (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-kx) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}) \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} = (\mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty).$$

Dieser Komplex ist quasiisomorph zum Komplex

$$\mathbf{k}_0 \xrightarrow{0} \mathbf{k}_0.$$

Sei $x = \infty = (1 : 0)$. Genauso bekommt man

$$\mathcal{T}_{kx} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} \cong \mathbf{k}_\infty \xrightarrow{0} \mathbf{k}_\infty.$$

Alle anderen Wolkenkratzergerben verschwinden nach Tensorieren mit $\otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}}$:

$$(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-kx) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}) \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} = (\mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty) \cong 0.$$

Wir betrachten jetzt die Morphismen in der abgeleiteten Kategorie $D^b(\text{Coh}_{\tilde{\mathcal{O}}}) = D^b(\text{Coh}_{\mathbf{P}^1})$.

1. Sei $n < m$. Dann ist jeder Morphismus $\tilde{\mathcal{O}}(n) \xrightarrow{p} \tilde{\mathcal{O}}(m)$ durch ein homogenes Polynom $p = p(x_0, x_1)$ vom Grad $m - n$ gegeben. Die induzierte Abbildung modulo Konduktor ist

$$\mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty \xrightarrow{\text{diag}(a,b)} \mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty,$$

wobei $a = p(0 : 1)$ und $b = p(1 : 0)$.

2. Sei $n < m$. Dann gibt es ein Morphismus $\mathcal{T}_{m0} \rightarrow \mathcal{T}_{n0}$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{O}}(-m) & \xrightarrow{x_0^m} & \tilde{\mathcal{O}} \\ x_0^{(m-n)p} \downarrow & & \downarrow p \\ \tilde{\mathcal{O}}(-n) & \xrightarrow{x_0^n} & \tilde{\mathcal{O}}, \end{array}$$

wobei p eine homogene Form vom Grad $m - n$ ist. Das induziert

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_0 & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_0 \\ \downarrow 0 & & \downarrow \lambda \\ \mathbf{k}_0 & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_0 \end{array}$$

wobei $\lambda = p(0 : 1)$ ist.

3. Sei $n < m$. Wir haben auch einen Morphismus $\mathcal{T}_{n0} \rightarrow \mathcal{T}_{m0}$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{O}}(-m) & \xrightarrow{x_0^m} & \tilde{\mathcal{O}} \\ p \uparrow & & \uparrow x_0^{(m-n)p} \\ \tilde{\mathcal{O}}(-m) & \xrightarrow{x_0^n} & \tilde{\mathcal{O}}(n-m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{\mathcal{O}}(-n) & \xrightarrow{x_0^n} & \tilde{\mathcal{O}}. \end{array}$$

Diese Abbildung ist die Verknüpfung eines Quasiisomorphismus mit einem Morphismus von Komplexen. Sie induziert

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_0 & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_0 \\ \lambda \uparrow & & \uparrow 0 \\ \mathbf{k}_0 & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_0, \end{array}$$

wobei $\lambda = p(0 : 1)$ ist.

4. Genauso betrachtet man alle andere Fälle. Für natürliche Zahlen $n_2 < n_1$ und $m_1 > m_2$ und ganze Zahlen $k_2 < k_1$ haben wir eine Kette von Morphismen, die nichttriviale Abbildungen modulo dem Konduktor induzieren:

$$\mathcal{T}_{n_1 0}[1] \rightarrow \mathcal{T}_{n_2 0}[1] \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}(k_2) \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}(k_1) \rightarrow \mathcal{T}_{m_1 0} \rightarrow \mathcal{T}_{m_2 0}$$

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathcal{O}}(k_2) & \xrightarrow{x_0^{n_2}} & \tilde{\mathcal{O}}(n_2 + k_2) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{\mathcal{O}}(k_2) & \xrightarrow{x_0^{n_1}} & \tilde{\mathcal{O}}(n_1 + k_2) \\
\downarrow & & \\
\tilde{\mathcal{O}}(k_2) & & \\
\downarrow & & \\
\tilde{\mathcal{O}}(k_1) & & \\
\downarrow & & \\
\tilde{\mathcal{O}}(-m_1) & \xrightarrow{x_0^{m_1}} & \tilde{\mathcal{O}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\tilde{\mathcal{O}}(-m_2) & \xrightarrow{x_0^{m_2}} & \tilde{\mathcal{O}}
\end{array}$$

5. Das selbe gilt auch für den Punkt $(1 : 0) = \infty$.
6. Wir betrachten den Fall der Endomorphismen unzerlegbarer Objekte der Kategorie $D^b(\text{Coh}_{\tilde{\mathcal{O}}})$. Ein Endomorphismus von $\tilde{\mathcal{O}}(n)$ ist Vielfaches der Identität und induziert damit

$$\mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty \xrightarrow{\text{diag}(a,a)} \mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty, \quad a \in \mathbf{k}.$$

Ein Endomorphismus von $(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-k_0) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1})$ induziert immer eine Abbildung der Gestalt:

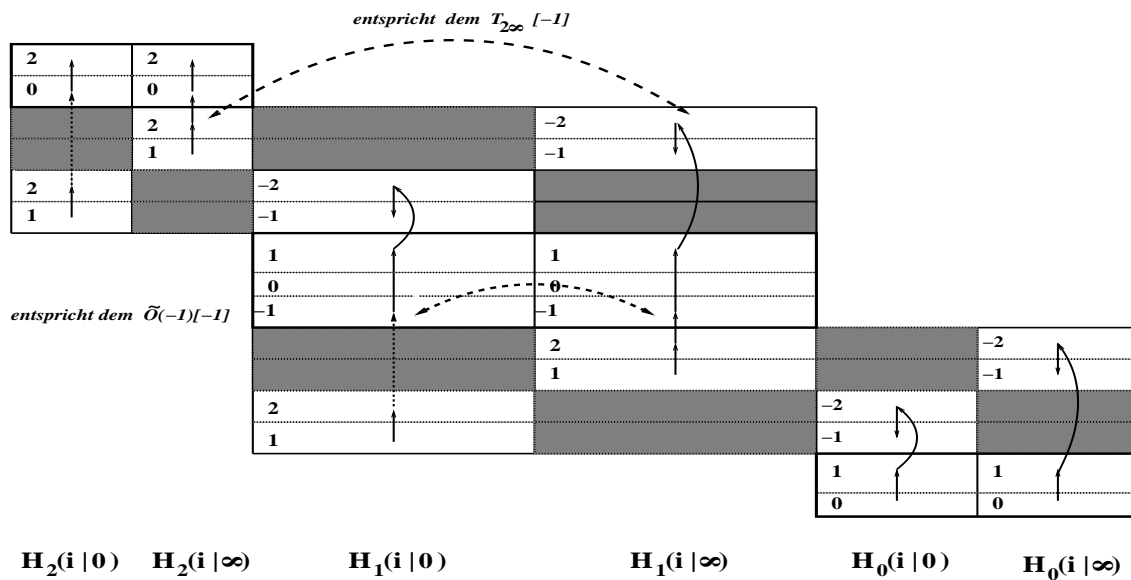
$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{k}_0 & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_0 \\
\downarrow \lambda & & \downarrow \lambda \\
\mathbf{k}_0 & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_0.
\end{array}$$

BEMERKUNG 5.1. Sei

$$\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \cong \bigoplus \left((\mathcal{E}_n[r]^{N_{n,r}}) \oplus (\mathcal{T}_{kx}[s]^{M_{x,k,s}}) \right)$$

eine Zerlegung von $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \in \text{Ob}(D^b(\text{Coh}_{\tilde{\mathcal{O}}}))$ in eine direkte Summe unzerlegbarer Objekte. Ein Endomorphismus $\Phi : \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ von $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn er Isomorphismen in allen Komponenten $\mathcal{E}_n[r]^{N_{n,r}}$ und $\mathcal{T}_{kx}[s]^{M_{x,k,s}}$ induziert (dies gilt in jeder Krull-Schmidtschen-Kategorie).

Man wählt Trivialisierungen jeder Komponente des Komplexes $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ in Umgebungen der Punkte 0 und ∞ . Das liefert eine Basis in $H_\bullet(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)$. Man wähle eine Basis für jede Homologie $H_k(\mathcal{M}_\bullet)$. Bezüglich dieser Wahl wird die Abbildung $H_\bullet(i)$ durch einen Satz von Matrizen



gegeben (“dunkle” Blöcke in den obigen Matrizen sind leer. Gewichte der Horizontalblöcke und erlaubte Zeilenumformungen werden im Bild gezeigt).

Es gibt zwei Typen von Blöcken: diejenigen, die von einem Vektorbündel stammen und diejenigen, die von einer Wolkenkratzergerabe $\mathcal{T}_{k0}[s]$ oder $\mathcal{T}_{k\infty}[s]$ stammen. Die Horizontalblöcke haben eine Markierung, die die Information über die Herkunft dieser Blöcke enthält. Blöcke, die aus demselben Vektorbündel oder derselben Wolkenkratzergerabe herkommen, heißen konjugiert. Konjugierte Blöcke haben dieselbe Anzahl von Zeilen. Darüber hinaus haben alle außer endlich vielen Blöcken der Matrizen $H_k(i|0)$ und $H_k(i|\infty)$ die Größe Null. Wenn ein Block nicht leer ist, ist auch sein konjugierter Block nicht leer.

Jetzt sollen wir die folgende Frage beantworten: wann definieren zwei Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, H_\bullet(i))$ isomorphe Komplexe \mathcal{F}_\bullet ? Dazu müssen wir Automorphismen von $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ und \mathcal{M}_\bullet betrachten und schauen, was diese in den Homologien induzieren. Als Ergebnis erhalten wir ein Matrixproblem:

1. Wir können beliebige simultane Spaltentransformationen der Matrizen $H_k(i|0)$ und $H_k(i|\infty)$ durchführen;
2. wir können beliebige Transformationen innerhalb von konjugierten Horizontalblöcken durchführen;
3. wir können ein Vielfaches einer Zeile mit kleinerem Gewicht zu einer Zeile mit größerem Gewicht hinzuaddieren. Diese Transformationen können in allen Matrizen $H_k(i|0)$ und $H_k(i|\infty)$ unabhängig voneinander durchgeführt werden.

Dieses Matrixproblem gehört zum Typ der sogenannten Gelfandschen Matrixprobleme. I.M.Gelfand hat auf dem Internationalen Mathematischen Kongreß in Nizza (1970) eine Vermutung über die Struktur von Harish-Chandra Moduln im singulären Punkt von $SL_2(\mathbb{R})$ formuliert [27]. Es wurde gezeigt (Nazarova-Roiter, Bondarenko), daß dieses Problem zu einem Matrixproblem von obigem Typ äquivalent ist. Die Tatsache ist die, daß man unzerlegbare Tripel in einer kanonischen Form (unabhängig von $\text{char}(\mathbf{k})$) schreiben kann.

Es gibt zwei Typen unzerlegbarer Objekte: Bänder und Saiten. Ein Band hängt von einem stetigen und vielen diskreten Parametern ab. Eine Saite hängt nur von diskreten Parametern ab.

BEISPIEL 5.2. Das folgende Datum $\mathcal{B}(w, 1, \lambda)$ (Band), wobei $w = 3_0x_0^2y_1^1 - 2_2x_1^3y_0^1$ ist, definiert ein Objekt der beschränkten abgeleiteten Kategorie $D^b(\text{Coh}_X)$, welches keine

kohärente Garbe ist. Das entsprechende Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ ist

$$\tilde{\mathcal{F}}_\bullet = \mathcal{E}_{-2}[-2] \oplus \mathcal{T}_{30}[-1] \oplus \mathcal{T}_{1\infty}[-1] \oplus \mathcal{T}_{20} \oplus \mathcal{T}_{1\infty} \oplus \mathcal{E}_3,$$

$$\mathcal{M}_\bullet = \mathbf{k}^2 \xrightarrow{0} \mathbf{k}^2 \xrightarrow{0} \mathbf{k}^2,$$

und \tilde{i} wird durch Matrizen

$E_{-2}[-2]$	1	1				
$T_{1\infty}[-1]$		1		1		
$T_{30}[-1]$	1		1			
$T_{1\infty}$			1		1	
T_{20}		1		1		
E_3				λ	1	

$(0:1)$
 $(1:0)$
 $(0:1)$
 $(1:0)$
 $(0:1)$
 $(1:0)$

2
1
0

gegeben.

BEISPIEL 5.3. Das folgende Datum $\mathcal{S}(w)$ (Saite), wobei $w = \dots y_3^1 x_2^1 y_1^1 x_0^n y_0^m x_1^1 y_2^1 x_3^1 \dots$ ist, definiert eine Wolkenkratzergarbe im singulären Punkt. Das entsprechende Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ ist:

$$\tilde{\mathcal{F}}_\bullet = \bigoplus_{i=1}^{\infty} (\mathcal{T}_{10}[-i] \oplus \mathcal{T}_{1\infty}[-i]) \oplus \mathcal{T}_{n0} \oplus \mathcal{T}_{m\infty},$$

$$\mathcal{M}_\bullet = \dots \mathbf{k}^2 \xrightarrow{0} \mathbf{k}^2 \xrightarrow{0} \mathbf{k},$$

und die Matrizen, die \tilde{i} festlegen, sind

$T_{1\infty}[-3]$		1		1					
$T_{10}[-3]$	1		1						
$T_{1\infty}[-2]$			1		1				
$T_{10}[-2]$	1			1					
$T_{1\infty}[-1]$				1	1		1	1	
$T_{10}[-1]$		1		1		1			
$T_{m\infty}$						1	1	1	
T_{n0}	1		1	1	1	1	1	1	

$(0:1)$
 $(1:0)$
 $(0:1)$
 $(1:0)$
 $(0:1)$
 $(1:0)$
 $(0:1)$
 $(1:0)$
 $(0:1)(1:0)$

4
3
2
1
0

BEISPIEL 5.4. Das folgende Datum $\mathcal{B}(w, 2, \lambda)$ (Band), wobei $w = -3_0 0_0 y_0^1 x_0^2 y_0^4 x_0^5 0_0$ ist, definiert eine gemischte Garbe (d.h. eine Garbe, die weder torsionsfrei noch nulldimensional ist):

$$\tilde{\mathcal{F}}_\bullet = \mathcal{T}_{20} \oplus \mathcal{T}_{50} \oplus \mathcal{T}_{1\infty} \oplus \mathcal{T}_{4\infty} \oplus \mathcal{E}_{-3} \oplus \mathcal{E}_0^2,$$

$$\mathcal{M}_\bullet = \mathbf{k}^2 \xrightarrow{0} \mathbf{k}^5$$

und \tilde{i} ist gegeben durch die Matrizen

$T_{4\infty}$		I_2			I_2	
$T_{1\infty}$		I_2			I_2	
T_{05}		I_2			I_2	
T_{02}	I_2			I_2		
E_0	I		I_2		I_2	
	2			I_2		I_2
E_{-3}		I_2				$I_2(\lambda)$

(0:1)
(1:0)
(0:1)
(1:0)

1
0

BEISPIEL 5.5. Das folgende Datum $\mathcal{S}(w)$ (Saite), wobei $w = \dots y_2^2 x_1^1 - 2_1 y_0^3 0_0 x_0^2 y_1^2 1_2 \dots$ ist, definiert ein Objekt der abgeleiteten Kategorie $D^-(\text{Coh}_X)$, das nicht zur beschränkten abgeleiteten Kategorie $D^b(\text{Coh}_X)$ gehört:

$$\tilde{\mathcal{F}}_\bullet = \dots \mathcal{E}_1[-2] \oplus \mathcal{T}_{10}[-1] \oplus \mathcal{T}_{2\infty}[-1] \oplus \mathcal{E}_{-2}[-1] \oplus \mathcal{T}_{20} \oplus \mathcal{T}_{3\infty} \oplus \mathcal{E}_0,$$

$$\mathcal{M}_\bullet = \dots \mathbf{k}^3 \xrightarrow{0} \mathbf{k}^3 \xrightarrow{0} \mathbf{k}^2,$$

Matrizen:

T						
$T_{2\infty}[-2]$			1			
$E_I[-2]$		1			1	
$T_{10}[-1]$	1			1		
$T_{2\infty}[-1]$			1			1
$E_{-2}[-1]$				1	1	
T_{20}				1		1
$T_{3\infty}$					1	1
E_0					1	1

(0:1)
(1:0)
(0:1)
(1:0)
(0:1)
(1:0)

2
1
0

Betrachten wir nun den allgemeinen Fall.

6. Reduktion der Klassifikation von Komplexen auf ein Matrixproblem

Betrachten wir nun die Matrixprobleme, welche den abgeleiteten Kategorien kohärenter Garben auf Ketten und Zykeln projektiver Geraden entsprechen. Die Reduktion auf das jeweilige Matrixproblem ist völlig analog zum Fall der rationalen Kurve mit gewöhnlichem Selbstschnitt und dem Fall der Vektorbündel.

Seien $\omega_{-1} < \omega_0 < \omega_1$ drei Kardinalzahlen (dies bedeutet, daß $n\omega_{-1} < m\omega_0 < k\omega_1$ für alle $n, m, k \in \mathbb{Z}$ ist).

Man betrachte die Paare (L, a) , wo L eine irreduzible Komponente von \tilde{X} ist und $a \in L$ ist Urbild eines singulären Punktes.

1. Jedem Komplex

$$\mathcal{T}_{na}[i] = \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{O}_L(-na) \xrightarrow{x^n} \underbrace{\mathcal{O}_L}_i \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

entsprechen zwei Symbole $E_{(L,a)}(i, -n\omega_{-1})$ und $E_{(L,a)}(i+1, n\omega_1)$.

2. Dem Komplex

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{\mathcal{O}_L(n)}_i \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

entsprechen die Symbole $E_{(L,a)}(i, n\omega_0)$ und $E_{(L,a')}(i, n\omega_0)$, wobei $a' \in L$ das andere Element im Urbild eines singulären Punktes ist.

Sei

$$\mathbf{E}_{(L,a)}(i) = \bigcup_{*} \{E_{(L,a)}(i, *)\},$$

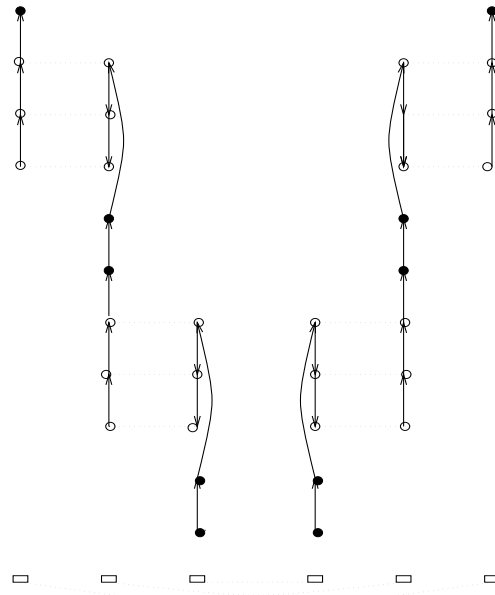
$$\mathbf{E} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}, (L,a)} \mathbf{E}_{(L,a)}(i).$$

Auf der $\mathbf{E}_{(L,a)}(i)$ hat man eine natürliche Ordnung: $E_1 < E_2$ falls ein Morphismus von Komplexen existiert, welcher in den entsprechenden Homologien eine Abbildung (ungleich Null) induziert. Die obigen Berechnungen wiederum zeigen, daß die Ordnung auf $\mathbf{E}_x(i)$ mit der durch Kardinalzahlen induzierten Ordnung übereinstimmt. Die Elemente der \mathbf{E} entsprechen den Zeilenblöcken des Matrixproblems. Wir führen auch die Symbole $F_{(L,a)}(i)$ ein, welche den Spalten der Matrizen des Matrixproblems entsprechen.

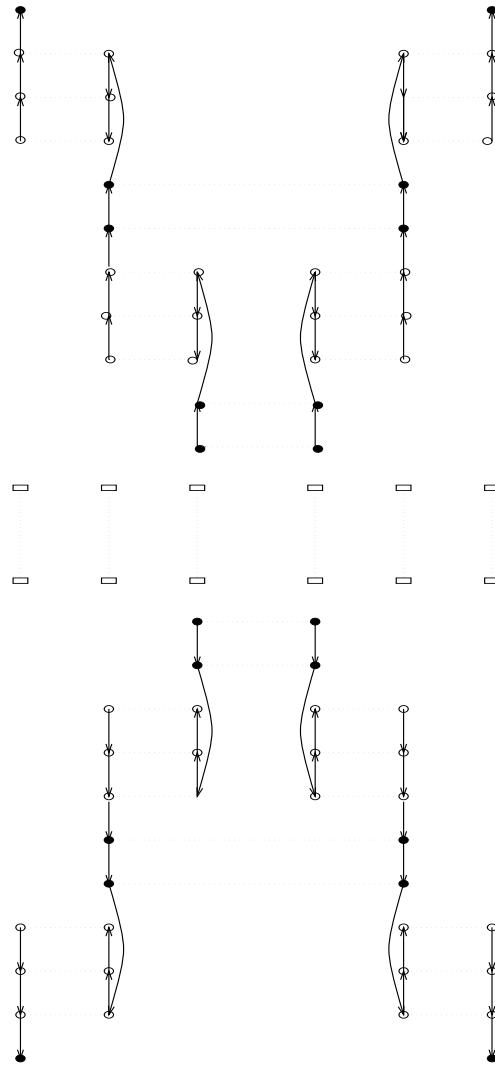
Darüber hinaus sind die folgenden Punkte äquivalent:

1. $E_{(L,a)}(i, -n\omega_{-1}) \sim E_{(L,a)}(i+1, n\omega_1)$, $i \in \mathbb{Z}$.
2. $E_{(L,a)}(i, m\omega_0) \sim E_{(L',a)}(i, m\omega_0)$, $i \in \mathbb{Z}$.
3. $F_{(L,a)}(i) \sim F_{(L,a')}(i)$, $i \in \mathbb{Z}$.

Das ist wiederum ein Gelfandsches Problem im Sinne von Bondarenko [5]. Die Anzahl der Matrizen ist jedoch unendlich (dies stört aber die allgemeine Theorie nicht).

1. Der transversale Schnitt zweier Geraden in einem Punkt (A_1 -Fall)

Die fetten Kreise entsprechen den Symbolen $E_{(L,a)}(i, n\omega_0)$, die leeren Kreise entsprechen den Symbolen $E_{(L,a)}(j, m\omega_1)$ und $E_{(L,a)}(j, m\omega_{-1})$. Rechtecke entsprechen den Symbolen $F_{(L,a)}(i)$, punktierte Linien zwischen den Kreisen und Rechtecke zeigen konjugierte Symbole, vertikale Pfeile zeigen die partielle Ordnung. $E_{(L,a)}(i, n\omega_1)$

2. Der transversale Schnitt zweier Geraden in zwei Punkten (\tilde{A}_1 -Fall)

Wir haben ein Matrixproblem des Typs “Darstellung von Kettenbündeln” erhalten [5] (siehe auch [19]). Die Anzahl der Matrizen kann ebenfalls unendlich sein, was die allgemeine Theorie wiederum nicht stört.

Das Matrixproblem ist nämlich das folgende:

1. Jedes Tripel (L, a, i) , (L ist eine Komponente von \tilde{X} , $a \in L$ und $i \geq 0$ eine ganze Zahl) entspricht einer Matrix $M(L, a, i)$. Diese Matrizen werden in horizontalen Blöcken verteilt, die mit den Punkten der Menge $E_{(L,a)}(i)$ markiert sind. Weil die Menge $F_{(L,a)}$ genau aus einem Element besteht, gibt es in diesem Fall keine Verteilung in vertikalen Blöcken. Gewisse Blöcke können Größe Null haben, d.h. leer sein.
2. Blöcke, die den konjugierten Punkten von \mathbf{E} entsprechen, haben die gleiche Anzahl an Zeilen; die Blöcke, die den konjugierten Punkten von \mathbf{F} entsprechen, haben die gleiche Anzahl an Spalten.
3. Wir haben eine partielle Ordnung auf der Menge aller Punkte. Wir sagen, daß horizontale Blöcke Gewichte haben und das Gewicht eines Blockes ist größer als das Gewicht eines anderen, wenn die entsprechenden Punkte aus der partiell geordneten Menge dieselbe Relation erfüllen.
4. Wir können folgende Umformungen der Matrizen durchführen:

- (a) Simultan: elementare Transformationen der Spalten der Matrizen $M(L, a, i)$ und $M(L', a, i)$.
- (b) Simultan: beliebige Elementartransformationen innerhalb konjugierter Blöcke.
- (c) Unabhängig: ein Vielfaches einer Zeile mit kleinerem Gewicht zu einer Zeile mit größerem Gewicht hinzuaddieren.

In unserem Fall gibt es zusätzliche Einschränkungen an unsere Matrizen:

1. Alle großen Matrizen sind quadratisch und nicht entartet.
2. Wenn einer der konjugierten Blöcke ungleich Null ist, dann ist der andere auch ungleich Null.

Es gibt zwei Typen unzerlegbarer Darstellungen: Bänder und Saiten.

1. Ein Band $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ wird durch zwei diskrete Parameter gegeben: durch ein Wort w und eine natürliche Zahl m , und durch einen stetigen Parameter $\lambda \in \mathbf{k}^*$. Ein Wort w ist eine Folge von Elementen aus $\mathbf{E} \cup \mathbf{F}$ der Gestalt $x_1 - x_2 \sim x_3 - x_4 \sim \cdots - x_N$, mit Verbindungen von zwei Typen “-” und “~”. Das Symbol “~” steht zwischen konjugierten Punkten, “-” nur zwischen einem Punkt vom Typ $E_{(L,a)}(*, i)$ und dem Punkt $F_{(L,a)}(i)$. Wenn eine Verbindung “-” war, dann ist die nächste “~” und umgekehrt. Im Banddatum soll das Wort w geschlossen sein: $x_N \sim x_1$. Dies bedeutet, daß es in der Form eines Zyklus geschrieben werden kann. Es gibt aber eine Bedingung an das Wort w : es soll keine Potenz eines anderen Wortes sein.
2. Eine Saite $\mathcal{S}(w)$ hängt nur von einem vollen Wort w ab. Voll heißt, daß w so viele Punkte x_i enthält, wie das konjugierte von x_i . Im Fall, wenn X ein Zykel projektiver Geraden ist, ist das Wort w unbedingt unendlich. Wir setzen aber voraus, daß jeder Punkt x_i nur endlich oft auftreten darf und es eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß w keine Elemente $F_{(L,a)}(i)$ für $i \geq k$ enthält (diese Bedingungen bedeuten, daß der Komplex von rechts beschränkt ist und nur aus kohärenten Garben besteht).

Jetzt beschreiben wir den Algorithmus, der einem Band- oder Saitendatum Matrizen in kanonischer Form zuordnet.

1. Betrachte ein Band $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$. Man zählt die Anzahl der Vorkommen jeder Äquivalenzklasse konjugierter Punkte. Angenommen, der Punkt x_i tritt k_i mal auf. Dann unterteilt man den Block mit der Markierung x_i in k_i Unterblöcke. Man erhält eine Partition der großen Matrix $M(L, a, i)$ in kleinere Blöcke. Betrachte jetzt Unterworte $x_i - x_{i+1}$. Nehmen wir an, daß wir das k -te Vorkommen der Klasse $[x_i]$ und l -te Vorkommen der Klasse $[x_{i+1}]$ haben. Dann gehört einer der Punkte x_i, x_{i+1} zu \mathbf{E} und der andere zu \mathbf{F} . Wenn $x_{i+1} \neq x_N$ ist, setze auf die Stelle mit Koordinaten (k, l) (bezüglich der Unterteilung der $x_i \times x_{i+1}$ Matrix) die Einheitsmatrix I_m (hier taucht unser zweiter diskreter Parameter auf) ein. Wenn $x_{i+1} = x_N$ ist, dann setze auf die entsprechende Stelle den Jordanblock $J_m(\lambda)$ ein. Alle anderen Einträge sind Null.
2. Im Falle einer Saite $\mathcal{S}(w)$ haben wir denselben Algorithmus. Der einzige Unterschied ist, daß man statt I_m oder $J_m(\lambda)$ einfach die 1×1 Matrix 1 einsetzt.

BEISPIEL 6.1. Sei $X = C_2$ ein Zykel zweier projektiver Geraden. Seien L_1 und L_2 seine irreduziblen Komponenten, a_1 und a_2 ihre singulären Punkte. Betrachte das folgende Band $B(w, 1, \lambda)$:

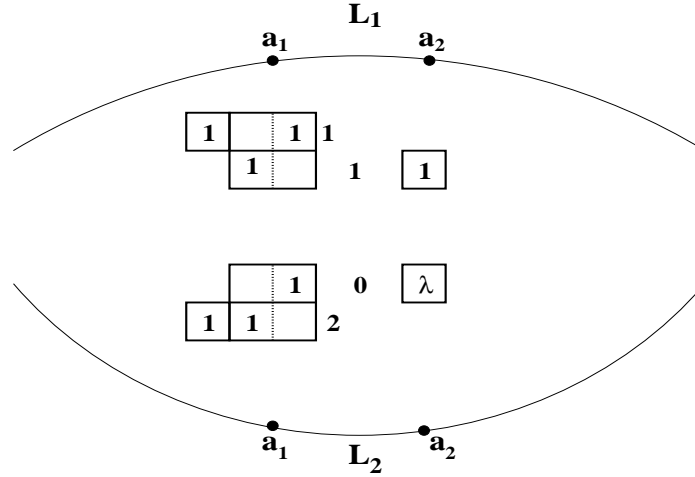
$$\begin{aligned}
w = & E_{(L_1, a_1)}(0, 1\omega_0) - F_{(L_1, a_1)}(0) \sim F_{(L_2, a_1)}(0) - E_{(L_2, a_1)}(0, -2\omega_1) \sim E_{(L_2, a_1)}(1, 2\omega_{-1}) \\
& - F_{(L_2, a_1)}(1) \sim F_{(L_1, a_1)}(1) - E_{(L_1, a_1)}(1, 1\omega_{-1}) \sim E_{(L_1, a_1)}(0, -1\omega_1) - F_{(L_1, a_1)}(0) \sim \\
& \sim F_{(L_2, a_1)}(0) - E_{(L_2, a_1)}(0, 0\omega_0) \sim E_{(L_2, a_2)}(0, 0\omega_0) - F_{(L_2, a_2)}(0) \sim F_{(L_1, a_2)}(0) - \\
& - E_{(L_1, a_2)}(0, 1\omega_0).
\end{aligned}$$

Das entsprechende Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ ist

$$\tilde{\mathcal{F}}_\bullet = \tilde{\mathcal{O}}_1(1) \oplus (\tilde{\mathcal{O}}_1(-1) \xrightarrow{x} \tilde{\mathcal{O}}_1) \oplus \tilde{\mathcal{O}}_2 \oplus (\tilde{\mathcal{O}}_2(-2) \xrightarrow{y^2} \tilde{\mathcal{O}}_2),$$

$$\mathcal{M}_\bullet = \mathbf{k}_a \xrightarrow{0} \mathbf{k}_a^2 \oplus \mathbf{k}_b,$$

und \tilde{i} wird durch die Matrizen



gegeben

Wir können das Wort w sparsamer kodieren. Zuerst bemerke man, daß der Ausdruck $E' - F_{(L',a)}(i) \sim F_{(L'',a)}(i) - E''$ einfach heißt, daß die lokalen Parameter von E' und E'' im Punkt a verklebt werden müssen. Hier gehört E' (E'') zur i -ten Komponente des Komplexes der $\tilde{\mathcal{O}}_{L'}$ -Moduln ($\tilde{\mathcal{O}}_{L''}$ -Moduln). Die Symbole $F_{(L,a)}$ können also weglassen werden. Wir stellen den Komplex $\tilde{\mathcal{O}}_L(i)[k]$ als i_k , $(\tilde{\mathcal{O}}_L(-j) \xrightarrow{x^j} \tilde{\mathcal{O}}_L)[k]$ als x_k^j und $(\tilde{\mathcal{O}}_L(-j) \xrightarrow{y^j} \tilde{\mathcal{O}}_L)[k]$ als y_k^j dar. Wir können das Symbol L auch weglassen. Das Wort w nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$w = 1_0 y_0^2 x_0^1 0_0.$$

Dies entspricht dem *Segment eines Zyklus* in der Notation vom Kapitel 4.2. Wir müssen nur präzisieren, daß 1_0 auf der ersten Komponente lebt. Dann können wir das Wort w eindeutig rekonstruieren. In dieser Form erhalten wir die Beschreibung unzerlegbarer Objekte aus Kapitel 4.2.

BEMERKUNG 6.2. Sei $X = C_n$, $n \geq 3$ ein Zykel von n projektiver Geraden, $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ ein Band, $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ das entsprechende Tripel. Es ist möglich, daß die verschiedenen Komponenten des Komplexes $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \in \text{Ob}(D^-(\text{Coh}_{\tilde{\mathcal{O}}})) = \text{Ob}(D^-(\prod_i \text{Coh}_{\tilde{\mathcal{O}}_i}))$ verschiedene Ränge haben. Um einen Komplex lokal freier \mathcal{O} -Moduln zu erhalten, müssen wir noch ein paar triviale Komplexe $\tilde{\mathcal{O}}_i \xrightarrow{\text{id}} \tilde{\mathcal{O}}_i$ zu $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ addieren und alles nach der ‘‘Parallellogrammregel’’ verkleben. Dasselbe betrifft auch Saiten.

BEISPIEL 6.3. Sei $X = C_3$ ein Zykel projektiver Geraden, $\mathcal{F}_\bullet = \mathcal{B}(w, 1, \lambda)$, wobei $w = x_0^2 y_0^1$ und $j(x_0^2) = 1$ eine Wolkenkratzergarbe in einem singulären Punkt ist. Dann ist die Normalisierung vom \mathcal{F}_\bullet

$$((\tilde{\mathcal{O}}_1(-2) \xrightarrow{x^2} \tilde{\mathcal{O}}_1) \oplus (\tilde{\mathcal{O}}_2(-1) \xrightarrow{y} \tilde{\mathcal{O}}_2))$$

Wir addieren triviale Komplexe $(\tilde{\mathcal{O}}_3 \xrightarrow{\text{id}} \tilde{\mathcal{O}}_3)$ dazu und verkleben alles laut der ‘‘Parallellogrammregel’’. Somit erhalten wir eine Aufl6sung

$$\mathcal{B}((0, 0, 0), 1, 1) \longrightarrow \mathcal{B}((1, 2, 0), 1, \lambda).$$

BEMERKUNG 6.4. Sei X eine Kette projektiver Geraden. Der einzige Unterschied zum Fall des Zyklus von projektiven Geraden ist, da13 wir auch endliche Saiten haben k6nnen (z.B. Vektorb6ndel sind endliche Saiten). Die Kombinatorik der unzerlegbaren Objekte ist dieselbe wie im Fall eines Zyklus.

THEOREM 6.5. (Siehe [5].)

1. Alle Objekte $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$, $\mathcal{S}(w)$ sind unzerlegbar. Jede unzerlegbare Darstellung ist zu einem Band $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ oder einer Saite $\mathcal{S}(w)$ isomorph.
2. Die einzigen Isomorphismen zwischen diesen Objekten sind
 - (a) $\mathcal{S}(w) \cong \mathcal{S}(w^\circ)$, wobei w° das inverse Wort ist.
 - (b) $\mathcal{B}(w, m, \lambda) = \mathcal{B}(w', m, \lambda')$. Dabei ist $w = a_0 - a_1 \sim a_2 \cdots - a_m$, $w' = a_{2k} - a_{2k+2} \sim a_{2k+3} \cdots - a_{2k-1}$ ein zyklischer Shift von w , $\lambda' = \lambda$ f6r k gerade und $\lambda' = \lambda^{-1}$ f6r k ungerade.
 - (c) $\mathcal{B}(w^\circ, m, \lambda) = \mathcal{B}(w, m, \lambda^{-1})$, wobei w° das inverse Wort ist.

Das Hauptergebnis dieser Dissertation k6nnen wir folgenderma13en formulieren:

THEOREM 6.6. Sei X ein Zykel projektiver Geraden. Dann gibt es 3 Typen unzerlegbarer Objekte in $D^-(\text{Coh}_X)$:

- Shifts von Wolkenkratzergeraden $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n$, wobei x ein regul6rer Punkt der Kurve X ist,
- B6nder $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$, wobei w ein geschlossenes nicht periodisches Wort, m eine nat6rliche Zahl und $\lambda \in \mathbf{k}^*$ ist,
- Saiten $\mathcal{S}(w)$, wobei w ein volles Wort ist, das die obigen Eigenschaften erf6llt.

BEWEIS. Dieser Satz folgt aus dem Theorem 3.3 und dem Theorem 6.5. Wir haben zuerst die Klassifikation unzerlegbarer Komplexe von $D^-(\text{Coh}_X)$ auf ein Matrixproblem reduziert. Dann haben wir festgestellt, da13 dieses Matrixproblem zahm ist. \square

Wir wollen einige Vorteile dieser Darstellung der Objekte der Kategorie $D^-(\text{Coh}_X)$ illustrieren. Es seien \mathcal{F}_\bullet und \mathcal{G}_\bullet zwei Komplexe, die durch die Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ und $(\tilde{\mathcal{G}}_\bullet, \mathcal{N}_\bullet, \tilde{j})$ gegeben sind. Welches Tripel entspricht dem Tensorprodukt der Komplexe $\mathcal{F}_\bullet \otimes_L \mathcal{G}_\bullet$? Man sieht leicht, da13 es einfach $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes \tilde{\mathcal{G}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet \otimes \mathcal{N}_\bullet, \tilde{i} \otimes \tilde{j})$ ist.

Da die homologische Dimension gleich Null ist, gibt es nach der K6nnetschen Formel einen funktoriellen Isomorphismus

$$\bigoplus_{k+l=n} (H_k(\mathcal{M}_\bullet) \otimes H_l(\mathcal{N}_\bullet)) \xrightarrow{\oplus (H_k(i) \otimes H_l(j))} H_n(\mathcal{M}_\bullet \otimes \mathcal{N}_\bullet).$$

Damit k6nnen wir die Matrizen des entsprechenden Tripels leicht ausrechnen.

Also, wir haben eine *komplette* Antwort auf die Trichothomiefrage: auf welchen Kurven ist die abgeleitete Kategorie koh6renter Garben zahm.

THEOREM 6.7. Sei die Kategorie $D^-(\text{Coh}_X)$ zahm. Dann ist die Kurve X entweder eine elliptische Kurve oder eine rationale Kurve aus der Liste von Drozd-Greuel.

1. F6r eine ellpische Kurve X folgt die Beschreibung unzerlegbarer Objekte von $D^-(\text{Coh}_X)$ aus der Arbeit von Atiyah [1].
2. Sei X eine Konfiguration projektiver Geraden vom Typ A_n . Es gibt drei Typen unzerlegbarer Objekte: Shifts von Wolkenkratzergeraden in einem regularen Punkt, B6nder und Saiten.

- (a) Band $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$, hängt von
- (i) einem geschlossenen Wort w über $\mathbf{E} \cup \mathbf{F}$, welches kein Potenz eines anderen Wortes ist;
 - (ii) einem natürlichen Zahl $m \in \mathbb{N}$;
 - (iii) einem stetigen Parameter $\lambda \in \mathbf{k}^*$.
- (das Wort w enthält die ganze Information über \mathcal{M}_\bullet und diejenigen direkten Summanden von \tilde{F}_\bullet , welche ungleich Null modulo Konduktor sind). Es gibt keine anderen Bedingungen auf das Wort w). Insbesondere gilt: der Träger eines Bandes ist ein singulärer Punkt der Kurve X (der Träger eines Komplexes ist die Vereinigung der Träger seiner Homologien).
- (b) Eine Saite \mathcal{S} hängt nur von einem vollen Wort w ab (dies kann sowohl endlich als auch unendlich sein). Die folgenden Bedingungen müssen zusätzlich erfüllt sein:
- (i) Für jede natürliche Zahl k und jedes Paar (L, a) treten die Elemente von $\mathbf{E}_{(L,a)}(k)$, $\mathbf{E}_{(L,a')}(k)$, $\mathbf{F}_{(L,a)}(k)$ und $\mathbf{F}_{(L,a')}(k)$ im Wort w gleich oft auf.
 - (ii) Die Unterworte von Typ $E_{(L,a)}(k, -n\omega_{-1}) - F_{(L,a)}(k)$, $F_{(L,a)}(k) - E_{(L,a)}(k, -n\omega_{-1})$ von einer Seite und $E_{(L,a)}(k+1, n\omega_1) - F_{(L,a)}(k+1)$, $F_{(L,a)}(k+1) - E_{(L,a)}(k+1, n\omega_1)$ von anderen treten gleich oft auf. Das sind die Bedingungen von Invertierbarkeit der Matrizen $i_{(L,a)}$.
3. Sei X eine Konfiguration projektiver Geraden vom Typ \tilde{A}_n . Es gibt wiederum drei Typen unzerlegbarer Objekte von $D^-(\text{Coh}_X)$: Schiffs von Wolkenkratzergerben in einem singulären Punkt, Bänder $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ und Saiten $\mathcal{S}(w)$. Die Unterschiede zum Fall von A_n -Konfigurationen sind
- (a) Der Träger eines Bandes kann sowohl nulldimensional als auch die ganze Kurve sein.
 - (b) Der Parameter w von $\mathcal{S}(w)$ muß unendlich sein.

Bisher haben wir unzerlegbare Objekte abgeleiteter Kategorie betrachtet. Im nächsten Kapitel wenden wir uns den kohärenten Garben zu.

7. Beschreibung kohärenter Garben, torsionsfreier Garben und Vektorbündel

Im letzten Kapitel haben wir ein Matrixproblem erhalten, das die abgeleitete Kategorie der kohärenten Garben $D^-(\text{Coh}_X)$ beschreibt. Die nächste Frage ist: welche Matrizen entsprechen den kohärenten Garben? Es ist klar, daß der Komplex \mathcal{F}_\bullet genau dann zu einer kohärenten Garbe isomorph ist, wenn $H_0(\mathcal{F}_\bullet) \neq 0$ und $H_k(\mathcal{F}_\bullet) = 0$ für $k \neq 0$. Bezüglich unserer Beschreibung ist ein Objekt der Kategorie $D^-(\text{Coh}_X)$ als Datenstruktur ein Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i} : \mathcal{M}_\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}})$. Wir werden uns nun ebenfalls mit der Frage beschäftigen, wie man die Homologie von \mathcal{F}_\bullet anhand dieser Darstellung algorithmisch ausrechnen kann.

Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet[-1] \\ \text{id} \uparrow & & \Phi \uparrow & & i \uparrow & & \text{id} \uparrow \\ \mathcal{J}\mathcal{F}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{F}_\bullet & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{M}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{J}\mathcal{F}_\bullet[-1]. \end{array}$$

Alle Morphismen im ersten Dreieck sind bekannt. Uns interessiert die Homologie des Komplexes \mathcal{F}_\bullet . Nach Anwenden des Homologiefunktors erhält man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \longleftarrow & H_0(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet) & \longleftarrow & H_0(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet) & \longleftarrow & H_0(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet) & \longleftarrow & H_1(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet) & \longleftarrow & \dots \\ & & H_0(i) \uparrow & & \uparrow & & \text{id} \uparrow & & H_1(i) \uparrow & & \\ 0 & \longleftarrow & H_0(\mathcal{M}_\bullet) & \longleftarrow & H_0(\mathcal{F}_\bullet) & \longleftarrow & H_0(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet) & \longleftarrow & H_1(\mathcal{M}_\bullet) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Man betrachte nun die allgemeinere Situation:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & \longleftarrow & A_0 & \longleftarrow & B_0 & \longleftarrow & C_0 & \longleftarrow & A_1 & \longleftarrow & B_1 & \longleftarrow & C_1 & \longleftarrow & A_2 & \longleftarrow & B_2 & \longleftarrow & C_2 & \longleftarrow & \dots \\ & & \downarrow i_0 & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \downarrow i_1 & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & \downarrow i_2 & & \downarrow & & \downarrow \text{id} & & & & \\ 0 & \longleftarrow & \tilde{A}_0 & \longleftarrow & \tilde{B}_0 & \longleftarrow & C_0 & \longleftarrow & \tilde{A}_1 & \longleftarrow & \tilde{B}_1 & \longleftarrow & C_1 & \longleftarrow & \tilde{A}_2 & \longleftarrow & \tilde{B}_2 & \longleftarrow & C_2 & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Jetzt muß man die Bedingungen $B_i = 0$ für $i \geq 1$ mit Hilfe bekannter Abbildungen ausdrücken.

1. $B_1 = 0$ ist äquivalent zu: $A_1 \rightarrow C_0$ injektiv und $A_2 \rightarrow C_1$ surjektiv. Ersteres ist äquivalent zu: $A_1 \xrightarrow{i_1} \tilde{A}_1 \rightarrow C_0$ ist injektiv.
2. $B_{i+1} = 0, i \geq 1$ ist äquivalent zu: $A_{i+1} \rightarrow C_i$ ist ein Isomorphismus.

Insgesamt erhält man, daß $A_1 \rightarrow \tilde{A}_1 \xrightarrow{i_1} C_0$ injektiv und $A_{i+1} \rightarrow \tilde{A}_i \xrightarrow{i_i} C_i$ ein Isomorphismus ist. In der Sprache der Komplexe bedeutet dies, daß das Tripel $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ eine kohärente Garbe repräsentiert, falls

- 1.

$$H_1(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{H_1(i)} H_1(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow H_0(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)$$

ein Monomorphismus ist, und

- 2.

$$H_{k+1}(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{H_1(i)} H_{k+1}(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\mathcal{A}} \tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow H_k(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet), (k \geq 1)$$

ein Isomorphismus ist.

Jetzt sollten wir diese Bedingungen kombinatorisch interpretieren. Sei \mathcal{F}_\bullet eine kohärente Garbe, $(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ das entsprechende Tripel.

1. Sei $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \cong \bigoplus (\mathcal{E}_{n_s}[i]^{m_{n_s i}} \oplus \mathcal{T}_{n_s}[j]^{m_{n_s j}})$ die Zerlegung von $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ in eine direkte Summe unzerlegbarer Objekte. Die Träger von \mathcal{F}_\bullet und $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ können sich nur in singulären

Punkten unterscheiden (unter dem Träger versteht man die Punkte der Kurve, in denen die Homologie ungleich Null ist). Dies liefert, daß $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ keine $\mathcal{E}_{n_s}[i]$ mit $i \geq 1$ enthält.

2. Jetzt muß man die Abbildung

$$H_{k+1}(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_A \tilde{\mathcal{A}}) \longrightarrow H_k(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)$$

beschreiben. Sei x ein singulärer Punkt der Kurve X . Uns interessiert die Abbildung

$$H_{k+1}((\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_A \tilde{\mathcal{A}})_x) \longrightarrow H_k((\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)_x).$$

Sei $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet$ unzerlegbar. Falls $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet = \tilde{\mathcal{O}}[0]$ gilt, ist die Abbildung

$$H_1(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet) \longrightarrow H_0(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)$$

eine Nullabbildung. Sei $\tilde{\mathcal{F}}_\bullet = (\tilde{\mathcal{O}}_s(-mx) \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_s)[0]$ unzerlegbar. Dann ist $H^0(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)$ entweder 0, falls $x \neq 0_s, \infty_s$, oder \mathbf{k} sonst. Zum Beispiel,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}(-n-2) & \xrightarrow{x_0^n} & \tilde{\mathcal{O}}(-2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}(-n) & \xrightarrow{x_0^n} & \tilde{\mathcal{O}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty & \longrightarrow & \mathbf{k}_0 \oplus \mathbf{k}_\infty & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

In diesem Fall ist die Abbildung $H_1(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet) \longrightarrow H_0(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)$ eine Einbettung $\mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k}^n$ ($1 \mapsto (1, 0, \dots, 0)$).

3. Darüber hinaus haben wir schon die erste Folgerung: sei w ein Wort (abgeschlossen oder voll), welches nur auf den ersten zwei Achsen konzentriert ist (mit anderen Worten, es enthält nur $F_{L,a}(0)$ und $F_{L,a}(1)$). Dann entsprechen $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ und $\mathcal{S}(w)$ kohärenten Garben, denn die Abbildung $H_1(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_A \tilde{\mathcal{A}}) \longrightarrow H_0(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)$ ist ein Monomorphismus und ebenso $H_1(i)$.

4. Jetzt nehmen wir an, daß das Wort w auch Punkte der höheren Achsen enthält ($F_{L,a}(i), i \geq 2$). Wir zeigen zuerst, daß das Wort w unendlich sein muß.

(a) Wir bemerken, daß die Abbildung $H_{k+1}(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_A \tilde{\mathcal{A}}) \longrightarrow H_k(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet), k \geq 2$ surjektiv sein muß. Aufgrund dieser Bedingung treten die Objekte $(\tilde{\mathcal{O}}_s(-n) \xrightarrow{x_0^n} \tilde{\mathcal{O}}_s[i])$ und $(\tilde{\mathcal{O}}_s(-n) \xrightarrow{x_1^n} \tilde{\mathcal{O}}_s[i])$ mit $n \geq 2$ für $i \geq 1$ nicht auf.

(b) Das Wort w kann kein Unterwort vom Typ $E_{L,a}(k+1, \omega_1) - F_{L,a}(k+1) \sim F_{L',a}(k+1) - E_{L',a}(k+1, \omega_1)$ mit $k \geq 1$ enthalten. Ansonsten haben wir die folgende Situation: Man sieht, daß die Matrix der Verknüpfung

$$H_{k+1}(\mathcal{M}_\bullet) \xrightarrow{H_{k+1}^{(i)}} H_{k+1}(\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_A \tilde{\mathcal{A}}) \longrightarrow H_k(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)$$

zwei gleiche Zeilen enthält und deswegen kein Isomorphismus ist. Wir können daraus schließen, daß unser Wort w unendlich ist.

(c) Es gilt $H_k(\mathcal{M}_\bullet) = \mathcal{T}or_k^{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ ist. Sei x singulär. Im Fall einer Kurve mit nodalen Singularitäten ist $\mathcal{J}_x = \mathfrak{m}_{X,x}$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_{X,x}$. Sei (A, \mathfrak{m}) ein lokaler Noetherscher Ring, M ein endlich-erzeugter A -Modul, F_\bullet eine minimale freie Auflösung von M . Man wende den Funktor $\otimes_A A/\mathfrak{m}$ auf den Komplex F_\bullet an. Man erhält dann einen Komplex mit 0-Differenzialen, und zwar ist $\text{gl.dim}(M) = \max\{i | \text{Tor}_i(M, A/\mathfrak{m}) \neq 0\}$. Wir sehen, daß die homologische Dimension einer kohärenten Garbe \mathcal{F} entweder 0 oder 1, oder ∞ ist. Das stimmt mit der Auslander-Buchsbaum-Formel überein.

- (d) $\mathcal{T}or_1^{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{A}) = 0$ liefert, daß \mathcal{F}_x lokal frei ist. Die Vektorbündel erhält man, wenn das Wort w nur Punkte der 0-Achsen enthält. Der Funktor $T_X \rightarrow TK_X$ ist voll und treu. Der Funktor $VB_X \rightarrow D^-(Coh_X)$ ist auch voll und treu und das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} VB_X & \longrightarrow & T_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^-(Coh_X) & \longrightarrow & TK_X. \end{array}$$

Der Funktor $VB_X \rightarrow T_X$ ist eine Äquivalenz von Kategorien. $D^-(Coh_X) \rightarrow TK_X$ ist jedoch keine Äquivalenz.

5. Wir haben einige Einschränkungen für das Wort w erhalten. Nämlich,
- das Wort w enthält keine $E_{L,a}(k, n\omega_0)$ für $k \geq 1$,
 - das Wort w enthält keine $E_{L,a}(k, n\omega_{-1}), E_{L,a}(k+1, -m\omega_1)$ ($n, m \geq 2, k \geq 1$),
 - das Wort w enthält keine Unterworte vom Typ $E_{L,a}(k+1, \omega_1) - F_{L,a}(k+1) \sim F_{L',a}(k+1) - E_{L',a}(k+1, \omega_1)$ für $k \geq 1$.
 - sei w ein volles Wort. Die Matrizen von $\mathcal{S}(w)$ müssen quadratisch und invertierbar sein (für Bänder $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ ist dies automatisch erfüllt).

Jetzt müssen wir prüfen, daß alle anderen Bänder und Saiten, die diese Einschränkungen erfüllen, kohärente Garben definieren. Für endliche Worte w ist dies klar (siehe oben).

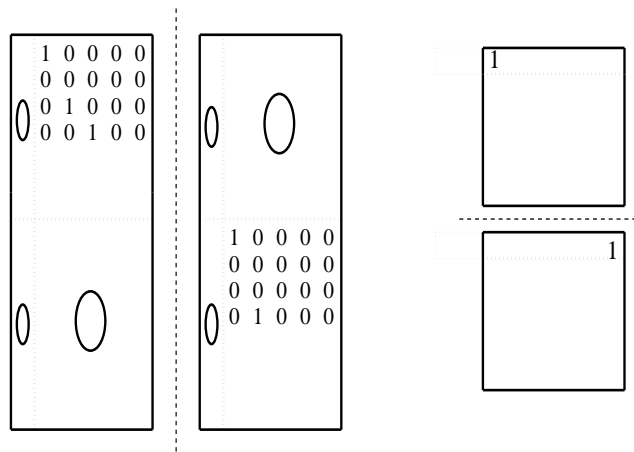
- (a) $H_{k+1}(\mathcal{M}_{\bullet}) \xrightarrow{H_{k+1}^{(i)}} H_{k+1}(\tilde{\mathcal{F}}_{\bullet}/\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_{\bullet}) \rightarrow H_k(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_{\bullet})$ ist ein Isomorphismus für $k \geq 1$. Es gibt zwei Möglichkeiten:
- die erste Möglichkeit ist

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} & \\ \hline & & \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

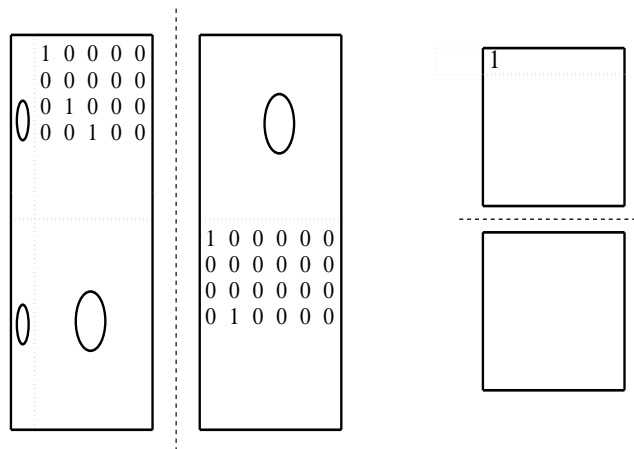
- Die zweite Möglichkeit ist

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} & & \\ \hline & & \\ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

- (b) $H_1(\mathcal{M}_{\bullet}) \xrightarrow{H_1^{(i)}} H_1(\tilde{\mathcal{F}}_{\bullet} \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow H_0(\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_{\bullet})$ ist ein Monomorphismus. Es gibt wiederum zwei Möglichkeiten:



- (i) Erklärung zum Bild: die Abbildung $H_1((\tilde{\mathcal{F}}_\bullet \otimes_{\tilde{\mathcal{O}}} \tilde{\mathcal{A}})_x) \rightarrow H_0((\mathcal{J}\tilde{\mathcal{F}}_\bullet)_x)$ hat zwei Komponenten, eine für 0 und eine für ∞ . Jede dieser Komponenten wird noch in zwei Blöcke unterteilt (der erste hat nur 1 Spalte). Die Zeilen des zweiten Blocks sind entweder Nullvektoren oder Vektoren vom Typ $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Der zweite Block hat vollen Spaltenrang. Dies liefert, daß die Zeilen der Verknüpfungsabbildungsmatrix, welche uns interessiert, aus den Spalten der Matrix $H_1(i_x)$ besteht (möglicherweise mit einigen gemeinsamen 0-Koordinaten). Es ist dann klar, daß es keine Nullspalten gibt und der Spaltenrang maximal ist. Darüber hinaus ist die Abbildung injektiv.
- (ii) Die zweite Möglichkeit ist völlig analog.



Wir möchten nun noch die torsionsfreien Garben beschreiben. Die Vektorbündel haben wir schon erkannt. Die torsionsfreien Garben (= Cohen-Macaulay Moduln), die keine Vektorbündel sind, haben unendliche homologische Dimension. Daher müssen wir sie unter den Saiten suchen. Dazu benutzen wir einen Trick. Sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X . Die ist torsionsfrei genau dann, wenn $\forall x \in X \mathcal{F}_x$ ein torsionsfreier \mathcal{O}_x -Modul ist. In einem regulären Punkt ist diese Bedingung trivial zu prüfen. In einem singulären Punkt ist dies äquivalent zur Torsionsfreiheit von $\hat{\mathcal{F}}_x$ über $\hat{\mathcal{O}}_x$. Aber $\hat{\mathcal{O}}_x = \mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$. Die unzerlegbaren torsionsfreien $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Moduln sind jedoch bekannt: $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$, $\mathbf{k}[[x]]$ und $\mathbf{k}[[y]]$. Lokalisierung und Komplettierung sind exakte Funktoren. Wir erhalten deshalb einen Funktor $D^-(\text{Coh}_X) \rightarrow D^-(\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)\text{-mod})$. In der Sprache der Matrizen läßt sich dieser Funktor ganz einfach interpretieren. Sei \mathcal{T} die Kategorie der Tripel der

$D^-(\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)\text{-mod})$. Dann sind die Verknüpfungen der Funktoren aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D^-(\text{Coh}_X) & \longrightarrow & D^-(\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}\text{-mod}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{TK}_X & \longrightarrow & T \end{array}$$

äquivalent. Bemerken wir jetzt, daß im Fall der 1-dimensionalen Ringe $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}} = \overline{\mathcal{O}_{X,x}}$ ist. Weiterhin ändert die Kompletterung die endlich-dimensionalen Moduln nicht. Dann sieht der Funktor $\text{TK}_X \rightarrow T$ auf den Objekten folgendermaßen aus.

Sei x der Schnitt von L und L' . Man betrachte die Matrizen, welche (L, x) und (L', x) entsprechen. Sie entsprechen auch dem $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Modul $\hat{\mathcal{F}}_x$ (dieselben ‘‘Wolkenkratzerblöcke’’; die ‘‘Vektorbündelblöcke’’ werden vereinigt und sind nicht mehr konjugiert).

Die Auflöserung von $\mathbf{k}[[x]]$ ist

$$\dots \rightarrow \mathbf{k}[[x, y]]/(xy) \xrightarrow{x} \mathbf{k}[[x, y]]/(xy) \xrightarrow{y} \mathbf{k}[[x, y]]/(xy) \rightarrow \mathbf{k}[[x]] \rightarrow 0.$$

Die Normalisierung ist

$$\dots \rightarrow \mathbf{k}[[x]] \times \mathbf{k}[[y]] \xrightarrow{[x,0]} \mathbf{k}[[x]] \times \mathbf{k}[[y]] \xrightarrow{[0,y]} \mathbf{k}[[x]] \times \mathbf{k}[[y]] \rightarrow \mathbf{k}[[x]] \rightarrow 0.$$

Dieser Komplex ist zu $\mathbf{k}[[x]] \bigoplus_{i=0}^{\infty} ((\mathbf{k}[[y]] \xrightarrow{y} \mathbf{k}[[y]])[-i] \oplus (\mathbf{k}[[x]] \xrightarrow{x} \mathbf{k}[[x]])[-i-1])$ isomorph. Die Matrizen haben wir bereits gesehen.

Dieselbe Antwort gilt natürlich auch für $\mathbf{k}[[y]]$. Darüber hinaus erhalten wir die Beschreibung torsionsfreier Garben (im Fall der zahmen Kurven von arithmetischem Geschlecht 1):

1. Die Vektorbündel $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$.
2. Die torsionsfreien Garben, die keine Vektorbündel sind: die Saiten $\mathcal{S}(w)$, wobei w keine $E_{L,a}(i, n\omega_{-1})$, $E_{L,a}(i, -m\omega_1)$ ($i \geq 2, m, n \geq 2$) enthält. Darüber hinaus ist jedes $E_{L,a}(i, \omega_{-1})$, $E_{L,a}(i, -\omega_1)$ höchstens einmal im Wort w enthalten.

Zum Beweis: sei w ein unendliches Wort, welches die obigen Bedingungen erfüllt. Man zeige, daß das entsprechende $\mathcal{S}(w)$ eine torsionsfreie Garbe definiert. Man betrachte die Matrizen H_{i_x} , x ist singulär. Vereinigen wir jetzt die ‘‘Vektorbündelblöcke’’. Wir erlauben beliebige (und unabhängige) Zeilentransformationen mit ihnen. Wir sehen, daß wir dann eine Zerlegung der Moduln erhalten, die $\mathbf{k}[[x]]$, $\mathbf{k}[[y]]$ und $\mathbf{k}[[x, y]]/(x, y)$ entsprechen.

Also haben wir eine *komplette* Klassifikation kohärenter Garben erhalten. Ferner können wir anhand unserer Beschreibung sagen, welche Vektorbündel, torsionsfreien Garben, gemischten Garben und Wolkenkratzergarben sind.

THEOREM 7.1. *(Zusammenfassung) Sei X eine zahme rationale Kurve von arithmetischem Geschlecht 1.*

1. $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ definiert genau dann eine kohärente Garbe, wenn gilt
 - (a) in w treten nur die Symbole aus $\mathbf{E}(i)$ und $\mathbf{F}(i)$, ($i = 0, 1$) auf, und
 - (b) w enthält keine Symbole vom Typ $E_{(L,a)}(1, n\omega_0)$.
2. Darüber hinaus ist $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ ein Vektorbündel genau dann, wenn w nur Elemente von $\mathbf{E}(0)$ und $\mathbf{F}(0)$ enthält.
3. Eine kohärente Garbe $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ ist eine Wolkenkratzergarbe, wenn w keine Symbole vom Typ $E_{(L,a)}(0, n\omega_0)$ enthält.
4. Sonst definiert $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ eine gemischte Garbe.
5. Eine Saite $\mathcal{S}(w)$ definiert eine kohärente Garbe, falls gilt
 - (a) das Wort w enthält keine Symbole vom Typ $E_{L,a}(k, n\omega_0)$, $k \geq 1$,

- (b) das Wort w enthält keine Symbole vom Typ $E_{L,a}(k, n\omega_{-1}), E_{L,a}(k+1, -m\omega_1)$ ($n, m \geq 2, k \geq 1$),
- (c) das Wort w enthält keine Unterworte vom Typ $E_{L,a}(k+1, \omega_1) - F_{L,a}(k+1) \sim F_{L',a}(k+1) - E_{L',a}(k+1, \omega_1), k \geq 1$.
6. Eine kohärente Garbe $\mathcal{S}(w)$ ist torsionsfrei, wenn zusätzlich w keine Symbole vom Typ $E_{L,a}(i, n\omega_{-1}), E_{L,a}(i, -m\omega_1)$ ($i \geq 2, m, n \geq 2$) enthält. Darüber hinaus ist jedes $E_{L,a}(i, \omega_{-1}), E_{L,a}(i, -\omega_1)$ höchstens einmal im Wort w enthalten. In diesem Fall ist $\mathcal{S}(w)$ torsionsfrei, aber nicht lokal frei.
7. Eine kohärente Garbe $\mathcal{S}(w)$ ist eine Wolkenkratzergarbe, wenn zusätzlich w keine Symbole vom Typ $E_{(L,a)}(0, n\omega_0)$ enthält.

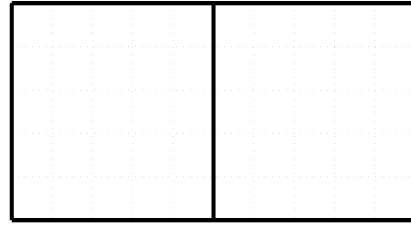
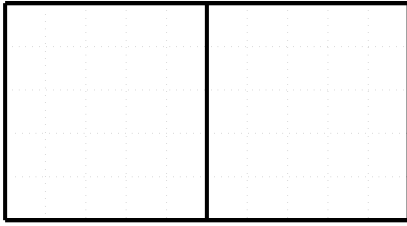
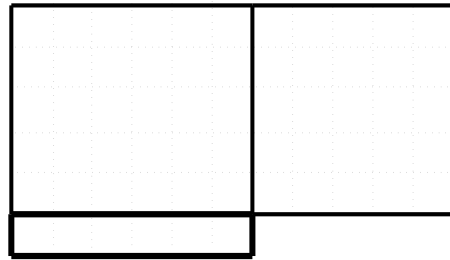
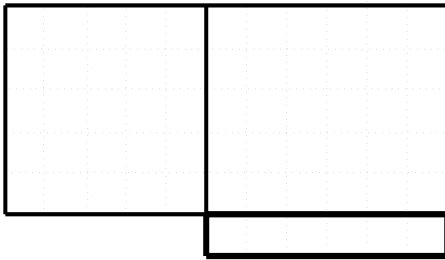
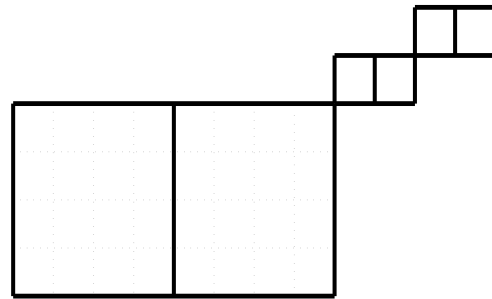
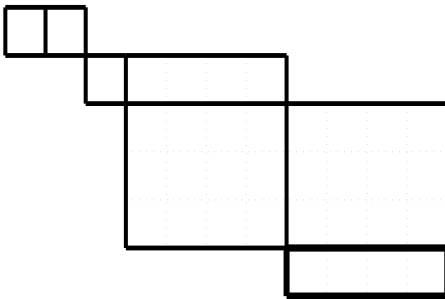
Sei X eine zahme Kurve von arithmetischem Geschlecht 0. Die Unterschiede zum Fall des Geschlechtes 1 bestehen in folgenden:

1. Die Vekrobündel und gemischten Garben gehören zur Menge der Saitenobjekte (siehe auch Kapitel 2)
2. Das Wort w aus $\mathcal{S}(w)$ kann auch endlich sein.

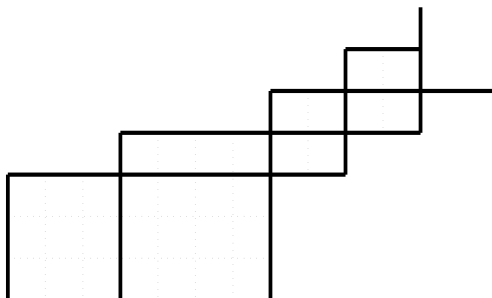
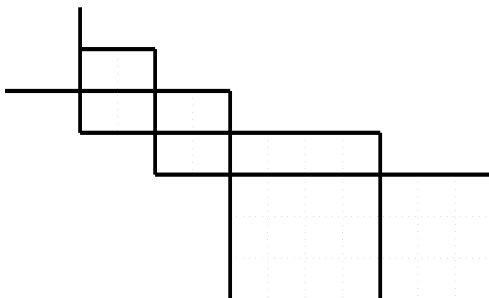
Wir wollen unser Ergebnis nun graphisch darstellen.

1. Endlich-erzeugte $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Moduln.

(a) Bänder

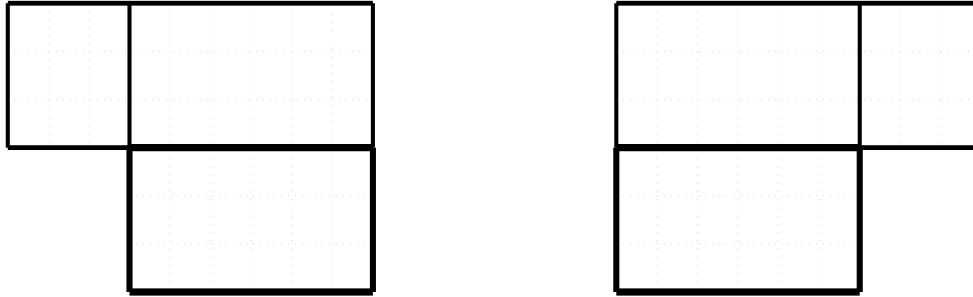
(b) Es gibt endliche Saiten (mit Anfang und Ende in $\mathbf{k}[[x]]$ und $\mathbf{k}[[y]]$).(c) Es gibt Saiten, die halbendlich sind (die Multiplizität von $\mathbf{k}[[x]]$ ist 1):

(d) Es gibt Saiten, welche in beiden Richtungen unendlich sind



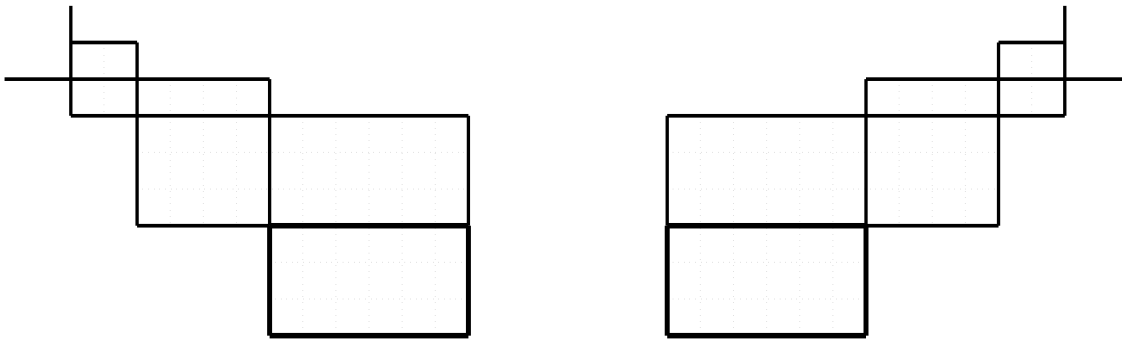
Im nächsten Kapitel werden wir sogar die minimalen Auflösungen der unzerlegbaren Objekte beschreiben.

2. Transversaler Schnitt zweier Geraden (A_1 -Konfiguration). Die Antwort ist analog zum Fall der $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Moduln. Der einzige Unterschied ist, daß es mehr "Vektorbündelblöcke" gibt.
3. Rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt.
- (a) Bänder

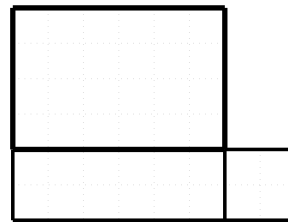
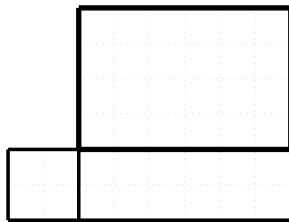
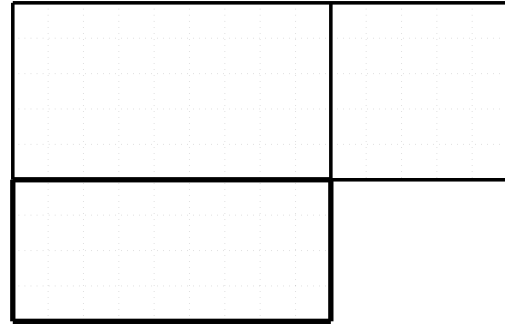
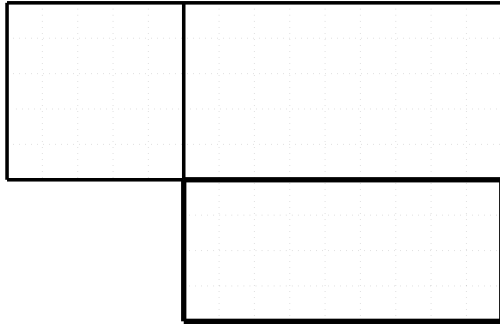


(der Wolkenkratzeranteil oder Vektorbündelanteil kann hier verschwinden. Dann erhält man Vektorbündel bzw. Wolkenkratzergarben).

- (b) In diesem Fall kann eine Saite nur in beiden Richtungen unendlich sein:

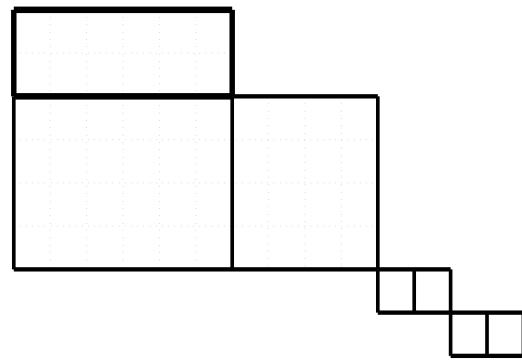
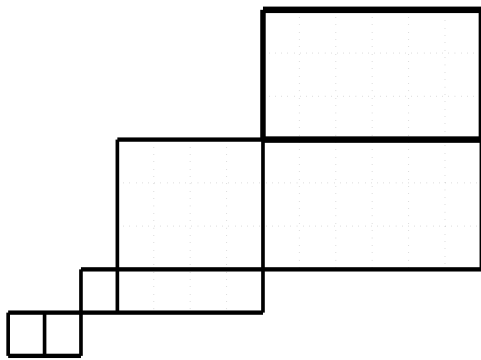
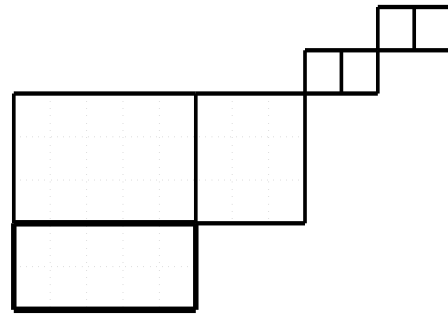
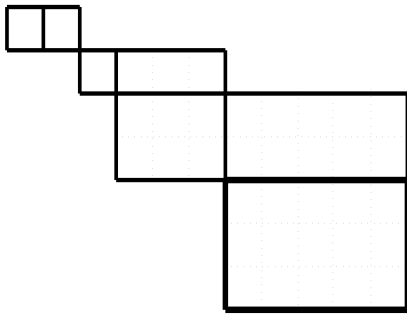


4. Zwei Geraden, die sich transversal in zwei Punkten schneiden (\tilde{A}_1 -Konfiguration)
 (a) Bänder:

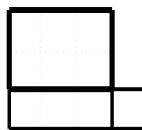
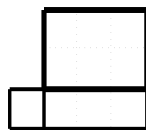
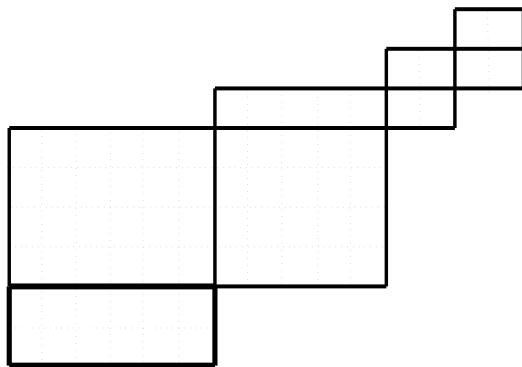
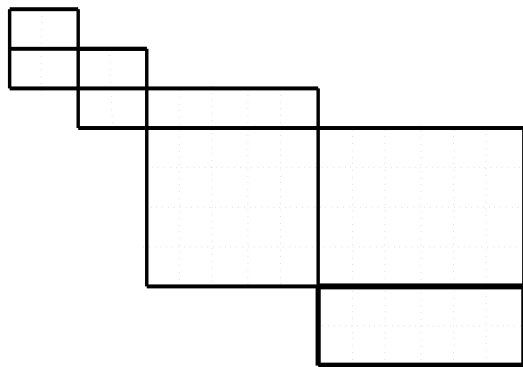


hier bemerken wir, daß die Vektorbündelblöcke aller Matrizen die gleiche Anzahl an Zeilen haben.

(b) In diesem Fall gibt es keine endlichen Saiten. Es gibt eine der Gestalt



(c) und eine der Gestalt



8. Anhang: endlich erzeugte $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Moduln

Sei $R = \mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$. Jeder unzerlegbarer Komplex aus $D^-(R\text{-mod})$ entsteht durch Verkleben der Komplexe

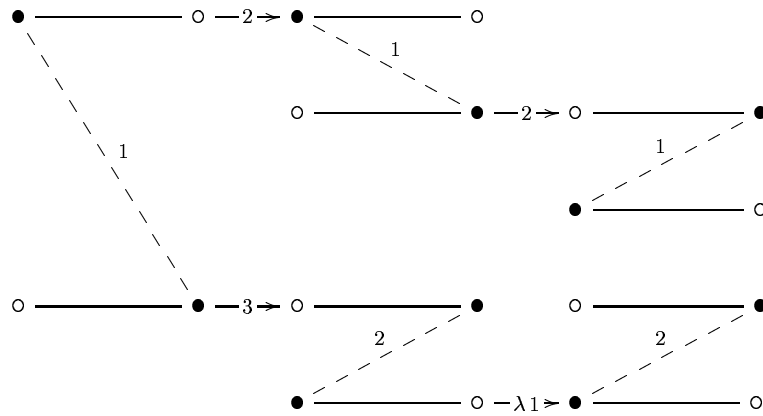
$$0 \longrightarrow \mathbf{k}[[x]] \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathbf{k}[[y]] \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{k}[[x]] \xrightarrow{x^n} \mathbf{k}[[x]] \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow \mathbf{k}[[y]] \xrightarrow{y^m} \mathbf{k}[[y]] \longrightarrow 0.$$

Es ist günstig das Verkleben der Komplexe durch ein Verklebungsdiagramm zu beschreiben.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}[[x]] \xrightarrow{x^n} \mathbf{k}[[x]] &= \bullet \text{ --- } \circ \xrightarrow{-n} \bullet \text{ --- } \circ \\ \mathbf{k}[[y]] \xrightarrow{y^m} \mathbf{k}[[x]] &= \circ \text{ --- } \bullet \xrightarrow{-m} \circ \text{ --- } \bullet \\ \mathbf{k}[[x]] &= \bullet \text{ --- } \circ \\ \mathbf{k}[[y]] &= \circ \text{ --- } \bullet \end{aligned}$$

BEISPIEL 8.1. Betrachten wir das folgende Verklebungsdiagramm:



Die gestrichelten Kanten zeigen das Verkleben von $\mathbf{k}[[x]]$ und $\mathbf{k}[[y]]$ in $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$. Wir können mühelos den entsprechenden Komplex von R -Moduln schreiben:

$$R \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} R \oplus R \xrightarrow{\begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & \lambda x \end{pmatrix}} R \oplus R.$$

Auf diese Weise erhalten wir freie Auflösungen unzerlegbarer endlich erzeugter $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Moduln.

1. Stetige Serien $\mathcal{M}(\mathbf{d}, s, \lambda)$:

$$0 \longrightarrow R^{sN} \xrightarrow{M(\mathbf{d}, s, \lambda)} R^{sN} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{d}, s, \lambda) \longrightarrow 0,$$

wobei

$$M(\mathbf{d}, s, \lambda) = \begin{pmatrix} x^{n_1} I_s & 0 & 0 & \dots & y^{m_N} J_s(\lambda) \\ y^{m_1} I_s & x^{n_2} I_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y^{m_2} I_s & x^{n_3} I_s & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y^{m_{N-1}} I_s & x^{n_N} I_s \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{d} = (n_1 m_1)(n_2 m_2) \dots (n_N m_N)$ eine nichtperiodische Folge ist. Im Fall $N = 1$ soll das die Form

$$0 \longrightarrow R^s \xrightarrow{(x^n I_s - y^m J_s(\lambda))} R^{sN} \longrightarrow \mathcal{M}((n, m), s, \lambda) \longrightarrow 0.$$

umgeschrieben werden.

2. Die erste diskrete Serie ist $\mathcal{S}(\mathbf{d})$

$$\dots R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}} R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & x \end{pmatrix}} R^{N+1} \xrightarrow{S(\mathbf{d})} R^N \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{d}) \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathbf{d} = (n_1 m_1)(n_2 m_2) \dots (n_N m_N)$ und

$$S(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} x^{n_1} & y^{m_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x^{n_2} & y^{m_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x^{n_3} & y^{m_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x^{n_N} & y^{m_N} \end{pmatrix}$$

ist. Die stetige und die erste diskrete Serie sind endlich dimensionale Moduln.

3. Es gibt auch diskrete Serien, die endlich erzeugt aber unendlich dimensional sind: Die zweite diskrete Serie $\mathcal{D}(\mathbf{d})$ ist

$$0 \longrightarrow R^N \xrightarrow{D(\mathbf{d})} R^{N+1} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbf{d}) \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathbf{d} = (n_1 m_1)(n_2 m_2) \dots (n_N m_N)$ und

$$D(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} x^{n_1} & y^{m_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x^{n_2} & y^{m_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x^{n_3} & y^{m_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x^{n_N} & y^{m_N} \end{pmatrix}$$

ist.

4. Es gibt auch diskrete Serien von endlich erzeugten und unendlich dimensionalen Moduln von unendlicher homologischer Dimension: $\mathcal{E}_x(\mathbf{d})$ und $\mathcal{E}_y(\mathbf{d})$ (dritte diskrete Serie):

$$\dots \xrightarrow{x} R \xrightarrow{y} R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x \end{pmatrix}} R^N \xrightarrow{E_x(\mathbf{d})} R^N \longrightarrow \mathcal{E}_x(\mathbf{d}) \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathbf{d} = (n_1 m_1)(n_2 m_2) \dots (n_{N-1} m_{N-1}) m_N$ ist und

$$E_x(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} y^{m_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x^{n_1} & y^{m_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x^{n_2} & y^{m_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x^{n_{N-1}} & y^{m_N} \end{pmatrix},$$

und

$$\dots \xrightarrow{y} R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y \end{pmatrix}} R^N \xrightarrow{E_y(\mathbf{d})} R^N \longrightarrow \mathcal{E}_y(\mathbf{d}) \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathbf{d} = (n_1 m_1)(n_2 m_2) \dots (n_{N-1} m_{N-1}) n_N$ ist und

$$E_y(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} x^{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ y^{m_1} & x^{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y^{m_2} & x^{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y^{m_{N-1}} & x^{n_N} \end{pmatrix}.$$

BEMERKUNG 8.2. Gegeben sei ein endlich dimensionaler $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Modul M . Dann wird er durch ein Paar einander annullierenden nilpotenten Matrizen X und Y gegeben. Es ist nicht schwer die Gestalt dieser Matrizen aus der minimalen Auflösung abzulesen. Zum Beispiel sei M durch seine Auflösung gegeben:

$$0 \longrightarrow R^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2 & \lambda y \\ y^3 & x^2 \end{pmatrix}} R^2 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Dann hat M als \mathbf{k} -Vektorraum die folgende Basis

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{x}^2 \\ \bar{0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{0} \\ -\bar{y}^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{y}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{x}^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Aktion von X und Y wird durch Multiplikation mit x und y gegeben. Die Gestalt der Matrizen, die wir damit erhalten ist die Antwort aus der klassischen Arbeit von Gelfand und Ponomarev [29].

9. Die Vermutung von Polishchuk

DEFINITION 9.1. (siehe [51]) Sei \mathcal{D} eine triangulierte Kategorie über dem Körper \mathbf{k} , so daß alle Räume $\mathrm{Hom}(X, Y)$ endlich-dimensional sind und sei $\mathrm{Hom}^i(M, N) := \mathrm{Hom}(M, N[i])$. Ein Objekt M heißt n -sphärisch, falls gilt

1. $\mathrm{Hom}^i(M, M) = 0$ für alle $i \neq 0, n$, $\mathrm{Hom}^0(M, M) \cong \mathrm{Hom}^n(M, M) \cong \mathbf{k}$.
2. $\forall F \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ ist die Verknüpfungsabbildung

$$\mathrm{Hom}^i(M, F) \times \mathrm{Hom}^{n-i}(F, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}^n(M, M) \cong \mathbf{k}$$

nicht entartet.

Sei X eine projektive Kurve von arithmetischem Geschlecht 1 und $\mathcal{D} = D^b(\mathrm{Coh}_X)$. In [42] wurde bewiesen, daß die einfachen Vektorbündel 1-sphärisch sind. Zum Beweis: die erste Bedingung folgt aus dem Satz von Riemann-Roch für singuläre Kurven. Denn: sei ein Vektorbündel \mathcal{E} einfach. Dies bedeutet, daß $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong \mathbf{k}$. Man muß noch zeigen, daß $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong \mathbf{k}$. Aus der lokal-globalen Spektralsequenz folgt, daß

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \cong H^1(\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E})) \cong H^1(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}).$$

$\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}$ ist aber ein Vektorbündel. Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt $\chi(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}) = \deg(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{E}) + 1 - p_a(X) = 0$. Darüber hinaus ist $\dim_{\mathbf{k}}(\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E})) = \dim_{\mathbf{k}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{E})) = 1$. Die zweite Bedingung folgt aus der Serreschen Dualität für abgeleitete Kategorien.

Man kann auch zeigen, daß die Wolkenkratzergerben $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ (x ist regulär) auch 1-sphärisch sind.

Problem: sind dies alle 1-sphärischen Objekte? Welche Orbits hat die Menge aller sphärischen Objekte modulo der Wirkung der Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$?

Abgeleitete Kategorien assoziativer Algebren

In diesem Kapitel wollen wir die Ergebnisse aus dem letzten Kapitel auf den Fall gewisser assoziativer Algebren übertragen. Eine Einbettung in eine Algebra mit demselben Radikal spielt die Rolle “nichtkommutativer Normalisierung”. Wie im Fall singulärer Kurven führen wir eine Hilfskategorie TC_A ein. Es besteht wiederum eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte der abgeleiteten Kategorie $D^-(A\text{-mod})$ und der Kategorie von Tripeln TC_A . Damit kann man auch unzerlegbare Objekte der abgeleiteten Kategorie einer Algebra von unendlicher homologischer Dimension beschreiben, was bis jetzt nicht betrachtet wurde. Wir bekommen auch eine Klassifikation unzerlegbarer Objekte abgeleiteter Kategorien gewisser unendlich dimensionaler Algebren (solche Algebren nennen wir “nodale Algebren”). Dazu gehört zum Beispiel der Gelfandsche Köcher. Als eine Folgerung erhalten wir, daß die abgeleitete Kategorie von Harish-Chandra Moduln über $SL_2(\mathbb{R})$ zahm ist.

Danach illustrieren wir die entwickelte Technik auf einer Algebra, für die das Quadrat des Radikals trivial ist.

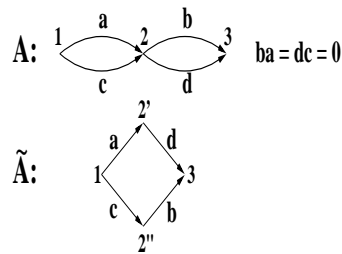
Dann werden zwei kompliziertere Beispiele betrachtet. Wir beschreiben die abgeleitete Kategorie von Darstellungen einer “hinreichend allgemeinen” zarten bzw. clannischen Algebra. Um das Matrixproblem für die entsprechende Kategorie der Tripel zu bekommen müssen wir die kraftvolle Theorie der Auslander-Reiten-Sequenzen von affinen Dynkin-Diagrammen benutzen.

Auf einer Kette projektiver Geraden gibt es ein Kippmodul. Dabei erhalten wir eine Äquivalenz von Kategorien: die Unterkategorien der Komplexe endlicher homologischer Dimension von $D^b(\text{Coh}_X)$ und $D^b(A\text{-mod})$ sind äquivalent. Die Algebra A ist die Endomorphismenalgebra eines Kippmoduls. Sie ist immer zart. Nach einem Ergebnis von Schröer und Zimmermann ist eine abgeleitet-äquivalente Algebra einer zarten Algebra wiederum zart [48].

1. Die Hauptkonstruktion

Sei A eine semi-perfekte assoziative \mathbf{k} -Algebra, $A \subset \tilde{A}$ eine Einbettung, sodaß $R = \text{rad}(A) = \text{rad}(\tilde{A})$ ist. Sei $I \subset A$ ein zweiseitiges \tilde{A} -Ideal, welches R enthält. Das heißt, daß $R \subseteq I = I\tilde{A} = \tilde{A}I$, A/I und \tilde{A}/I sind also halbeinfach.

Betrachte die folgende Einbettung von Algebren:



$$I = (a, b, c, d, e_1, e_3), \quad A/I = \mathbf{k}, \quad \tilde{A}/I = \mathbf{k} \times \mathbf{k}.$$

DEFINITION 1.1. Die Kategorie der Tripel von Komplexen TC_A wird folgendermaßen definiert.

Objekte sind Tripel $(\tilde{\mathcal{P}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$, wobei $\tilde{\mathcal{P}}_\bullet \in D^-(\tilde{A} - \text{mod})$, $\mathcal{M}_\bullet \in D^-(A/I - \text{mod})$,
 $\tilde{i} : \tilde{A}/I \otimes_{A/I} \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{\cong} \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{\mathcal{P}}_\bullet$.

Ein Morphismus $(\tilde{\mathcal{P}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i}) \xrightarrow{(\Phi, \varphi)} (\tilde{\mathcal{Q}}_\bullet, \mathcal{N}_\bullet, \tilde{j})$ wird durch ein Paar $(\Phi : \tilde{\mathcal{P}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}_\bullet, \varphi : \mathcal{M}_\bullet \rightarrow \mathcal{N}_\bullet)$ gegeben, sodaß

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A}/I \otimes_{A/I} \mathcal{M}_\bullet & \xrightarrow{\tilde{i}} & \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{\mathcal{P}}_\bullet \\ \otimes \varphi \downarrow & & \downarrow \otimes \Phi \\ \tilde{A}/I \otimes_{A/I} \mathcal{N}_\bullet & \xrightarrow{\tilde{j}} & \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{\mathcal{Q}}_\bullet \end{array}$$

kommutativ ist.

BEMERKUNG 1.2. Im Fall, wenn die Algebra A unendliche homologische Dimension hat, müssen wir mit der abgeleiteten Kategorie von rechts beschränkten Komplexen arbeiten (um das abgeleitete Tensorprodukt wohldefiniert zu haben). Wenn die Algebra A endliche homologische Dimension hat, dann können wir mit beidseitig beschränkten Komplexen arbeiten.

THEOREM 1.3. Der Funktor

$$D^-(A - \text{mod}) \xrightarrow{\mathbf{F}} \text{TC}_A$$

$\mathcal{P}_\bullet \rightarrow (\tilde{A} \otimes_A \mathcal{P}_\bullet, A/I \otimes_A \mathcal{P}_\bullet, \tilde{i} : \tilde{A}/I \otimes_{A/I} A/I \otimes_A \mathcal{P}_\bullet \rightarrow \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{A} \otimes_A \mathcal{P}_\bullet)$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

1. \mathbf{F} ist dicht (d.h. daß jedes Tripel $(\tilde{\mathcal{P}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ zum Bild eines Komplexes $\mathbf{F}(\mathcal{P}_\bullet)$ isomorph ist).
2. $\mathbf{F}(\mathcal{P}_\bullet) \cong \mathbf{F}(\mathcal{Q}_\bullet) \iff \mathcal{P}_\bullet \cong \mathcal{Q}_\bullet$.
3. $\mathbf{F}(\mathcal{P}_\bullet)$ ist unzerlegbar genau dann, wenn \mathcal{P}_\bullet unzerlegbar ist (diese Eigenschaft folgt aus den ersten zwei)
4. \mathbf{F} ist voll.

BEMERKUNG 1.4. \mathbf{F} ist nicht treu, ist also keine Äquivalenz der Kategorien. Ein Funktor, der die Eigenschaften 1-3 erfüllt, heißt Darstellungsäquivalenz.

BEWEIS. Die Hauptfrage wiederum heißt: wie rekonstruiert man aus einem Tripel $\mathcal{T} = (\tilde{\mathcal{P}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ den entsprechenden Komplex \mathcal{P}_\bullet ? Die exakte Sequenz von Komplexen in $A - \text{mod}$

$$0 \rightarrow I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_\bullet \rightarrow \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{\mathcal{P}}_\bullet \rightarrow 0$$

liefert uns ein ausgezeichnetes Dreieck

$$I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_\bullet \rightarrow \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{\mathcal{P}}_\bullet \rightarrow I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet[-1]$$

in $D^-(A - \text{mod})$.

Die Eigenschaften triangulierter Kategorien implizieren, daß es ein Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken gibt

$$\begin{array}{ccccccc} I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{P}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{\mathcal{P}}_\bullet & \longrightarrow & I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet[-1] \\ id \uparrow & & \uparrow \Phi & & \uparrow i & & id \uparrow \\ I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{P}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{M}_\bullet & \longrightarrow & I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet[-1], \end{array}$$

wobei $\mathcal{P}_\bullet = \text{cone}(\mathcal{M}_\bullet \rightarrow I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet[-1])[1]$. Setze $\mathbf{G}(\mathcal{T}) = \mathcal{P}_\bullet$. Die Eigenschaften triangulierter Kategorien implizieren wiederum, daß die gegebene Abbildung (kein Funktor)

$$\mathbf{G} : \text{Ob}(\text{TC}_A) \rightarrow \text{Ob}(D^-(A\text{-mod}))$$

die Isomorphieklassen entdeckt und die Eigenschaft $\mathbf{GF}(\mathcal{P}_\bullet) \cong \mathcal{P}_\bullet$ erfüllt. Wir müssen jetzt zeigen, daß $\mathbf{FG}(\tilde{\mathcal{P}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i}) \cong (\tilde{\mathcal{P}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ gilt.

LEMMA 1.5. *Mit der obigen Notation sei \tilde{P} ein projektiver \tilde{A} -Modul, M ein A/I -Modul, $i : M \rightarrow \tilde{P}/I\tilde{P}$ ein Monomorphismus von A/I -Moduln, sodaß die induzierte Abbildung $\tilde{i} : \tilde{A}/I \otimes_{A/I} M \rightarrow \tilde{P}/I\tilde{P}$ ein Isomorphismus ist. Betrachte das Pullbackdiagramm*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I\tilde{P} & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & I\tilde{P} & \longrightarrow & \tilde{P} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{P}/I\tilde{P} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Dann ist P ein projektiver A -Modul und $\tilde{A} \otimes_A P \rightarrow \tilde{P}$ ist ein Isomorphismus.

Betrachte das Bild \bar{I} des Ideals I im \tilde{A}/R . Da \tilde{A}/R halbeinfach ist, dann können wir ein Ideal \bar{J} in \tilde{A}/R finden, sodaß $\bar{I} + \bar{J} = \tilde{A}/R$ und $\bar{I} \cap \bar{J} = 0$ gilt. Nach dem Chinesischen Restsatz gilt $\tilde{A}/R = \tilde{A}/I \times \tilde{A}/J$.

Sei $\tilde{P} = \tilde{P}/R\tilde{P}$. Dann ist $\tilde{P} = \tilde{P}_1 \oplus \tilde{P}_2$, wobei \tilde{P}_1 ein \tilde{A}/I -Modul und \tilde{P}_2 ein \tilde{A}/J -Modul ist. Dann zerlegt sich auch \tilde{P} in eine direkte Summe: $\tilde{P} = \tilde{P}_1 \oplus \tilde{P}_2$, wobei $\tilde{P}_i = \tilde{P}_i/R\tilde{P}_i$, $i = 1, 2$ (wir benutzen hier die Bijektion zwischen projektiven und halbeinfachen Moduln: $\tilde{P} \longleftrightarrow \tilde{P}/R\tilde{P}$).

Dann haben wir:

$$I\tilde{P}_1 = R\tilde{P}_1, I\tilde{P}_2 = \tilde{P}_2.$$

Um dies zu beweisen bemerken wir zunächst, daß $\tilde{P}_1/R\tilde{P}_1$ ein A/I -Modul ist, denn es gilt $I\tilde{P}_1 \subseteq R\tilde{P}_1$. Wir haben aber eine Inklusion $R \subseteq I$, denn $R\tilde{P}_1 \subseteq I\tilde{P}_1$. Es gilt also $I\tilde{P}_1 = R\tilde{P}_1$. Genauso gilt $J\tilde{P}_2 \subseteq R\tilde{P}_2$. Aber $I + J = \tilde{A}$, deswegen ist

$$\tilde{P}_2 = I\tilde{P}_2 + J\tilde{P}_2 \subseteq I\tilde{P}_2 + R\tilde{P}_2 \subseteq \tilde{P}_2.$$

Nach Nakayamas Lemma gilt $I\tilde{P}_2 = \tilde{P}_2$.

Unser Diagramm hat jetzt die Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{P}_2 \oplus R\tilde{P}_1 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{P}_2 \oplus R\tilde{P}_1 & \longrightarrow & \tilde{P}_1 \oplus \tilde{P}_2 & \xrightarrow{\pi} & \tilde{P}_1/R\tilde{P}_1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Da $P \rightarrow \tilde{P}_1 \oplus \tilde{P}_2$ ein Monomorphismus ist, ist \tilde{P}_2 ein direkter Summand von P . Darüber hinaus ist \tilde{P}_2 ein projektiver A -Modul.

Sei \tilde{Q} ein projektiver \tilde{A} -Modul, der die Eigenschaft $I\tilde{Q} = \tilde{Q}$ erfüllt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß \tilde{Q} ein direkter Summand von \tilde{A} ist. Dann gilt:

$$\tilde{Q} = I\tilde{Q} \subseteq I\tilde{A} \subseteq A \subseteq \tilde{A}.$$

Aber die Einbettung $\tilde{Q} \rightarrow \tilde{A}$ spaltet. Daraus folgt, daß $\tilde{Q} \rightarrow A$ ebenfalls spaltet. \tilde{Q} ist also ein projektiver A -Modul.

Beweisen wir nun, daß die kanonische Abbildung $\tilde{A} \otimes_A \tilde{P}_2 \rightarrow \tilde{P}_2$ ein Isomorphismus ist. Es gilt

$$\tilde{A} \otimes_A \tilde{P}_2 = \tilde{A} \otimes_A I\tilde{P}_2 = \tilde{A}I \otimes_A \tilde{P}_2 = I \otimes_A \tilde{P}_2.$$

Aber \tilde{P}_2 ist ein flacher A -Modul, also gilt

$$I \otimes_A \tilde{P}_2 = I\tilde{P}_2 = \tilde{P}_2.$$

Wir haben also das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & R\tilde{P}_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & R\tilde{P}_1 & \longrightarrow & \tilde{P}_1 & \xrightarrow{\pi} & \tilde{P}_1/R\tilde{P}_1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Wir wissen, daß $\tilde{i} : \tilde{A}/I \otimes_{A/I} M \longrightarrow \tilde{P}_1/I\tilde{P}_1$ ein Isomorphismus ist. Dann ist $\tilde{A}/R \otimes_{A/R} M \longrightarrow \tilde{P}_1/R\tilde{P}_1$ auch ein Isomorphismus. Es gilt $IM = 0$, also ist M ein Untermodul des Moduls $\tilde{P}_1/I\tilde{P}_1$. Da $I + J = A$ ist, gilt $JM = M$ und $\tilde{A}/J \otimes_{A/R} M = 0$. Daraus folgt, daß

$$\tilde{A}/I \otimes_{A/I} M = \tilde{A}/I \otimes_{A/R} M \cong (\tilde{A}/I \oplus \tilde{A}/J) \otimes_{A/R} M \cong \tilde{A}/R \otimes_{A/R} M.$$

Wir haben jetzt zu zeigen, daß P_1 projektiv ist und $\tilde{A} \otimes_A P \longrightarrow \tilde{P}_1$ ein Isomorphismus. Sei $P(M)$ eine projektive Überlagerung von M .

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P(M) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & \swarrow \psi & & & \\ 0 & \longrightarrow & R\tilde{P}_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & R\tilde{P}_1 & \longrightarrow & \tilde{P}_1 & \longrightarrow & \tilde{P}_1/R\tilde{P}_1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Wenden wir jetzt den Funktor $A/R \otimes_A$ auf die erste Zeile dieses Diagramms an, erhalten wir, daß $\bar{\psi} : P(M)/RP(M) \longrightarrow P/RP$ ein Isomorphismus ist. Nach Nakaymas Lemma ist ψ ein Epimorphismus. Betrachte die Verknüpfung dieser Abbildungen $P(M) \longrightarrow \tilde{P}_1$. Die induzierte Abbildung $\tilde{A} \otimes_A P(M) \longrightarrow \tilde{P}_1$ ist ein Isomorphismus modulo dem Radikal R . Sie ist dann ein wirklicher Isomorphismus, da beiden Moduln projektiv sind. Wir bekommen, daß $P(M) \longrightarrow \tilde{A} \otimes_A P(M) \longrightarrow \tilde{P}_1$ ein Monomorphismus ist. Aber dann ist auch $\psi : P(M) \longrightarrow P$ ein Monomorphismus und somit ein Isomorphismus. Im Laufe des Beweises haben wir auch gezeigt, daß $\tilde{A} \otimes_A P \longrightarrow \tilde{P}_1$ ebenfalls ein Isomorphismus ist.

Kehren wir jetzt zum Beweis unseres Hauptsatzes zurück. Sei $(\tilde{\mathcal{P}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ ein Tripel. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $\tilde{\mathcal{P}}_\bullet$ ein minimaler Komplex ist und \mathcal{M}_\bullet nur Nulldifferentiale hat. Dann ist $\tilde{\mathcal{P}}_\bullet/R\tilde{\mathcal{P}}_\bullet$ auch ein Komplex mit Nulldifferentialen und die Abbildung $i : \mathcal{M}_\bullet \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}_\bullet/I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet$ hat die Eigenschaft, daß $\tilde{i} : \tilde{A}/I \otimes_{A/I} \mathcal{M}_\bullet \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}_\bullet/I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet$ ein Isomorphismus von Komplexen ist. Betrachte nun das Pullbackdiagramm in der abelschen Kategorie der Komplexe von A -Moduln.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet & \longrightarrow & \mathcal{P}_\bullet & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{M}_\bullet \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id & & \downarrow \Phi & & \downarrow i \\ 0 & \longrightarrow & I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{P}}_\bullet & \xrightarrow{\pi} & \tilde{\mathcal{P}}_\bullet/I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet \longrightarrow 0. \end{array}$$

Aus den obigen Lemmata folgt, daß

1. \mathcal{P}_\bullet ein Komplex projektiver A -Moduln ist;
2. $(\Phi \otimes id, \Psi \otimes id) : (\tilde{A} \otimes_A \mathcal{P}_\bullet, A/I \otimes_A \mathcal{P}_\bullet, \tilde{A}/I \otimes_{A/I} A/I \otimes_A \mathcal{P}_\bullet \longrightarrow \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{A} \otimes_A \mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow (\tilde{\mathcal{P}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ ein Isomorphismus in der Kategorie der Tripel ist.

Es bleibt nur zu zeigen, daß \mathbf{F} voll ist.

Sei $(\Phi, \varphi) : (\tilde{\mathcal{P}}_{1\bullet}, \mathcal{M}_{1\bullet}, \tilde{i}_1) \rightarrow (\tilde{\mathcal{P}}_{2\bullet}, \mathcal{M}_{2\bullet}, \tilde{i}_2)$ ein Morphismus in TC_A , wobei $\mathcal{M}_{1\bullet}$ und $\mathcal{M}_{2\bullet}$ Komplexe mit Nulldifferentialen sind. Da alle unsere Komplexe Komplexe projektiver Moduln sind, lassen sich Φ und φ als Morphismen der Komplexe darstellen. Nehmen wir weiterhin an, daß $\tilde{\mathcal{P}}_{1\bullet}$ and $\tilde{\mathcal{P}}_{2\bullet}$ minimal sind. Dann haben die Komplexe $A/I \otimes_A \tilde{\mathcal{P}}_{i\bullet}$, $i = 1, 2$ Nulldifferentialie.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{1\bullet} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_{2\bullet} \\ \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 \\ \tilde{\mathcal{P}}_{1\bullet}/I\tilde{\mathcal{P}}_{1\bullet} & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \tilde{\mathcal{P}}_{2\bullet}/I\tilde{\mathcal{P}}_{2\bullet} \end{array}$$

ist kommutativ *in der Kategorie der Komplexe*. Die Eigenschaften des Pullbacks implizieren die Existenz eines Morphismus der Komplexe $\mathcal{P}_{1\bullet} \rightarrow \mathcal{P}_{2\bullet}$ so, daß

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{P}_{2\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\bullet} \\ & \nearrow & \downarrow & & \nearrow \\ \mathcal{P}_{1\bullet} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{1\bullet} & & \downarrow \\ & \downarrow & \tilde{\mathcal{P}}_{2\bullet} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{P}}_{2\bullet}/I\tilde{\mathcal{P}}_{2\bullet} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & \tilde{\mathcal{P}}_{1\bullet} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{P}}_{1\bullet}/I\tilde{\mathcal{P}}_{1\bullet} & \end{array}$$

kommutativ ist. Das gibt uns eine Hochhebung von (Φ, φ) , die uns interessiert. Wir haben gezeigt, daß \mathbf{F} voll ist, womit der Hauptsatz bewiesen ist.

□

2. Nodale Algebren

Sei A eine *reine Noethersche komplette Algebra*, d.h. ein Ring mit den Eigenschaften:

1. Sein Zentrum C ist ein kompletter lokaler Noetherscher Ring.
2. A ist endlich erzeugt als C -Modul und hat keine minimalen Untermoduln.

Bezeichne R das Radikal von A . Es wurde in [21] gezeigt, daß A genau unter den folgenden Umständen zahm ist:

1. Die Algebra $\tilde{A} = \text{End}_A(R)$ ist erblich.
2. $\text{rad}(\tilde{A}) = R$.
3. Für jeden A -Modul U ist die Länge vom A -Linksmodul $\tilde{A} \otimes_A U$ und vom A -Rechtsmodul $U \otimes_A \tilde{A}$ höchstens 2.

Wir nennen solche Algebren *nodal*. Nehmen wir noch an, daß der Residuenkörper \mathbf{k} von C algebraisch abgeschlossen ist. Wir können die letzte Bedingung in der Definition von nodalen Algebren in einer einfacheren Form angeben. Sei U ein einfacher A -Modul, $P \rightarrow U$ seine projektive Überlagerung. Dann haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow RP \rightarrow P \rightarrow U \rightarrow 0.$$

Wenden wir den Funktor $\tilde{A} \otimes_A$ auf diese Sequenz an, erhalten wir die Sequenz

$$\tilde{A} \otimes_A RP \rightarrow \tilde{A} \otimes_A P \rightarrow \tilde{A} \otimes_A U \rightarrow 0.$$

Aber $R = \text{rad}(\tilde{A})$, denn es gilt $\text{im}(\tilde{A} \otimes_A RP \rightarrow \tilde{A} \otimes_A P) = R \otimes_A P = \text{rad}(\tilde{A} \otimes_A P)$. Wir haben also eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{rad}(\tilde{A} \otimes_A P) \rightarrow \tilde{A} \otimes_A P \rightarrow \tilde{A} \otimes_A U \rightarrow 0.$$

Der Modul $\tilde{A} \otimes_A U$ ist eine direkte Summe von einfachen \tilde{A} -Moduln. Sei U_1, U_2, \dots, U_m die Menge aller nichtisomorphen einfachen A -Moduln, V_1, V_2, \dots, V_n die Menge aller nichtisomorphen einfachen \tilde{A} -Moduln. Betrachte den folgenden gerichteten Graphen Γ : die Knoten von Γ seien U_i, V_j , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Eine Kante $U_i \rightarrow V_j$ existiert genau dann, wenn V_j ein direkter Summand von $\tilde{A} \otimes_A U_i$ ist. Es wurde in [21] gezeigt, daß die letzte Bedingung aus dem Kriterium der Zahmheit die folgende Interpretation hat: alle Zusammenhangskomponenten des Graphen Γ haben die Gestalt

1. $V' \leftarrow U \rightarrow V''$.
2. $U' \rightarrow V \leftarrow U''$.
3. $U \rightarrow V$.

Zur Verdeutlichung betrachten wir ein paar Beispiele.

BEISPIEL 2.1. Sei $A = \mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$, $\mathfrak{m} = (x, y)$ sein maximales Ideal. Dann ist $\tilde{A} = \text{End}_A(\mathfrak{m}) = \mathbf{k}[[x]] \times \mathbf{k}[[y]]$. Sei U der einzige einfache A -Modul, V_1, V_2 einfache \tilde{A} -Moduln. Dann ist unser Graph Γ

$$V_1 \leftarrow U \rightarrow V_2.$$

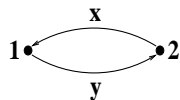
BEISPIEL 2.2. Sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & {}^t f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \mid f_{ij} \in \mathbf{k}[[t]], 1 \leq i, j \leq 2; f_{11}(0) = f_{22}(0) \right\} \subseteq \text{Mat}_2(\mathbf{k}[[t]]).$$

Wie man leicht sieht, ist A die Algebra $\mathbf{k}\langle\langle x, y \rangle\rangle/(x^2, y^2)$, wobei $\mathbf{k}\langle\langle x, y \rangle\rangle$ die Algebra der formalen Potenzreihen in zwei nicht-kommutativen Variablen bezeichne. Die Endomorphismenalgebra ihres Radikals ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & {}^t f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \mid f_{ij} \in \mathbf{k}[[t]], 1 \leq i, j \leq 2 \right\} \subseteq \text{Mat}_2(\mathbf{k}[[t]]).$$

Das ist einfach die Kompletterung der Pfadalgebra des folgenden Köchers:



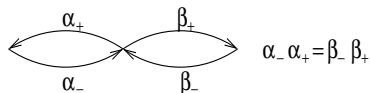
Ein Isomorphismus wird durch die folgende Abbildung gegeben:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Graph Γ hat die Gestalt

$$V_1 \longleftarrow U \longrightarrow V_2.$$

BEISPIEL 2.3. Sei A die Komplettierung der Pfadalgebra des Gelfandschen Köchers:



Es gilt

$$A \cong \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & tf_{12} & tf_{13} \\ f_{21} & f_{22} & tf_{23} \\ f_{31} & tf_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \mid f_{ij} \in \mathbf{k}[[t]], 1 \leq i, j \leq 3 \right\} \subseteq \text{Mat}_3(\mathbf{k}[[t]])$$

Ein Isomorphismus wird durch die folgende Abbildung gegeben:

$$\alpha_+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

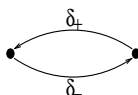
Die Endomorphismenalgebra $\tilde{A} = \text{End}(\text{rad}(A))$ ist

$$\tilde{A} \cong \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & tf_{12} & tf_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \mid f_{ij} \in \mathbf{k}[[t]] \right\} \subseteq \text{Mat}_3(\mathbf{k}[[t]]).$$

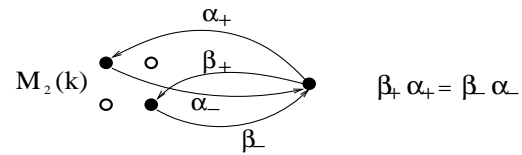
Sie ist Morita äquivalent zur Algebra

$$\left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & tf_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \mid f_{ij} \in \mathbf{k}[[t]], 1 \leq i, j \leq 2 \right\} \subseteq \text{Mat}_2(\mathbf{k}[[t]]).$$

Letztere ist dabei die Komplettierung der Pfadalgebra des Köchers



Die Algebra \tilde{A} ist isomorph zur Komplettierung der Pfadalgebra des folgenden Köchers mit nicht-reduzierten Idempotenten



Seien U_1, U_2, U_3 die einfachen A -Moduln, V_1, V_2 die einfachen \tilde{A} -Moduln. Unser Graph Γ hat die Form

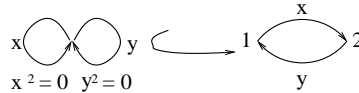
$$U_1 \longrightarrow V_1 \longleftarrow U_3, \quad U_2 \longrightarrow V_2.$$

THEOREM 2.4. *Die abgeleitete Kategorie der Darstellungen einer nodalen Algebra ist zahm.*

Bevor wir den Beweis von Theorem 2.4 zuwenden, wollen wir einige Beispiele betrachten.

3. Der Fall von $D^-(\mathbf{k}\langle\langle x, y \rangle\rangle/(x^2, y^2)\text{-mod})$

Betrachte eine Einbettung von Algebren:



In diesem Fall ist $A = \mathbf{k}\langle\langle x, y \rangle\rangle/(x^2, y^2)$. Man sieht leicht, daß $I = \text{Ann}_A(\tilde{A}/A) = (x, y)$ ist. Daraus folgt $A/I = \mathbf{k}$, $\tilde{A}/I = \mathbf{k} \times \mathbf{k}$ und $A/I \rightarrow \tilde{A}/I$ ist die Diagonaleinbettung.

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß jeder Komplex \mathcal{P}_\bullet aus der abgeleiteten Kategorie $D^-(A\text{-mod})$ eindeutig durch ein Tripel $(\tilde{\mathcal{P}}_\bullet, \mathcal{M}_\bullet, \tilde{i})$ definiert wird.

Die Kategorie $A/I\text{-mod}$ läßt sich mit der Kategorie der endlich-dimensionalen \mathbf{k} -Vektorräume identifizieren. Dann wird die Abbildung $i : \mathcal{M}_\bullet \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_\bullet/I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet$ durch eine Familie linearer Abbildungen $H_k(i) : H_k(\mathcal{M}_\bullet) \rightarrow H_k(\tilde{\mathcal{P}}_\bullet/I\tilde{\mathcal{P}}_\bullet)$ gegeben. Die Abbildung $H_k(i)$ ist eine \mathbf{k} -lineare Abbildung eines \mathbf{k} -Vektorraumes in einen $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -Modul, der mittels der Diagonaleinbettung als \mathbf{k} -Vektorraum aufgefaßt wird. Sie wird deshalb durch zwei Matrizen $H_k(i)(1)$ und $H_k(i)(2)$ gegeben. Die Bedingung, daß \tilde{i} Isomorphismus ist impliziert, daß beide Matrizen quadratisch und invertierbar sind.

Die Algebra \tilde{A} hat homologische Dimension 1. Darüber hinaus ist sie auch eine Ordnung. Nach einem Satz von Dold (siehe [14]) ist jeder unzerlegbare Komplex in $D^-(\tilde{A}\text{-mod})$ zu einem Komplex der Gestalt

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{M}_i \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

isomorph, wobei M ein unzerlegbarer \tilde{A} -Modul ist. Aber \tilde{A} ist eine erbliche Ordnung. Dann ist jeder unzerlegbare \tilde{A} -Modul (siehe [22]) zu einem Shift von $P_i, i = 1, 2$ oder zu

$$P_i \xrightarrow{w} P_j \quad (i, j = 1, 2),$$

isomorph, wobei $P_i = \tilde{A}e_i$ ist (e_i ist der Idempotent, der dem Knoten i des Köchers entspricht), w wird durch einen Faden von j nach i gegeben, und es gilt $\text{Im}(w) \subseteq rP_j$. Deswegen ist

$$\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} (P_i \xrightarrow{w} P_j) = \mathbf{k}_i \xrightarrow{0} \mathbf{k}_j.$$

Sei

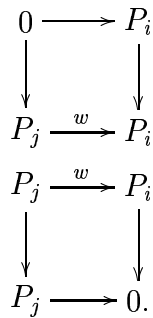
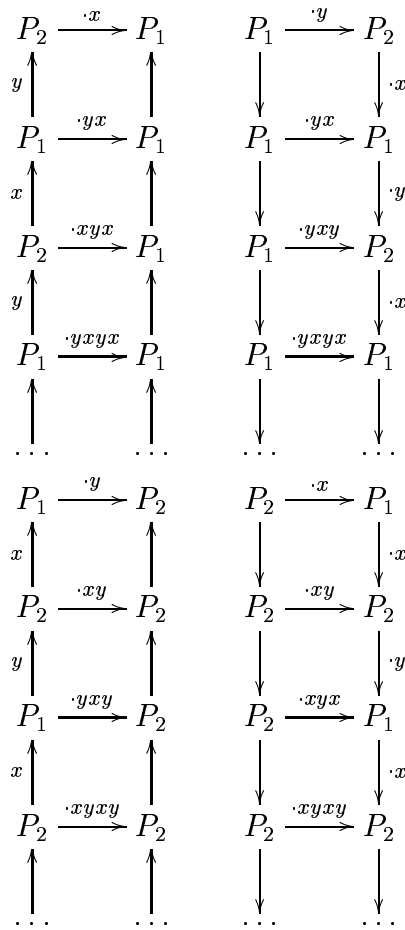
$$\tilde{\mathcal{P}}_\bullet = \bigoplus \tilde{\mathcal{P}}_\bullet^{n_i}$$

eine Zerlegung von $\tilde{\mathcal{P}}_\bullet$ in eine direkte Summe unzerlegbarer Objekte. Diese Zerlegung liefert eine Verteilung der Matrizen $H_k(i)(1)$ und $H_k(i)(2)$ in horizontalen Blöcken.

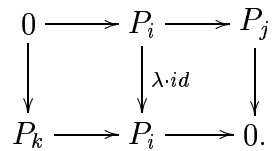
Die nächste Frage ist: welche Umformungen mit den Matrizen $H_k(i)(1)$ und $H_k(i)(2)$ sind zulässig?

Selbstverständlich können wir eine beliebige simultane Spaltentransformation der Matrizen $H_k(i)(1)$ und $H_k(i)(2)$ durchführen (sie entspricht einem Automorphismus von \mathcal{M}_k). Aus der Definition der Kategorie der Tripel folgt, daß die Transformationen der Zeilen der Matrizen $H_k(i)(1)$ und $H_k(i)(2)$ durch Morphismen der Kategorie $D^-(\tilde{A}\text{-mod})$ induziert sind.

Wir wollen nun diejenigen Morphismen zwischen unzerlegbaren Komplexen der Kategorie $D^-(\tilde{A}\text{-mod})$ beschreiben, die nach Tensorieren mit \tilde{A}/I nicht verschwinden. Laut dem Ergebnis von [22] haben sie die folgende Struktur:

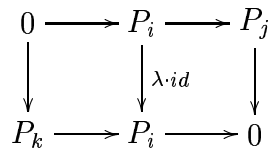


Dabei haben wir immer Morphismen der Gestalt



Wir haben folgende Möglichkeiten.

1. Der Morphismus



induziert die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{k}_i & \longrightarrow & \mathbf{k}_j \\ \downarrow & & \downarrow \lambda & & \downarrow \\ \mathbf{k}_k & \longrightarrow & \mathbf{k}_i & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

2. Der Morphismus

$$\begin{array}{ccc} P_j & \longrightarrow & P_i \\ \downarrow w & & \downarrow \lambda \cdot id \\ P_k & \longrightarrow & P_i \end{array}$$

wobei $w \in \text{rad}(\tilde{A})$ ist, induziert

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_j & \longrightarrow & \mathbf{k}_j \\ \downarrow 0 & & \downarrow \lambda \\ \mathbf{k}_k & \longrightarrow & \mathbf{k}_i. \end{array}$$

3. Völlig analog induziert der Morphismus

$$\begin{array}{ccc} P_i & \longrightarrow & P_j \\ \downarrow \lambda \cdot id & & \downarrow w \\ P_i & \longrightarrow & P_k \end{array}$$

wobei $w \in \text{rad}(\tilde{A})$ ist, eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_i & \longrightarrow & \mathbf{k}_j \\ \downarrow \lambda & & \downarrow 0 \\ \mathbf{k}_i & \longrightarrow & \mathbf{k}_k. \end{array}$$

4. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_i \\ \downarrow & & \downarrow \lambda \cdot id \\ P_j & \xrightarrow{w} & P_i \end{array}$$

induziert

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{k}_i \\ \downarrow & & \downarrow \lambda \\ \mathbf{k}_j & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_i \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} P_j & \xrightarrow{w} & P_i \\ \downarrow \lambda \cdot id & & \downarrow \\ P_j & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

induziert

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_j & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}_i \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \\ \mathbf{k}_j & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

5. Ein Endomorphismus

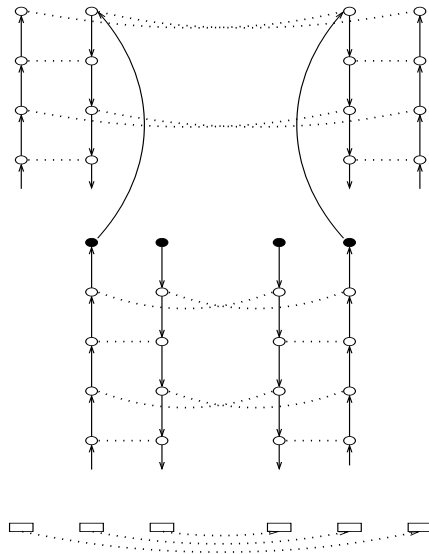
$$\begin{array}{ccc} P_j & \longrightarrow & P_i \\ \downarrow \lambda \cdot \text{id} & & \downarrow \lambda \cdot \text{id} \\ P_j & \longrightarrow & P_i \end{array}$$

induziert

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_i & \longrightarrow & \mathbf{k}_j \\ \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda \\ \mathbf{k}_i & \longrightarrow & \mathbf{k}_j, \end{array}$$

und dasselbe gilt für P_1 und P_2 .

Dabei haben wir bewiesen, daß das Matrixproblem, das die Kategorie der Tripel TC_A beschreibt, durch die folgende partiell geordnete Menge (Kettenbund, siehe [5] oder Appendix B [19]) gegeben ist. Die kleinen Kreise entsprechen den horizontalen Blöcken, die kleinen Rechtecke entsprechen den vertikalen Blöcken, punktierte Linien zwischen den Kreisen zeigen Blöcken mit dem gleichen Gewicht, vertikale Pfeile entsprechen den möglichen Zeilenumformungen:



Mit anderen Worten können wir die folgenden Transformationen mit unseren Matrizen $H_\bullet(i)$ durchführen:

1. eine beliebige simultane Spaltentransformation der Matrizen $H_k(i)(1)$ und $H_k(i)(2)$, $k \in \mathbb{Z}$,
2. eine beliebige simultane Zeilentransformation innerhalb konjugierter horizontalen Blöcken.
3. Wir können unabhängig ein Vielfaches jeder Zeile (von $H_k(i)(1)$ oder $H_k(i)(2)$, $k \in \mathbb{Z}$) mit kleinerem Gewicht zu einer Zeile mit größerem Gewicht hinzuaddieren.

Dieses Matrixproblem gehört auch zum Typ "Darstellungen der Kettenbünde", siehe [5].

4. Gelfandscher Köcher

In diesem Kapitel wenden wir die entwickelte Technik an, um die abgeleitete Kategorie von Darstellungen der Komplettierung der Pfadalgebra

$$\begin{array}{c} \alpha_+ \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \alpha_- \end{array} \quad \begin{array}{c} \beta_+ \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \beta_- \end{array} \quad \alpha_- \alpha_+ = \beta_- \beta_+$$

zu beschreiben.

Die Klassifikation aller unzerlegbarer Darstellungen von diesem Köcher wurde auf ein Matrixproblem vom Typ "Darstellungen von *Halbkettenbündeln*" reduziert, siehe [5]. Deswegen ist es keine Überraschung, daß die Beschreibung der abgeleiteten Kategorie auf ein Matrixproblem desselben Typs reduziert wird. Betrachten wir die Einbettung aus dem Beispiel 1.2. In diesem Fall haben wir: $A/I = \mathbf{k} \times \mathbf{k}$, $\tilde{A}/I = M_2(\mathbf{k})$ und $A/I \rightarrow \tilde{A}/I$ ist die Diagonalabbildung. Jetzt haben wir die folgende Frage zu beantworten:

FRAGE 4.1. Sei M ein $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -Modul, M' ein $M_2(\mathbf{k})$ -Modul, $\varphi : M \rightarrow M'$ eine Abbildung von $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -Moduln (die Struktur eines $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -Modul auf M' wird durch die Diagonalabbildung gegeben). Eine Abbildung von $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -Moduln wird durch zwei Matrizen $\varphi(1)$ und $\varphi(2)$ gegeben. Welche Bedingungen sollen die $\varphi(1)$ und $\varphi(2)$ erfüllen, damit $\tilde{\varphi} : M_2(\mathbf{k}) \otimes_{\mathbf{k} \times \mathbf{k}} M \rightarrow M'$ ein Isomorphismus ist?

Sei $M = \langle v_1, v_2, \dots, v_m; w_1, w_2, \dots, w_n \rangle = \mathbf{k}(1)^m \oplus \mathbf{k}(2)^n$. Es gibt genau einen unzerlegbaren $M_2(\mathbf{k})$ -Modul, nämlich \mathbf{k}^2 . Es gilt also

$$M' = \langle u'_1, u''_1; u'_2, u''_2; \dots, u'_N, u''_N \rangle = (\mathbf{k}^2)^N,$$

wobei die Wirkung der Matrixeinheiten die folgende ist:

$$e_{11}u'_i = u'_i, \quad e_{21}u'_i = u''_i, \quad e_{12}u'_i = 0, \quad e_{22}u'_i = 0,$$

und analog,

$$e_{11}u''_i = 0, \quad e_{21}u''_i = 0, \quad e_{12}u''_i = u'_i, \quad e_{22}u''_i = u''_i.$$

Sei

$$\varphi(v_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_{ji} u'_j + \sum_{j=1}^N \alpha'_{ji} u''_j.$$

Da φ ein Homomorphismus der $\mathbf{k} \times \mathbf{k}$ -Moduln ist, gilt $0 = \varphi(e_{22}v_i) = e_{22}\varphi(v_i)$. Deswegen sind alle $\alpha'_{ji} = 0$. Analog gilt

$$\varphi(w_i) = \sum_{j=1}^N \beta_{ji} u''_j.$$

Auf der anderen Seite wird ein Homomorphismus von $M_2(\mathbf{k})$ -Moduln

$\psi : (\mathbf{k}^2)^n \rightarrow (\mathbf{k}^2)^m$ durch eine $m \times n$ Matrix (α_{ij}) mit Einträgen aus \mathbf{k} gegeben (siehe [20], theorem 1.7.5). Nämlich, wenn $(e'_1, e''_1, e'_2, e''_2, \dots, e'_n, e''_n)$ und $(f'_1, f''_1, f'_2, f''_2, \dots, f'_m, f''_m)$ die kanonischen Basen von $(\mathbf{k}^2)^n$ und $(\mathbf{k}^2)^m$ sind, dann gilt

$$\psi(e'_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} f'_i,$$

$$\psi(e''_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} f''_i.$$

Die Elemente

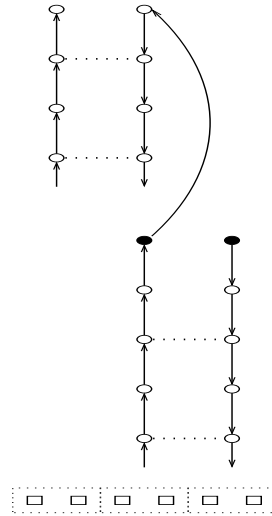
$$e_{11} \otimes v_1, e_{21} \otimes v_1; e_{11} \otimes v_2, e_{21} \otimes v_2; \dots; e_{11} \otimes v_m, e_{21} \otimes v_m;$$

$$e_{12} \otimes w_1, e_{22} \otimes w_1; e_{12} \otimes w_2, e_{22} \otimes w_2; \dots; e_{12} \otimes w_n, e_{22} \otimes w_n.$$

erzeugen den $M_2(\mathbf{k})$ -Modul $M_2(\mathbf{k}) \otimes_{\mathbf{k} \times \mathbf{k}} M$.

Da $\tilde{\varphi}(e \otimes v) = e\varphi(v)$ ist, sieht man leicht, daß φ durch eine $N \times (n + m)$ -Matrix $(\varphi(1)|\varphi(2))$ gegeben wird. Die Abbildung $\tilde{\varphi}$ ist also genau dann Isomorphismus, wenn $(\varphi(1)|\varphi(2))$ quadratisch und invertierbar ist.

Kehren wir jetzt zum Gelfandschen Köcher zurück. Die Morphismen in $D^-(\tilde{A}\text{-mod})$ wurden im letzten Kapitel beschrieben. Jetzt können wir Bondarenkos partiell geordnete Menge beschreiben:



Dieses Bild zeigt die Verteilung der Matrizen $H_k(i)$, $k \in \mathbb{Z}$ in horizontale und vertikale Blöcke. Jede dieser Matrizen wird zusätzlich in zwei vertikale Blöcke $H_k(i|1)$ und $H_k(i|2)$ geteilt (diese entsprechen den zwei Komponenten der Einbettung $\mathbf{k} \times \mathbf{k} \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbf{k})$) und horizontale Blöcke entsprechen den unzerlegbaren Objekten der Kategorie $D^-(\tilde{A}\text{-mod})$. Wie im letzten Kapitel haben wir eine partielle Ordnung auf den horizontalen Blöcken der Matrizen $H_\bullet(i)$.

Wir können die folgenden Umformungen mit den Matrizen $H_\bullet(i)$ durchführen:

1. eine beliebige Spaltentransformation innerhalb eines vertikalen Blockes $H_k(i|1)$ und $H_k(i|2)$.
2. eine beliebige simultane Zeilentransformation innerhalb konjugierter horizontalen Blöcke.
3. Wir können unabhängig ein Vielfaches jeder Zeile mit kleinerem Gewicht zu einer Zeile mit größerem Gewicht hinzuaddieren.

Dieses Matrixproblem gehört zum Typ “Darstellungen von Halbkettenbündeln”, siehe [5].

KOROLLAR 4.2. *Damit haben wir gezeigt, daß die abgeleitete Kategorie von Harish-Chandra Moduln über $SL_2(\mathbb{R})$ zahm ist (siehe [27]).*

5. Matrixproblem für eine allgemeine nodale Algebra

In diesem Kapitel wollen wir Bondarenkos partiell geordnete Menge für eine allgemeine nodale Algebra beschreiben.

Sei A eine nodale Algebra. Nehmen wir an, daß sie basic ist. Sei $\tilde{A} = \text{End}_A(\text{rad}(A))$. Wir haben 3 Typen einfacher A -Moduln (siehe [21]):

1. die einfachen linken A -Moduln U , sodaß $l_A(\tilde{A} \otimes_A U) = 1$,
2. diejenigen, für die $l_A(\tilde{A} \otimes_A U) = 2$ und $l_{\tilde{A}}(\tilde{A} \otimes_A U) = 2$ gilt,
3. und schließlich Moduln mit der Eigenschaft $l_A(\tilde{A} \otimes_A U) = 2$ und $l_{\tilde{A}}(\tilde{A} \otimes_A U) = 1$.

Aus der Definition nodaler Algebren folgt, daß A und \tilde{A} das gleiche Radikal haben: $R = \text{rad}(A) = \text{rad}(\tilde{A})$. Damit haben wir eine Einbettung der halbeinfachen Algebren $A/R \rightarrow \tilde{A}/R$. Die Algebra A ist basic und der Körper \mathbf{k} ist algebraisch abgeschlossen. Nach dem Satz von Wedderburn-Artin ist A/R zum Produkt von \mathbf{k} isomorph [20].

Die obigen Bedingungen 1-3 implizieren, daß jede Komponente von \tilde{A}/R entweder zu \mathbf{k} oder zu $M_2(\mathbf{k})$ isomorph ist. Es gibt eine kanonische Bijektion zwischen den Komponenten einer Algebra modulo ihrem Radikal und einfachen Moduln über dieser Algebra. Wir haben drei Typen einfacher A -Moduln. Die kanonische Abbildung $A/R \rightarrow \tilde{A}/R$ sieht dabei folgendermaßen aus:

1. Eine einfache Komponente von A/R wird auf eine einfache Komponente von \tilde{A}/R abgebildet.
2. Eine einfache Komponente von A/R wird diagonal in das Produkt zweier einfacher Komponenten von \tilde{A}/R abgebildet, wobei die beiden zum \mathbf{k} isomorph sind.
3. Das Produkt zweier einfacher Komponente von A/R wird isomorph auf die Diagonalunteralgebra einer einfachen Komponente vom Typ $M_2(\mathbf{k})$ abgebildet.

Sei I das vom Radikal und von den Idempotenten des ersten Typs erzeugte Ideal in \tilde{A} . Dann ist I auch ein Ideal in A . Darüber hinaus sind die Faktoralgebren A/I und \tilde{A}/I halbeinfach. Deswegen sind die Bedingungen des Hauptsatzes erfüllt.

Sei $\tilde{A} = \prod_{n=1}^N \tilde{A}_n$, wobei alle A_n erbliche Ordnungen sind, und sei $C(\tilde{A}_n)$ die basic Algebra, die der \tilde{A}_n entspricht. Eine erbliche Ordnung über der Pfadalgebra eines Zyklus $C(d_n)$ isomorph. Führen wir eine Markierung der Knoten aller Zykeln $C(\tilde{A}_n)$ ein. Es wäre günstig die Knoten von $C(\tilde{A}_n)$ mit den Restklassen $[1], [2], \dots, [d_n]$ von $\mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$ zu markieren. Jeder einfache \tilde{A} -Modul U entspricht einem Paar (n, ν) , wobei $n \in 1, \dots, N, \nu \in \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$ ist. Die Zahl n bezeichnet die Nummer derjenigen Komponente von \tilde{A}_n , die nicht trivial auf U wirkt, ν ist die Nummer des Vertizes des Zyklus $C(\tilde{A}_n)$, die dem Modul U entspricht.

Bevor wir mit der Kategorie TC_A beginnen, müssen wir die Morphismen der abgeleiteten Kategorie $D^-(\tilde{A}\text{-mod})$ beschreiben. Es genügt die Morphismen in $D^-(C(\tilde{A}_n)\text{-mod})$ für $n \in \{1, \dots, N\}$ zu betrachten.

Sei C ein Zykel der Länge m . Die Kategorie der endlich-erzeugten linken C -Moduln ist erblich. Dann hat jedes unzerlegbare Objekt von $D^-(C\text{-mod})$ die Gestalt $0 \rightarrow M \rightarrow 0$, wobei M ein unzerlegbarer C -Modul ist. Darüber hinaus ist M entweder projektiv oder hat eine projektive Auflösung der Gestalt $P \xrightarrow{w} Q$, wobei P und Q unzerlegbare projektive C -Moduln sind und w durch einen Faden in C gegeben wird [22].

Diejenigen Morphismen von A -Moduln, die modulo des Radikals nicht verschwinden, haben die folgende Gestalt (siehe [22]):

$$\begin{array}{ccccccc}
P_{\nu+1} & \xrightarrow{w_1} & P_{\nu} & & P_{\nu} & \xrightarrow{u_1} & P_{\nu-1} \\
c_{\nu+1} \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow c_{\nu-1} \\
P_{\nu+2} & \xrightarrow{w_2} & P_{\nu} & & P_{\nu} & \xrightarrow{u_2} & P_{\nu-2} \\
c_{\nu+2} \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow c_{\nu-2} \\
P_{\nu+3} & \xrightarrow{w_3} & P_{\nu} & & P_{\nu} & \xrightarrow{u_3} & P_{\nu-3} \\
c_{\nu+3} \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow c_{\nu-3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots,
\end{array}$$

wobei die Abbildung $c_{\nu+i} : P_{\nu+i+1} \longrightarrow P_{\nu+i}$ durch einen Pfeil aus dem Eck $\nu + i$ nach $\nu + i + 1$ gegeben wird. Dazu haben wir noch Morphismen in der Abgeleiteten Kategorie, die den Ext-Gruppen entsprechen:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & Q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Wir konstruieren nun eine partiell geordnete Menge, die das Matrixproblem für die Kategorie der Tripel TC_A für eine gegebene nodale Algebra A beschreibt.

Sei $C(\tilde{A}_n)$ die Basisalgebra (sie ist ein Zykel), die \tilde{A}_n entspricht. Betrachte einen Komplex

$$(P_{\nu+l(w)} \xrightarrow{w} P_{\nu})[f],$$

wobei $\nu \in \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$ ist. w ist ein Morphismus projektiver Moduln, der durch den Faden w gegeben wird. $l(w)$ bezeichnet die Länge des Fadens w und $f \in \mathbb{Z}$ ist ein Shift der Komplexe.

Sei $\mathbf{J}(C(\tilde{A}_n))$ das Ideal in $(C(\tilde{A}_n))$, das von Idempotenten des zweiten und des dritten Typs erzeugt wird; seien $\nu, \nu + l(w) \in \mathbf{J}(C(\tilde{A}_n))$. Dann ordnen wir diesem Komplex zwei Symbole $\alpha(n, \nu, l(w), f)$ und $\beta(n, \nu + l(w), l(w), f + 1)$ zu. Im Fall, wenn nur ν (entsprechend nur $\nu + l(w)$ oder keiner von beiden) zu $\mathbf{J}(C(\tilde{A}_n))$ gehört, wird diesem Komplex nur $\alpha(n, \nu, l(w), f)$ (entsprechend nur $\beta(n, \nu + l(w), l(w), f + 1)$ oder kein Symbol) zugeordnet. Das Symbol $\rho(n, \nu, f)$ entspricht dem Objekt

$$(0 \longrightarrow P_{\nu} \longrightarrow 0)[f].$$

Es reicht natürlich die Komplexe modulo Shifts zu beschreiben. Dabei nehmen wir an, daß der erste Term $\tilde{\mathcal{P}}_0$ des Komplexes $\tilde{\mathcal{P}}_{\bullet}$ ungleich Null ist.

Nun sind wir bereit unsere partiell geordnete Menge einzuführen.

DEFINITION 5.1. *Wir führen Bondarenkos partiell geordnete Menge in folgenden Schritten ein.*

1. Sei $1 \leq n \leq N$, $\nu \in \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbf{J}(C(\tilde{A}_n))$.

$$\mathbf{E}_{\nu}^{(f)}(n) = \{\alpha(n, \nu, i, f), \beta(n, \nu, i, f) | i \geq 0\} \cup \{\rho(n, \nu, f)\}, f \in \mathbb{Z}.$$

2.

$$\mathbf{E}_{\nu}(n) = \bigcup_{f \in \mathbb{Z}} \mathbf{E}_{\nu}^{(f)}(n)$$

$$\mathbf{E}(n) = \bigcup_{\nu \in \mathbf{J}(\tilde{A}_n)} \mathbf{E}_\nu(n)$$

$$\mathbf{E} = \bigcup_{n=1}^N \mathbf{E}(n)$$

3. Dann führen wir eine Äquivalenzrelation auf der partiell geordneten Menge \mathbf{E} ein.

(a) Setze zuerst

$$\alpha(n, \nu, i_1, f) \geq \alpha(n, \nu, i_2, f), \beta(n, \nu, i_1, f) \leq \beta(n, \nu, i_2, f)$$

für $i_1 \geq i_2$.

(b) Dann setze

$$\alpha(n, \nu, i, f) \geq \rho(n, \nu, f) \geq \beta(n, \nu, j, f)$$

für all $i, j \geq 1, f \in \mathbb{Z}$.

(c) Wenn $i \in \mathbb{N}$ und $\nu \in \mathbf{J}(C(\tilde{A}_n))$ mit $i + \nu \in \mathbf{J}(C(\tilde{A}_n))$, dann setze

$$\alpha(n, \nu, i, f) \sim \beta(n, \nu + i, i, f + 1), f \in \mathbb{Z}.$$

4. Sei $1 \leq n \leq N, \nu \in \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}, \nu \in \mathbf{J}(C(\tilde{A}_n))$. Die Menge $\mathbf{F}(n, \nu, f), f \in \mathbb{Z}$ besteht entweder aus einem oder aus zwei Elementen.

(a) Sei U ein einfacher Modul vom zweiten Typ, $(n, \nu), (m, \mu)$ die entsprechenden einfachen \tilde{A} -Moduln, dann gilt $\mathbf{F}(n, \nu, f) = \{g(n, \nu, f)\}$ und $\mathbf{F}(m, \mu, f) = \{g(m, \mu, f)\}$ (die Mengen bestehen aus einem Element). Darüber hinaus gilt $g(n, \nu, f) \sim g(m, \mu, f)$.

(b) Sei U ein A -Modul vom dritten Typ, (n, ν) entspreche dem $B \otimes_A U$, dann gilt $\mathbf{F}(n, \nu, f) = \{g'(n, \nu, f), g''(n, \nu, f)\}$.

Machen wir jetzt ein paar Bemerkungen. Uns interessieren nur von rechts beschränkten Darstellungen der konstruierten Halbketten (da uns die abgeleitete Kategorie von rechts beschränkten Komplexe interessiert). Die Bedingung der Nichtentartetheit aus der Definition der Kategorie der Tripel liefert gewisse Einschränkungen an unsere Matrizen. Sie sind aber nur für diskrete Serien wichtig, weil sie für reguläre Serien automatisch erfüllt sind (siehe [5]).

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

THEOREM 5.2. Sei A ein nodale Algebra, R ihr Radikal, $\tilde{A} = \text{End}_A(R) = \prod_{n=1}^N \tilde{A}_n$.

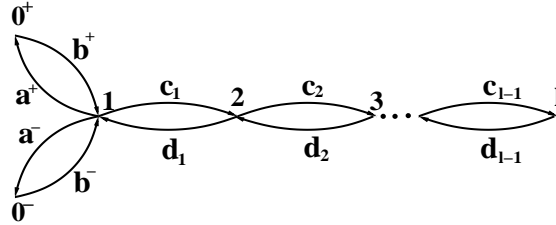
Es gibt eine Darstellungsäquivalenz zwischen den $D^-(A\text{-mod})$ und TC_A . Dabei ist die abgeleitete Kategorie von Darstellungen einer nodalen Algebra zahm.

6. Abgeleitete Kategorien und Harish-Chandra Moduln

In [33] wurde bewiesen, daß es genau zwei kompakte Lie Gruppen gibt, bei denen die Kategorie von Harish-Chandra Moduln zahm ist, nämlich $SL_2(\mathbb{R})$ und $SO(1, n)$. Als Korollar aus unserer Konstruktion erhalten wir, daß die abgeleiteten Kategorien von Harish-Chandra Moduln in beiden Fällen auch zahm sind. Dies haben wir bereits für $SL_2(\mathbb{R})$ gesehen.

Sei $SO_0(1, n)$ die Zusammenhangskomponente von $SO(1, n)$, die das Einselement enthält.

1. Für gerade n (etwa $n = 2l$) ist die Kategorie der Harish-Chandra Moduln über $SO_0(1, n)$ im singulären Punkt zur Kategorie endlich dimensionaler Darstellungen der Komplettierung der Pfadalgebra des folgenden Köchers äquivalent: (siehe [33]):



wobei

$$\gamma = b^+ a^+ = b^- a^-$$

ist, und γ nilpotent und

$$a^\pm d_1 = 0, \quad c_1 b^\pm = 0,$$

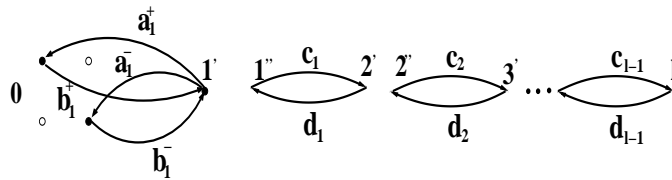
$$c_{i+1} c_i = 0, \quad d_i d_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, l-2.$$

Darüber hinaus sind alle

$$\vartheta_i = d_i c_i, \quad i = 1, \dots, l-1$$

nilpotent.

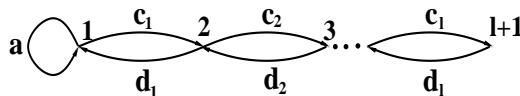
Diese Algebra läßt sich in die folgende Algebra einbetten



(Diese ist die Endomorphismenalgebra des Radikals von A . Das ist aber nicht so wichtig für uns.)

Der einfache A -Modul, der der Ecke $l+1$ entspricht, ist ein einfacher Modul vom ersten Typ. Die Moduln mit den Nummern $1, 2, \dots, l-1$ gehören zum zweiten Typ und 0^\pm zum dritten Typ.

2. Für ungerade n (etwa $n = 2l+1$) ist die Kategorie der Harish-Chandra Moduln über $SO_0(1, n)$ der Kategorie endlich dimensionaler Darstellungen der Komplettierung der Pfadalgebra des folgenden Köchers äquivalent:



Die Relationen sind

$$ad_1 = 0, \quad c_1a = 0,$$

$$d_1a = 0, \quad ac_1 = 0,$$

wobeu a nilpotent ist, sowie

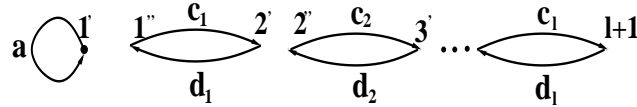
$$c_{i+1}c_i = 0, \quad d_i d_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, l - 1,$$

und alle

$$\vartheta_i = d_i c_i, \quad i = 1, \dots, l$$

sind nilpotent.

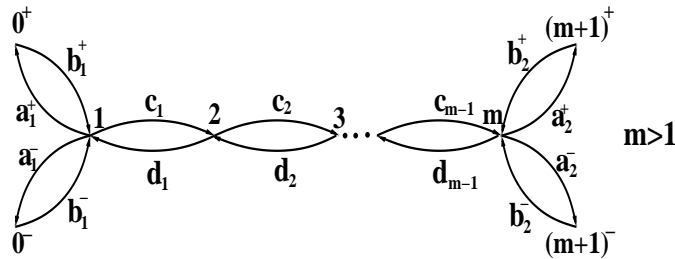
Sie läßt sich in die Algebra



einbetten. Der einfache Modul mit der Nummer l gehört zum ersten Typ, alle anderen sind vom zweiten Typ.

Wir betrachten nun noch einige Beispiele.

BEISPIEL 6.1. Man betrachte die Komplettierung der Pfadalgebra des folgenden Köchers:



Die Relationen sind

$$b_i^+ a_i^+ = b_i^- a_i^-, \quad i = 1, 2,$$

$$a_i^{\sigma_1} b_i^{\sigma_2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \{-, +\},$$

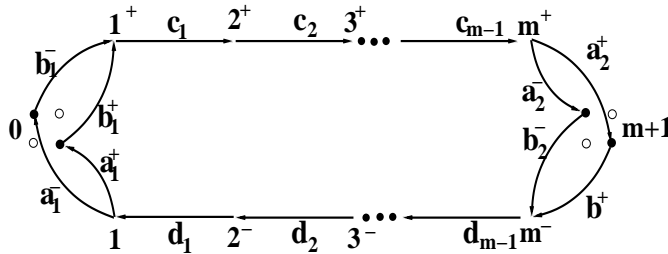
$$c_i d_i = 0, \quad d_i c_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m - 1$$

und

$$\gamma = b_2^+ a_2^+ c_{m-1} c_{m-2} \dots c_1 b_1^+ a_1^+ d_1 d_2 \dots d_{m-1}$$

ist nilpotent.

Diese Algebra läßt sich in die folgende Algebra einbetten:

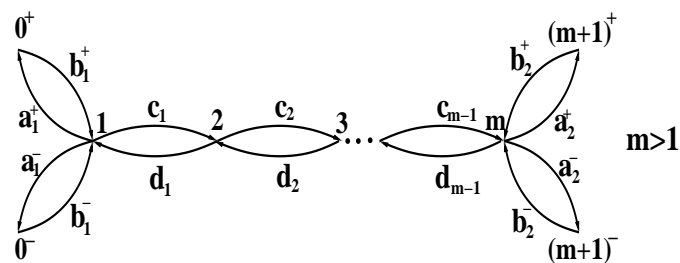


Die einfachen A -Moduln mit den Nummern $1, 2, \dots, m$ sind vom zweiten Typ, und 0^\pm , sowie $(m + 1)^\pm$ sind vom dritten Typ.

Aus der obigen Konstruktion folgt

KOROLLAR 6.2. Die abgeleitete Kategorie von Harish-Chandra Moduln über $SO(1, n)$ ist zahm.

BEISPIEL 6.3. Man betrachte die Komplettierung der Pfadalgebra des folgenden Köchers:



Die Relationen sind:

$$\gamma_i = b_i^+ a_i^+ = b_i^- a_i^-, \quad i = 1, 2,$$

mit γ_1 und γ_2 nilpotent, und

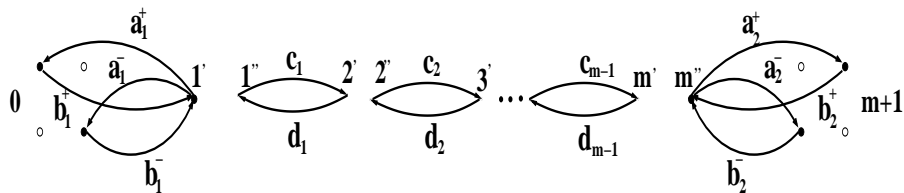
$$\begin{aligned} a_1^\pm d_1 &= 0, c_1 b_1^\pm = 0, \\ a_2^\pm c_{m-1} &= 0, d_{m-1} b_2^\pm = 0, \\ c_{i+1} c_i &= 0, d_i d_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, m - 2. \end{aligned}$$

Darüber hinaus sind auch alle

$$\vartheta_i = d_i c_i, \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

nilpotent.

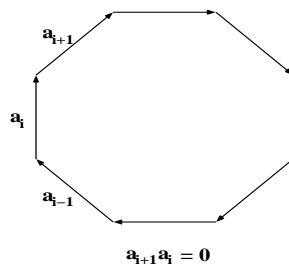
Diese Algebra läßt sich in die Algebra



einbetten. Die einfachen A -Moduln mit den Nummern $1, 2, \dots, m$ sind vom zweiten Typ, $0^\pm, (m+1)^\pm$ sind vom dritten Typ.

7. Abgeleitete Kategorien von Algebren mit $\text{rad}^2 = 0$

Sei A eine \mathbf{k} -Algebra mit $\text{rad}^2(A) = 0$. Wir nehmen an, daß A die Pfadalgebra eines Köchers ist. Dann ist die Verknüpfung je zweier Pfeile Null und wir können somit A in eine erbliche Algebra \tilde{A} einbetten: \tilde{A} ist einfach die disjunkte Vereinigung aller Pfeile von A . Betrachten wir ein einfaches Beispiel, das unsere Methode illustriert.



Dann hat die Pfadalgebra dieses Köchers eine Einbettung in $\tilde{A} = \prod_{i=1}^n A_i$, wobei A_i die Pfadalgebra des Köchers $\bullet \rightarrow \bullet$ ist. Es gibt drei unzerlegbare Objekte in $A_i - \text{mod}$: $(1 \rightarrow 0)$, $(0 \rightarrow 1)$, $(1 \rightarrow 1)$. Die letzten zwei sind projektive Moduln P_2 und P_1 , und das erste hat eine Auflösung $P_2 \rightarrow P_1$.

Man bekommt leicht das entsprechende Matrixproblem. Es gibt keine stetige Serien in diesem Fall. Darüber hinaus haben unzerlegbare Komplexe eine einfache Gestalt. Betrachten wir $P_2 \rightarrow P_1$. Er kann von links entweder mit $(Q_2 \rightarrow Q_1)[-1]$ oder mit Q_2 verklebt werden. Im Fall des Verklebens von $P_2 \rightarrow P_1$ mit $(Q_2 \rightarrow Q_1)[-1]$ setzen wir das Verkleben fort. Im Fall des Verklebens des Komplexes $P_2 \rightarrow P_1$ mit $Q_2[-1]$ bricht der Prozeß ab. Sei R_i der projektive A -Modul, der dem Knoten i entspricht. Ein unzerlegbarer Komplex hat dann die Gestalt

$$\dots \rightarrow R_{i+1} \xrightarrow{a_{i+1}} R_i \xrightarrow{a_i} R_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow 0.$$

8. Darstellungen von $A - D - E$ und $\tilde{A} - \tilde{D} - \tilde{E}$ Köchern

Bevor wir mit komplizierteren abgeleiteten Kategorien beginnen, betrachten wir zuerst die Darstellungstheorie von erblichen Algebren von endlichem und zahmem Darstellungstyp (siehe [46] als eine allgemeine Referenz).

Sei Γ ein Köcher vom Typ $A - D - E$ und $Q(\underline{x})$ die entsprechende quadratische Form. Die Form $Q(\underline{x})$ wird folgendermaßen definiert. Sei I die Menge aller Knoten von Γ und E die Menge aller Pfeile. Damit setzt man

$$Q(\underline{x}) := \sum_{i \in I} x_i^2 - \sum_{(i \rightarrow j) \in E} x_i x_j.$$

Dann ist $Q(\underline{x})$ positiv definit. Die Vektoren \underline{x} mit $Q(\underline{x}) = 1$ heißen Wurzeln der quadratischen Form. Zum Beispiel ist $(1, 0, 0, \dots, 0)$ eine Wurzel von Q .

Nach dem klassischen Satz von Gabriel und Gelfand-Ponomarev gibt es eine Bijektion zwischen den unzerlegbaren Darstellungen eines $A - D - E$ -Köchers und den Wurzeln der quadratischen Form Q . Dabei ist eine unzerlegbare Darstellung durch ihren Dimensionsvektor eindeutig definiert.

Sei nun Γ ein Köcher vom Typ $\tilde{A} - \tilde{D} - \tilde{E}$. Jetzt ist $Q(\underline{x}) \geq 0$. Die Vektore \underline{x} mit $Q(\underline{x}) = 1$ heißen *reelle* Wurzeln der quadratischen Form. Die Vektoren \underline{x} mit $Q(\underline{x}) = 0$ heißen *imaginäre* Wurzeln.

THEOREM 8.1. *Sei \underline{x} eine reelle Wurzel der quadratischen Form $Q(\underline{x})$. Dann gibt es genau eine unzerlegbare Darstellung mit diesem Dimensionsvektor.*

DEFINITION 8.2. *Sei A eine endlich dimensionale assoziative \mathbf{k} -Algebra, M, N unzerlegbare Moduln. Eine Sequenz*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} K \xrightarrow{v} N \longrightarrow 0$$

heißt Auslander-Reiten-Sequenz, wenn sie nicht spaltet und es für jeden nicht spaltenden Epimorphismus $f : X \longrightarrow N$ einen Morphismus $g : X \longrightarrow K$ gibt, so daß $vg = f$ ist.

LEMMA 8.3. *Sei*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} K \xrightarrow{v} N \longrightarrow 0$$

eine Auslander-Reiten-Sequenz. Dann existiert für jeden nicht spaltenden Monomorphismus $f' : M \longrightarrow Y'$ ein Morphismus $g' : K \longrightarrow Y'$, so daß $g'u = f'$ ist.

DEFINITION 8.4. *Sei*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} K \xrightarrow{v} N \longrightarrow 0$$

eine Auslander-Reiten-Sequenz. Dann definiert man $N := \tau^{-1}(M)$. Die Tatsache, daß die Operation τ wohldefiniert ist, folgt aus dem nächsten Satz.

THEOREM 8.5. *Sei A eine endlich dimensionale assoziative \mathbf{k} -Algebra.*

1. *Sei N ein nicht projektiver unzerlegbarer A -Modul. Dann gibt es genau eine Auslander-Reiten-Sequenz*

$$0 \longrightarrow \tau(N) \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

2. *Sei M ein nicht injektiver unzerlegbarer A -Modul. Dann gibt es genau eine Auslander-Reiten-Sequenz*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow K \longrightarrow \tau^{-1}(M) \longrightarrow 0.$$

Sei A eine erbliche endlich-dimensionale \mathbf{k} -Algebra. Es sei $A^* := \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A, \mathbf{k})$. Offensichtlich gilt $(A^*)^* = A$. Durch $D(M)$ wird der Funktor $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(M, \mathbf{k}) : A\text{-mod} \longrightarrow A^*\text{-mod}$ definiert. Sei M ein unzerlegbarer und nicht projektiver A -Modul,

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

seine minimale projektive Auflösung. Wende den Funktor $\vee = \text{Hom}_A(, A)$ an. Man erhält eine exakte Sequenz

$$P_0^\vee \longrightarrow P_1^\vee \longrightarrow \text{tr}(M) \longrightarrow 0.$$

Der Modul $\text{tr}(M)$ ist ein Rechtsmodul über A und damit ein Linksmodule über A^* . Es gilt: $\tau(M) = D \circ \text{tr}(M)$.

DEFINITION 8.6. Sei A eine endlich dimensionale assoziative \mathbf{k} -Algebra, sowie M und N zwei unzerlegbare A -Moduln. Ein Morphismus $f : M \longrightarrow N$ heißt irreduzibel, wenn er nicht Verknüpfung eines nicht spaltenden Epimorphismus $g : X \longrightarrow N$ und eines nicht spaltenden Monomorphismus $f' : M \longrightarrow X$ ist.

THEOREM 8.7. Sei A eine endlich dimensionale assoziative \mathbf{k} -Algebra, M und N zwei unzerlegbare A -Moduln und $f : M \longrightarrow N$ ein irreduzibler Morphismus. Betrachten wir die Auslander-Reiten-Sequenz

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\oplus f_i} \bigoplus_{i=1}^n X_i \longrightarrow \tau^{-1}(M) \longrightarrow 0.$$

Dann gibt es ein i , $n \geq i \geq 1$, so daß $X_i \cong N$ und $f = f_i$ bis auf Automorphismen von M oder N .

Damit beschreiben die Auslander-Reiten-Sequenzen Morphismen der Kategorie $A\text{-mod}$.

DEFINITION 8.8. Sei A eine endlich dimensionale assoziative \mathbf{k} -Algebra. Der Auslander-Reiten-Köcher besteht aus folgenden Daten:

1. Knoten sind Isomorphieklassen unzerlegbarer endlich dimensionaler A -Moduln.
2. Pfeile $[M] \longrightarrow [N]$ sind irreduzible Morphismen.

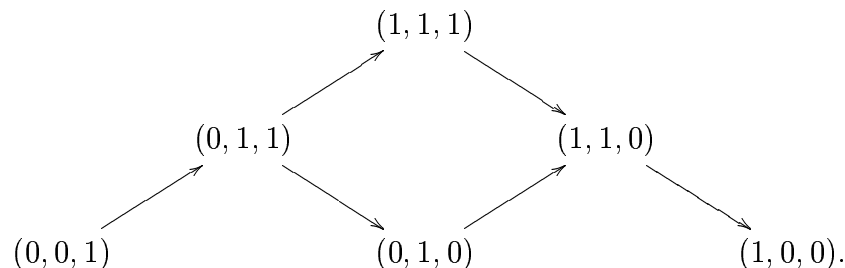
BEISPIEL 8.9. Sei $A = A_2 = \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$. Dann ist die quadratische Form $Q(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$. Die Liste unzerlegbarer Objekte sieht so aus:

$S_1 = I_3 = (1, 0, 0)$, $S_2 = (0, 1, 0)$, $S_3 = P_3 = (0, 0, 1)$, $I_2 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 1, 1)$, $P_1 = I_3 = (1, 1, 1)$. Die Moduln P_i sind in diesem Fall projektiv und die Moduln I_i sind injektiv. Man kann noch prüfen, daß die Liste aller Auslander-Reiten-Sequenzen in diesem Fall

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \oplus S_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow S_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ist.

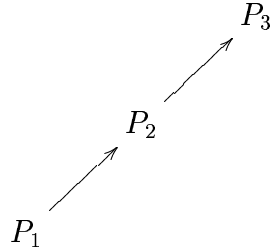
Der Auslander-Reiten-Köcher ist in diesem Fall



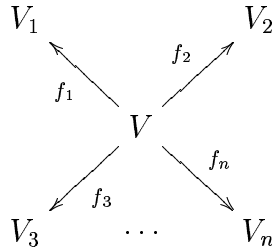
Wie berechnet man den Auslander-Reiten Köcher für ein Dynkin-Diagramm A, D, E ?

ALGORITHMUS 8.10.

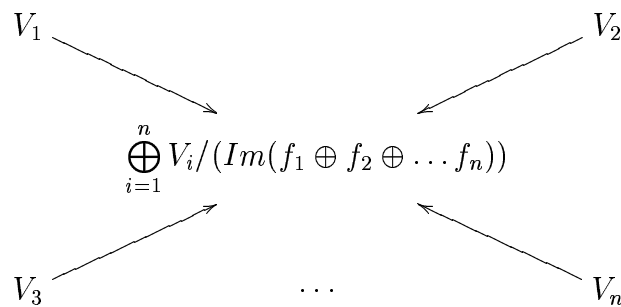
Sei Γ ein Dynkin-Diagramm, I die Menge aller Knoten von Γ . Es seien $P_i, i \in I$ alle unzerlegbaren projektiven Darstellungen vom Γ . Für jeden Pfeil $i \rightarrow j$ hat man einen Morphismus $P_j \rightarrow P_i$. Dieser Morphismus ist irreduzibel. Man schreibt zuerst die Folge projektiver Moduln zusammen mit irreduziblen Morphismen zwischen ihnen. Damit bekommt man den Graph Γ mit invertierten Pfeilen. Im obigen Fall ist es



Dann wendet man Spiegelungen an. Das heißt, daß man einen Knoten V der Form



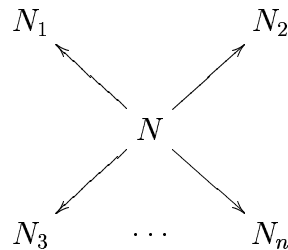
ersetzt durch



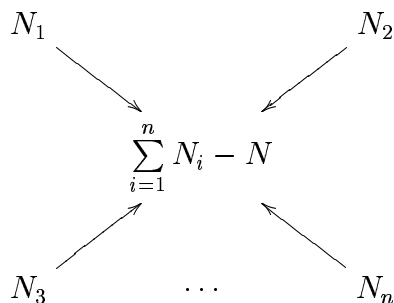
wobei alle Morphismen $V_i \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n V_i / (\text{Im}(f_1 \oplus f_2 \oplus \dots \oplus f_n))$ kanonisch sind.

Nun setzt man dies rekursiv fort. Der Algorithmus terminiert, wenn in allen Knoten genau ein Mal gespiegelt wird.

Wir führen den Algorithmus auf dem Dimensionsvektor:



wird durch



ersetzt. Somit haben wir den $\tau^{-1}(P)$ ausgerechnet. Für jeden weiteren Modul setzen wir den Algorithmus rekursiv weiter fort.

Für jeden Pfeil $M \rightarrow N$ gibt es einen entsprechenden Pfeil $\tau^{-1}(M) \rightarrow \tau^{-1}(N)$ und einen Pfeil $N \rightarrow \tau^{-1}(M)$. Diese Morphismen sind irreduzibel.

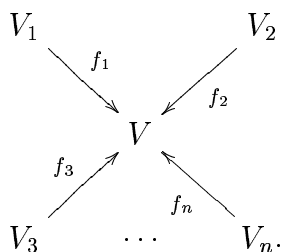
Wenn wir an einer Stelle eine negative Dimension bekommen, dann heißt dies, daß wir einen injektiven Modul erhalten haben. Dieser Modul hat keine Translation τ^{-1} und damit wird der Algorithmus an dieser Stelle abgebrochen.

BEISPIEL 8.11. Betrachten wir wiederum den Köcher $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$ und seine Darstellung $0 \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow 0$. Eine Folge von Spiegelungen sieht folgendermaßen aus:

$$(0 \rightarrow \mathbf{k} \rightarrow 0) \mapsto (\mathbf{k} \leftarrow \mathbf{k} \rightarrow 0) \mapsto (\mathbf{k} \rightarrow 0 \leftarrow 0) \mapsto (\mathbf{k} \rightarrow 0 \rightarrow 0).$$

BEMERKUNG 8.12. Man kann auch mit injektiven Moduln anfangen. Dann wendet man Spiegelungen des zweiten Typs an:

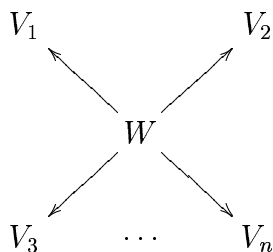
Betrachten wir einen Knoten der Darstellung



und die Abbildung $\bigoplus_{i=1}^n f_i : \bigoplus_{i=1}^n V_i \rightarrow V$. Sei W der Kern dieser Abbildung. Dann hat man Abbildungen

$$W \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n V_i \rightarrow V_i.$$

Man ersetzt das obige Diagramm durch

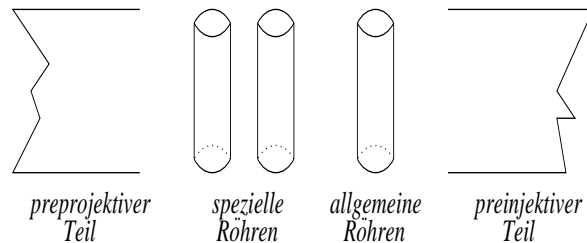


Am Ende bekommt man natürlich denselben Köcher (Auslander-Reiten-Köcher).

THEOREM 8.13. Sei Γ ein Köcher vom Typ $A - D - E$. Dann werden die Morphismen zwischen den unzerlegbaren Darstellungen durch den Auslander-Reiten Köcher beschrieben.

Wie sieht die Situation mit Köchern vom Typ $\tilde{A} - \tilde{D} - \tilde{E}$ aus?

THEOREM 8.14. *Der Auslander-Reiten-Köcher von $\tilde{A} - \tilde{D} - \tilde{E}$ -Köchern hat die folgende Struktur (V.Dlab – C.-M.Ringel, siehe [46]):*



Die präprojektive Serie erhält man aus projektiven Moduln mit Hilfe von Reflektionen des ersten Typs. Die präinjektive Serie bekommt man aus injektiven Moduln mit Hilfe der Reflektionen des zweiten Typs.

Reguläre Röhren bestehen aus Moduln der stetigen Serie. Sei \underline{d} die minimale imaginäre Wurzel der quadratischen Form $Q(x)$ (es gibt eigentlich nur eine, [46]). Dann ist $n\underline{d}$ für $n \in \mathbb{N}$ auch eine imaginäre Wurzel. Für jedes $\lambda \in \mathbf{k}^*$ gibt es genau einen unzerlegbaren Modul $M_n(\lambda)$. Die Auslander-Reiten-Sequenzen haben die Gestalt

$$0 \longrightarrow M_n(\lambda) \longrightarrow M_{n-1}(\lambda) \oplus M_{n+1}(\lambda) \longrightarrow M_n(\lambda) \longrightarrow 0.$$

Die Komponente des Auslander-Reiten-Köchers, die $M_n(\lambda)$ mit einem festen λ enthält, hat die Gestalt eines Rohres. Daher kommt die Terminologie.

Es gibt auch Moduln mit dem Dimensionsvektor \underline{d} , die zu keiner regulären Röhre gehören. Sie und gewisse reelle Wurzeln gehören zu den speziellen Röhren. Im Fall von \tilde{A} -Köchern gibt es zwei spezielle Röhren und im Fall \tilde{D} gibt es drei spezielle Röhren. Mehr Details findet man in [46].

Was kann man in diesem Fall über die Morphismen zwischen unzerlegbaren Objekten sagen? Sie sind leider nicht vollständig durch den Auslander-Reiten-Köcher bestimmt.

THEOREM 8.15. *Sei Γ ein Köcher vom Typ $\tilde{A} - \tilde{D} - \tilde{E}$, $AR(\Gamma)$ der Auslander-Reiten Köcher von Rep_Γ . Dann gilt:*

1. *Es gibt nur Morphismen*

$$\text{präprojektive Moduln} \longrightarrow \text{Röhren} \longrightarrow \text{präinjektive Moduln}$$

Es gibt zum Beispiel keine Morphismen aus einem präinjektiven Moduln in eine Röhre. Jeder Morphismus aus einem präprojektiven Modul in einen präinjektiven Moduln faktorisiert durch jede Röhre.

2. *Endomorphismen von Moduln aus der präinjektiven und aus der präprojektiven Serie sind trivial.*
3. *Endomorphismen von Moduln $M_n(\lambda)$ aus stetigen Röhren werden durch Automorphismen des Jordanschen Blockes $J_n(\lambda)$ gegeben. Dasselbe gilt für die Moduln $M_n(0)$ aus speziellen Röhren.*

DEFINITION 8.16. *Sei A eine assoziative endlich dimensionale \mathbf{k} -Algebra, $\text{ind}(A)$ die volle Unterkategorie der unzerlegbaren A -Moduln von $A - \text{mod}$. $\text{rad}(\text{ind}(A))$ ist ein Ideal in $\text{ind}(A)$, das von allen Nichtisomorphismen erzeugt wird. Das Ideal $\text{rad}^n(\text{ind}(A))$ ist die n -te Potenz von $\text{rad}(\text{ind}(A))$. Man setzt*

$$\text{rad}^\infty(\text{ind}(A)) := \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{rad}^i(\text{ind}(A)).$$

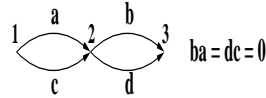
BEISPIEL 8.17. Sei Γ der Kroneckersche Köcher \tilde{A}_1 . Betrachte den projektiven Modul $P_2 = (0, 1)$ und einen Modul aus der stetigen Serie $M_n(\lambda)$. Dann faktorisiert die Abbildung $P_1 \rightarrow M_1(\lambda)$ über jeden Modul $M_n(\lambda)$, $n \geq 1$. Damit gehört sie dem unendlichen Radikal an.

THEOREM 8.18. (siehe [46]) Sei A eine assoziative endlich dimensionale \mathbf{k} -Algebra. Dann bestimmen die Pfeile des Auslander-Reiten-Köchers von $A - \text{mod}$ alle Morphismen von $\text{ind}(A)/\text{rad}^\infty(\text{ind}(A))$. Sei A eine assoziative \mathbf{k} -Algebra vom endlichen Darstellungstyp. Dann ist $\text{rad}^\infty(\text{ind}(A)) = 0$. Dabei werden Morphismen zwischen unzerlegbaren A -Moduln durch den Auslander-Reiten Köcher eindeutig bestimmt.

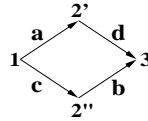
In den nächsten zwei Kapiteln werden wir konkret einige Beispiele ausrechnen.

9. Abgeleitete Kategorien von zarten Algebren

Sei A die Pfadalgebra des folgenden Köchers:



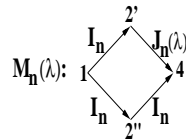
Betrachten wir die Einbettung:



\tilde{P}_i bezeichne den unzerlegbaren projektiven \tilde{A} -Modul, der dem Knoten i entspricht. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{P}_1 &= \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{P}_3 = 0, \\ \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{P}_{2'} &= \mathbf{k}(2'), \tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{P}_{2''} = \mathbf{k}(2''). \end{aligned}$$

Betrachte nun die stetigen Darstellungen des Köchers $\tilde{A} = \tilde{A}_4$:



$M_n(\lambda)$ hat eine projektive Auflösung:

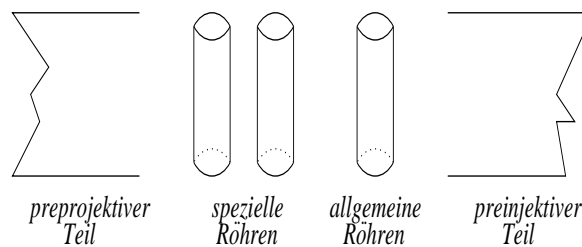
$$0 \longrightarrow \tilde{P}_4^n \longrightarrow \tilde{P}_1^n \longrightarrow M_n(\lambda) \longrightarrow 0.$$

Daraus folgt, daß in $D^-(\tilde{A}/I)$ gilt:

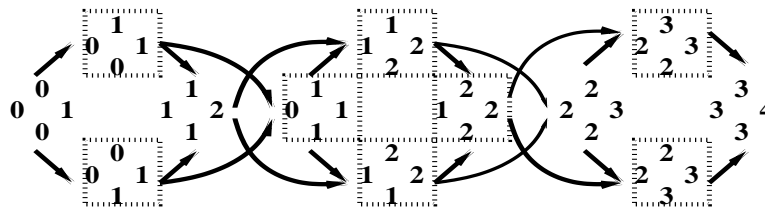
$$\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} M_n(\lambda) = 0.$$

$\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}}$ annulliert stetige Serien von \tilde{A} -Moduln! Es reicht also nur diskrete Serien zu betrachten.

Die Information über die Struktur diskreter Serien eines zahmen Köchers ist im Auslander-Reiten-Köcher (ARK) enthalten. Der ARK hat gemäß [46] die folgende Struktur:

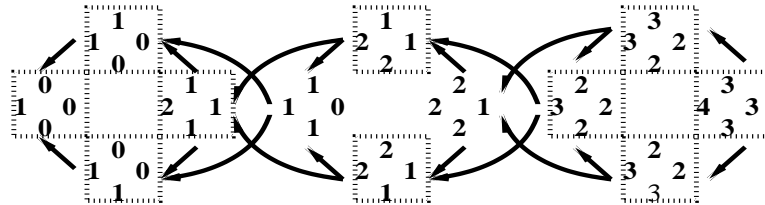


Die präprojektive Serie ist:

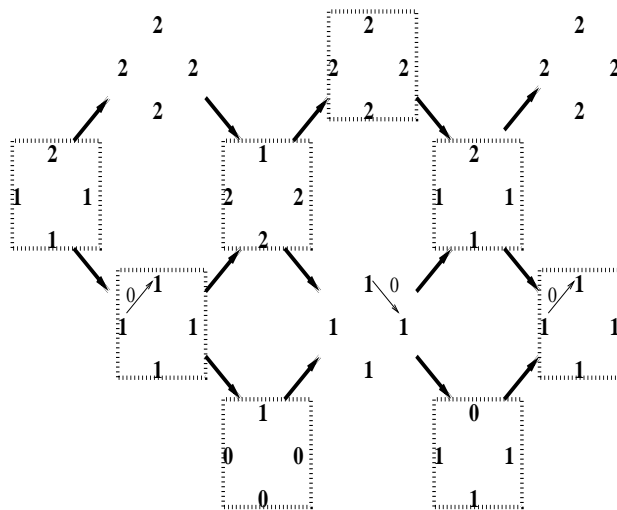


(Die Objekte in den Kästen sind diejenigen, die nach Tensorieren mit $\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}}$ ungleich 0 sind);

Die präinjektive Serie ist



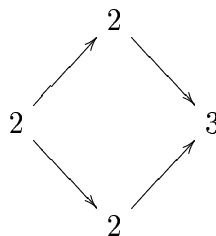
Zwei spezielle Röhren sind



und die symmetrische Röhre.

Man sieht, daß sowohl präprojektive und präinjektive Komponenten als auch spezielle Röhren 2-periodisch sind. Sei M ein präprojektiver Modul mit dem Dimensionsvektor (d_1, d_2, d_3, d_4) . Dann hat $\tau^{-1} \circ \tau^{-1}(M)$ den Dimensionsvektor $(d_1 + 2, d_2 + 2, d_3 + 2, d_4 + 2)$. Dasselbe gilt für einen präinjektiven Modul N aus der präinjektiven Serie und $\tau \circ \tau(N)$. Dasselbe gilt auch, wenn man zwei Stöcke nach oben in einer speziellen Röhre geht.

Betrachte zum Beispiel den Modul X aus der präinjektiven Serie



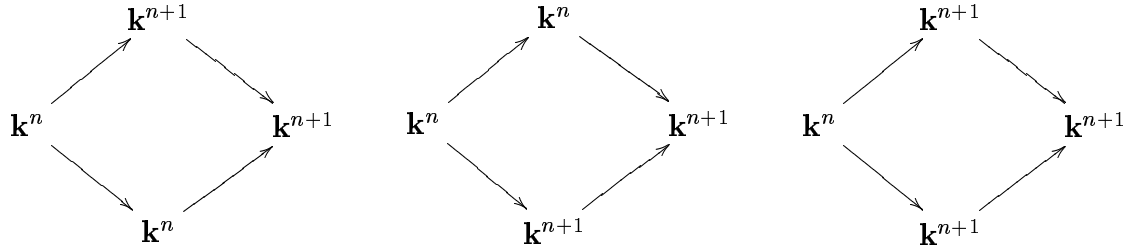
Seine Auflösung ist

$$0 \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_1^2 \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

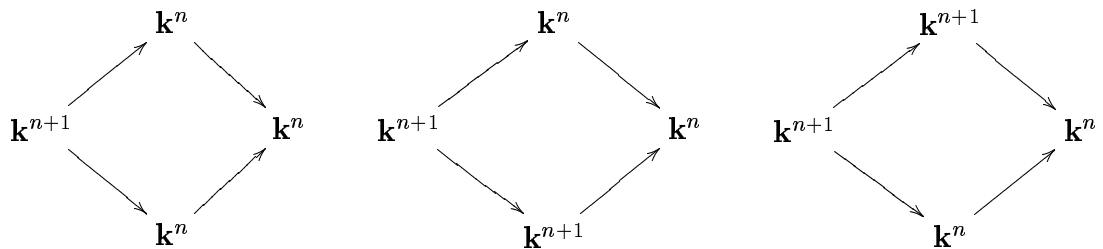
Dies impliziert, daß $\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} X = 0$ ist. Mit anderen Worten ist X für das Matrixproblem irrelevant.

Die Liste der “interessanten” (d.h. für das Matrixproblem interessanten) Darstellungen ist die folgende:

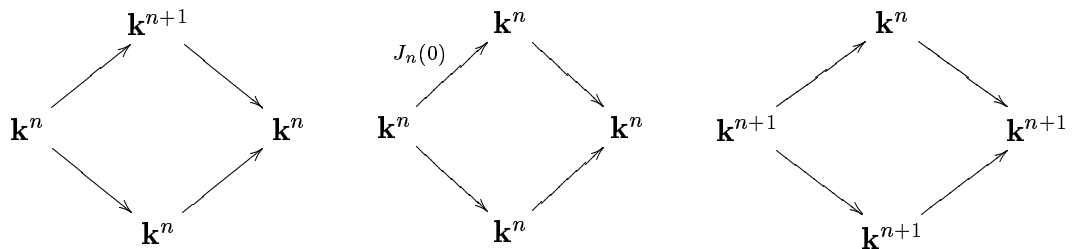
1. Präprojektive Moduln



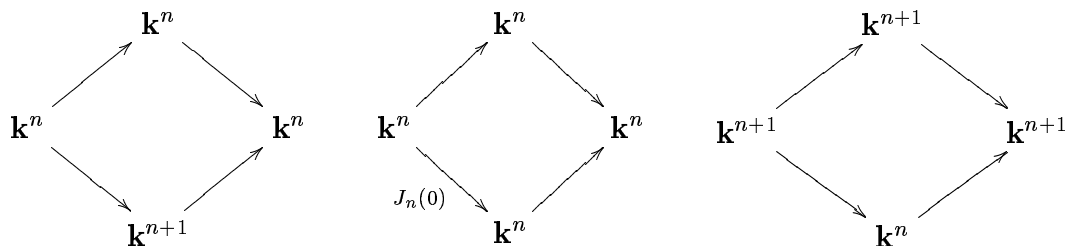
2. Präinjektive Moduln



3. Moduln aus speziellen Röhren



und



Uns interessieren die Bilder dieser Objekte nach Anwenden von $\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}}$. Man betrachte ihre minimale projektive Auflösung und wende dann den Funktor $\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}}$ an. In der obigen Ordnung haben sie die Gestalt:

1. Präprojektive Serie. Aus dem Modul

$$0 \longrightarrow P_4^n \longrightarrow P_1^n \oplus P_2 \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{k}(2) \longrightarrow 0;$$

und aus

$$0 \longrightarrow P_4^n \longrightarrow P_1^n \oplus P_3 \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{k}(3) \longrightarrow 0;$$

und aus

$$0 \longrightarrow P_4^{n+1} \longrightarrow P_1^n \oplus P_2 \oplus P_3 \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{k}(2) \oplus \mathbf{k}(3) \longrightarrow 0.$$

2. Präinjektive Serie. Aus dem Modul

$$0 \longrightarrow P_2 \oplus P_3 \oplus P_4^n \longrightarrow P_1^{n+1} \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow \mathbf{k}(2) \oplus \mathbf{k}(3) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0;$$

aus dem Modul

$$0 \longrightarrow P_2 \oplus P_4^n \longrightarrow P_1^{n+1} \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow \mathbf{k}(2) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0;$$

und aus

$$0 \longrightarrow P_3 \oplus P_4^n \longrightarrow P_1^{n+1} \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow \mathbf{k}(3) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0;$$

3. Betrachte schließlich Moduln aus speziellen Röhren. Aus dem Modul

$$0 \longrightarrow P_4^n \longrightarrow P_1^n \oplus P_2 \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{k}(2) \longrightarrow 0;$$

aus dem Modul

$$0 \longrightarrow P_4^n \oplus P_2 \longrightarrow P_1^n \oplus P_2 \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow \mathbf{k}(2) \xrightarrow{0} \mathbf{k}(2) \longrightarrow 0;$$

und schließlich wird aus

$$0 \longrightarrow P_4^n \oplus P_2 \longrightarrow P_1^{n+1} \longrightarrow 0$$

der Komplex

$$0 \longrightarrow \mathbf{k}(2) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

Für das zweite Rohr ist alles völlig symmetrisch. Aus dem Modul

$$0 \longrightarrow P_4^n \longrightarrow P_1^n \oplus P_3 \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbf{k}(3) \longrightarrow 0;$$

aus dem Modul

$$0 \longrightarrow P_4^n \oplus P_3 \longrightarrow P_1^n \oplus P_3 \longrightarrow 0$$

wird

$$0 \longrightarrow \mathbf{k}(3) \xrightarrow{0} \mathbf{k}(3) \longrightarrow 0;$$

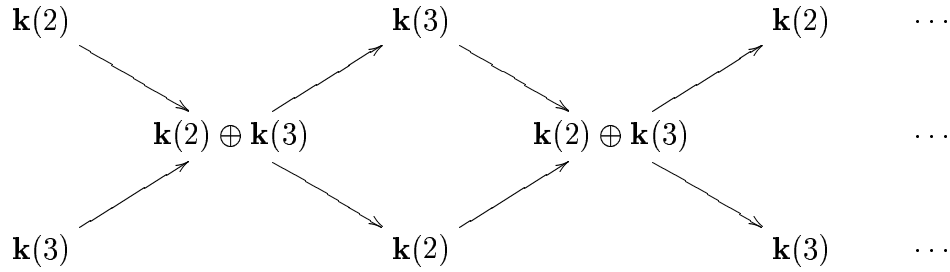
aus dem Modul

$$0 \longrightarrow P_4^n \oplus P_3 \longrightarrow P_1^{n+1} \longrightarrow 0$$

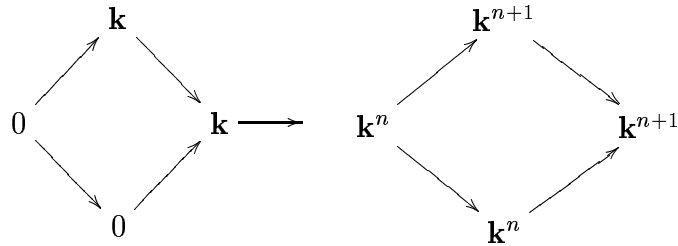
wird

$$0 \longrightarrow \mathbf{k}(3) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0.$$

Was induzieren die Morphismen zwischen diesen Moduln modulo \tilde{A}/I ?
 Betrachte das Bild der präprojektiven Serie nach Anwendung von $\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}}$.

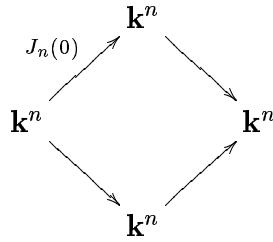


Wir wollen beweisen, daß alle induzierten Morphismen ungleich Null sind. Es ist bekannt, daß Morphismen von präprojektiven Moduln durch den Auslander-Reiten-Köcher eindeutig bestimmt sind. Dabei ist jeder Morhismus eine lineare Kombination der Faden des Auslander-Reiten-Köchers. Man betrachte einen Morphismus



Es ist klar, daß die von $\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}}$ induzierte Abbildung ungleich Null ist. Dann folgt sofort aus dem Bild, daß alle induzierte Abbildungen ungleich Null sind. Mit der präinjektiven Serie verhält das genauso.

Betrachten wir jetzt Moduln aus speziellen Röhren. Der Modul



hat die Auflösung

$$0 \longrightarrow P_4^n \oplus P_2 \longrightarrow P_1^n \oplus P_2 \longrightarrow 0.$$

Dieser Modul ist unzerlegbar, deswegen ist seine Endomorphismenalgebra lokal. Ein Endomorphismus ist also entweder invertierbar oder nilpotent. Ein Isomorphismus induziert eine Abbildung der Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{k}(2) & \longrightarrow & \mathbf{k}(2) \\
 \downarrow \lambda & & \downarrow \lambda \\
 \mathbf{k}(2) & \longrightarrow & \mathbf{k}(2)
 \end{array}$$

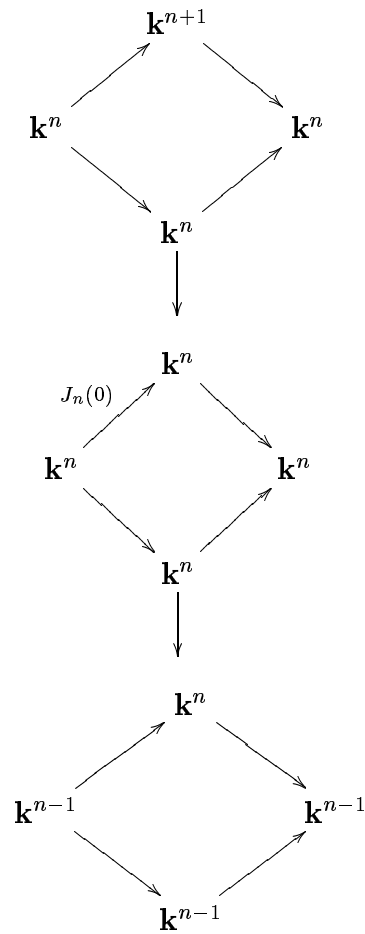
Sei f ein nilpotenter Endomorphismus. Betrachte dann die induzierte Abbildung der Auflösungen f_\bullet :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P_4^n \oplus P_2 & \longrightarrow & P_1^n \oplus P_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \\
 0 & \longrightarrow & P_4^n \oplus P_2 & \longrightarrow & P_1^n \oplus P_2 & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Die Abbildung f_\bullet^n ist nullhomotop. Um dies zu sehen betrachte zunächst die Komponente $f_1^n|_{P_2} : P_2 \longrightarrow P_2$ der Abbildung f_1^n . $f_1^n|_{P_2}$ ist Null modulo des Radikals. Daher ist

$f_1^n|_{P_2} = 0$ und somit $f_1|_{P_2} : P_2 \rightarrow P_2$ auch gleich Null. Dasselbe gilt natürlich auch für $f_0|_{P_2} : P_2 \rightarrow P_2$. Nilpotente Endomorphismen induzieren also Null modulo $\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}}$.

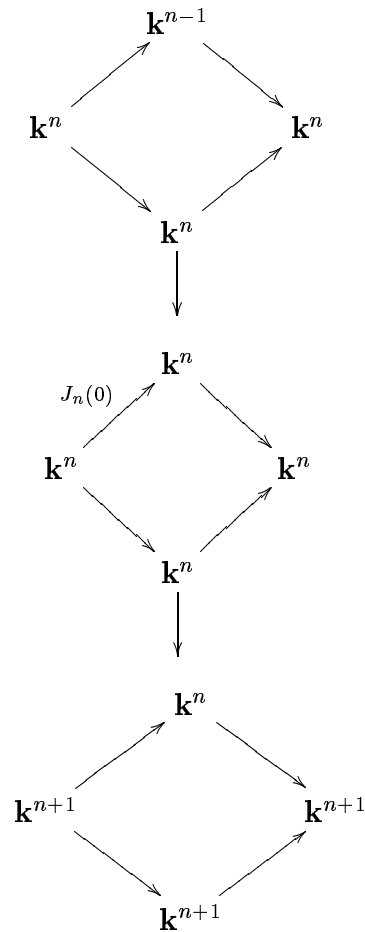
Es bleibt noch Morphismen zwischen den Moduln aus speziellen Röhren zu betrachten. Die Kette der Abbildungen



induziert modulo $\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}}$ die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbf{k}(2) \\
 \downarrow & & \downarrow 1 \\
 \mathbf{k}(2) & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}(2) \\
 \downarrow & & \downarrow 1 \\
 0 & \longrightarrow & \mathbf{k}(2).
 \end{array}$$

Völlig analog induziert die Kette

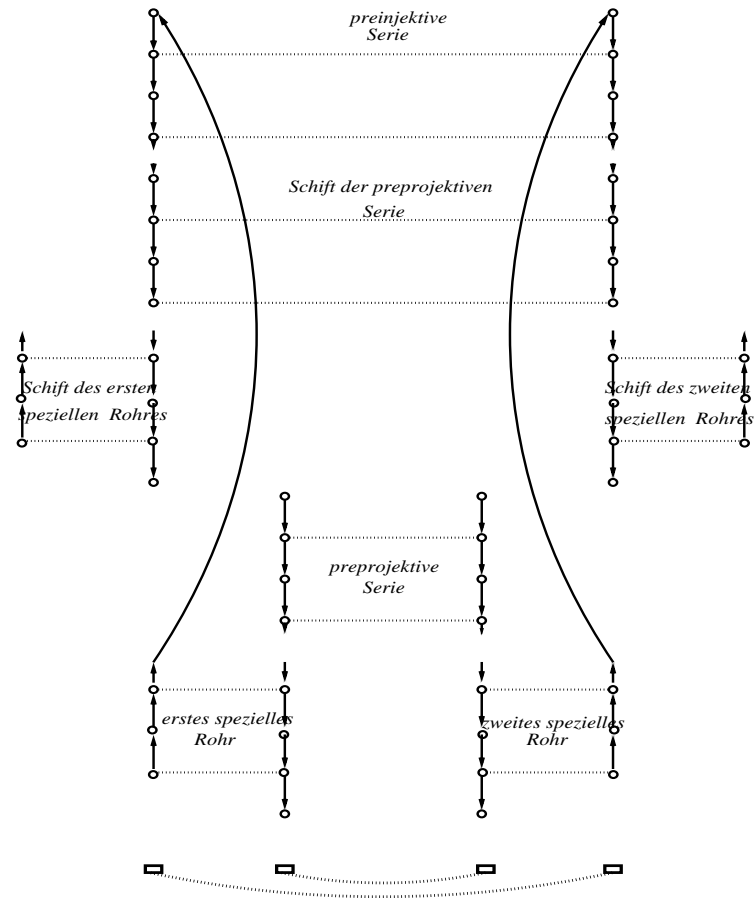


die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{k}(2) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow 1 & & \downarrow \\
 \mathbf{k}(2) & \xrightarrow{0} & \mathbf{k}(2) \\
 \downarrow 1 & & \downarrow \\
 \mathbf{k}(2) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Dasselbe gilt für die symmetrische Röhre. Alle andere Morphismen gehören zum Radikal von $\text{ind}(A)$ und spielen dabei keine Rolle.

Das Matrixproblem, das die abgeleitete Kategorie $D^-(A\text{-mod})$ beschreibt, wird durch die folgende partiell geordnete Menge gegeben:

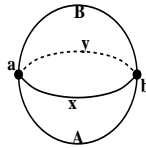


Das ist wiederum ein Matrixproblem vom Typ “Darstellungen von Kettenbünden”.

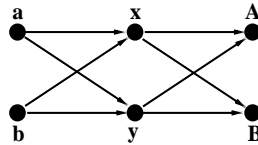
KOROLLAR 9.1. *Sei A eine zarte \mathbf{k} -Algebra (möglicherweise von unendlichen homologischen Dimension). Dann ist die Kategorie $D^-(A\text{-mod})$ zahm.*

10. Konstruierbare Garben und clannische Algebren

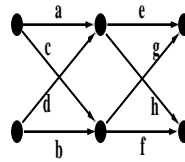
Betrachte die 2-dimensionale Sphäre mit der folgenden Stratifizierung:



Dann haben wir das folgende Inzidenzdiagramm:



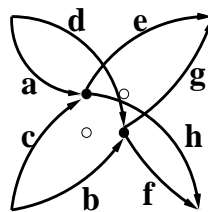
THEOREM 10.1. (siehe [34]). Die abgeleitete Kategorie konstruierbarer Garben auf S^2 bezüglich der obigen Stratifizierung ist zur abgeleiteten Kategorie des Köchers



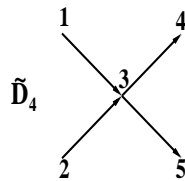
$$ha=fc, ea=gc, ed=gb, hd=fb$$

äquivalent.

Wir können diese Algebra in die Pfadalgebra des Köchers



einbetten, wobei in der Mitte $\text{Mat}_2(\mathbf{k})$ steht. Diese Algebra ist Morita-äquivalent zur Algebra



Sei I durch e_1, e_2, e_4, e_5 erzeugte Ideal, dann gilt $A/I = \mathbf{k} \times \mathbf{k}$, $\tilde{A}/I = \text{Mat}_2(\mathbf{k})$, und $A/I \rightarrow \tilde{A}/I$ ist die Diagonaleinbettung. Offensichtlich gilt $\tilde{A} \otimes_{\tilde{A}/I} \tilde{P}_i = 0$ für $i = 1, 2, 4, 5$. Darstellungen aus der stetigen Serie haben die Auflösung

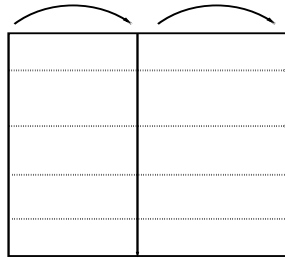
$$0 \rightarrow \tilde{P}_4 \oplus \tilde{P}_5 \rightarrow \tilde{P}_1 \oplus \tilde{P}_2 \rightarrow M_n(\lambda) \rightarrow 0,$$

also ist $\tilde{A} \otimes_{\tilde{A}/I} M_n(\lambda) = 0$. Es reicht also, nur diskrete Serien zu betrachten. Sie sind aber komplizierter, als im vorherigen Fall. Es gibt 17 Serien diskreter Darstellungen!

Betrachte die Abbildung

$$H_k(i) : H_k(\tilde{A}/I \otimes_{A/I} \mathcal{M}_\bullet) \longrightarrow H_k(\tilde{A}/I \otimes_{\tilde{A}} \tilde{\mathcal{P}}_\bullet).$$

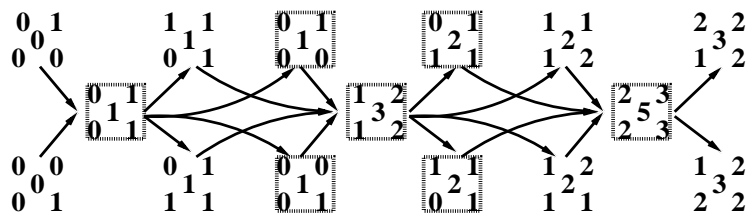
Sie wird durch eine Matrix gegeben.



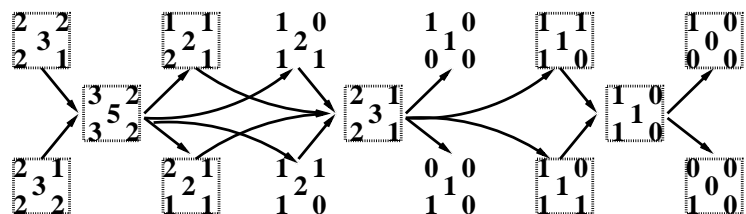
Diese Matrix muß invertierbar sein. Automorphismen von \mathcal{M}_\bullet liefern unabhängige Basiswechsel in jedem vertikalen Block. Es gibt keine gemischte Additionen der Spalten aus einem vertikalen Block in den anderen.

Die Zeilentransformationen werden durch Abbildungen aus dem Auslander-Reiten-Köcher induziert. Es gibt eine präinjektive Serie, eine präprojektive Serie und drei spezielle Röhren. Im wesentlichen geht es genau so, wie im vorherigen Fall der zarten Algebren. Wir lassen deswegen alle technische Details weg.

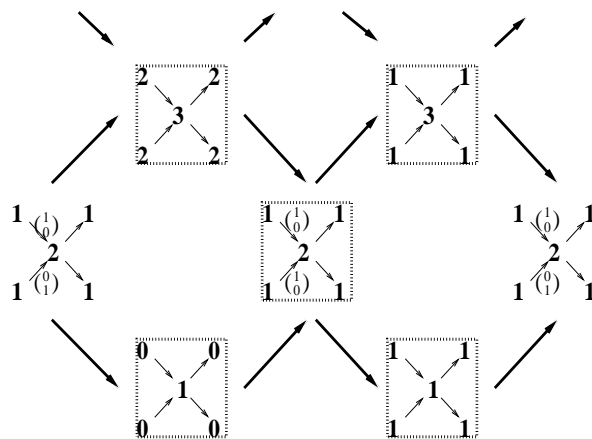
Die präprojektive Serie ist:



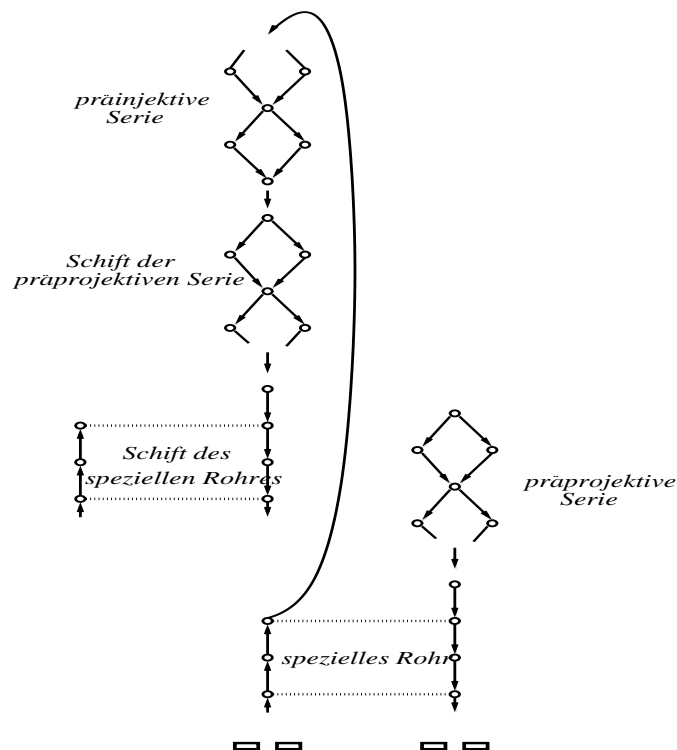
Die präinjektive Serie ist:



Eine spezielle Röhre ist:



Die zwei anderen speziellen Röhren sind für das Matrixproblem irrelevant.
 Unser Matrixproblem wird durch die folgende partiell geordnete Menge gegeben:



KOROLLAR 10.2. Sei A schief-zarte \mathbf{k} -Algebra (möglicherweise von unendlichen homologischen Dimension). Dann ist die Kategorie $D^-(A\text{-mod})$ zahm.

11. Kohärente Garben auf \mathbb{P}^1 und Darstellungen des Kronekerschen Köchers

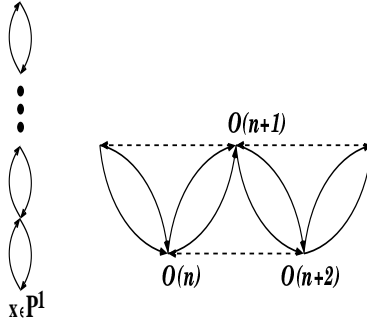
Betrachte die Kategorie kohärenter Garben auf \mathbb{P}^1 . Wir wissen, daß eine unzerlegbare kohärente Garbe entweder ein Geradenbündel oder eine Wolkenkratzergarbe $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n$ ist. Es gibt keine Homomorphismen zwischen Wolkenkratzergarben in verschiedenen Punkten. Es gibt keine Homomorphismen von einer Wolkenkratzergarbe in ein Vektorbündel. Die Auslander-Reiten-Sequenzen haben in diesem Fall die folgende Gestalt:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(n-1) \longrightarrow \mathcal{O}(n) \oplus \mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathcal{O}(n+1) \longrightarrow 0$$

(die Eulersequenzen), und

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n \longrightarrow \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^{n-1} \oplus \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n \longrightarrow 0.$$

Im Bild sieht das wie folgt:



Dies erinnert uns stark an Darstellungen des Kronekerschen Köchers Γ . Eine Darstellung dieses Köchers wird durch ein Paar von Matrizen (A, B) gegeben. $(A, B) \sim (A', B')$, wenn $A' = S^{-1}AT, B' = S^{-1}BT$ ist. Die unzerlegbaren Darstellungen sind im Anhang beschrieben. Wir haben stetige Serien $M_n(\lambda)$, die durch einen stetigen Parameter $\lambda \in \mathbb{P}^1$ und eine ganze Zahl $n \in \mathbb{N}$ gegeben sind, und zwei diskrete Serien: eine präprojektive Serie $P_n, n \geq 1$, und eine präinjektive Serie $Q_n, n \geq 1$. Die Auslander-Reiten-Sequenzen sind in diesem Fall:

1. Röhren

$$0 \longrightarrow M_n(\lambda) \longrightarrow M_{n-1}(\lambda) \oplus M_{n+1}(\lambda) \longrightarrow M_n(\lambda) \longrightarrow 0.$$

2. Präprojektive Serie:

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n+1} \oplus P_{n+1} \longrightarrow P_{n+2} \longrightarrow 0, n \geq 1;$$

$$0 \longrightarrow Q_{n+2} \longrightarrow Q_{n+1} \oplus Q_{n+1} \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0, n \geq 1.$$

Dabei sind die Kategorien $\text{Coh}_{\mathbb{P}^1}$ und Rep_{Γ} nicht äquivalent, weil Rep_{Γ} zwei diskrete Serien enthält und $\text{Coh}_{\mathbb{P}^1}$ nur eine. Sie sind dennoch sehr ähnlich: Objekte aus diskreten Serien haben triviale Endomorphismen und Endomorphismen der Objekte aus stetigen Serien werden durch Endomorphismen eines Jordanschen Blockes entsprechender Größe gegeben. Die Ursache dafür ist, daß die abgeleiteten Kategorien $D^b(\text{Coh}_{\mathbb{P}^1})$ und $D^b(\text{Rep}_{\Gamma})$ äquivalent sind. Das wird plausibel, wenn man die Auslander-Reiten-Köcher beider Kategorien betrachtet.

LEMMA 11.1. (siehe [31]) Sei A eine Algebra der homologischen Dimension 1. Wenn

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} K \longrightarrow 0$$

eine Auslander-Reiten Sequenz in $A\text{-mod}$ ist und w das entsprechende Element in $\text{Ext}^1(K, M)$, dann ist

$$M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} K \xrightarrow{w} M[1]$$

eine Auslander-Reiten Sequenz in $D^b(A\text{-mod})$.

So erhalten wir alle Auslander-Reiten-Sequenzen der stetigen Serien der abgeleiteten Kategorie $D^b(\text{Rep}_\Gamma)$. Wir wollen nun $\tau(P_1)$ und $\tau(P_2)$ ausrechnen. Sie existieren aber nicht in Rep_Γ , sondern in $D^b(\text{Rep}_\Gamma)$.

Sei K_\bullet ein Komplex aus $D^b(A\text{-mod})$, wobei A eine endlich dimensionale \mathbf{k} -Algebra ist. Definiere

$$\chi(K_\bullet) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \chi(K_i).$$

Hier ist $\chi(K_i)$ der Dimensionsvektor (Vektor der Multiplizitäten der einfachen Moduln aus der Kompositionsreihe). Es ist klar, daß $\chi(K_\bullet) = \chi(H_\bullet(K_\bullet), 0)$ ist. Deswegen ist χ wohldefiniert in der abgeleiteten Kategorie.

LEMMA 11.2. *Es sei*

$$K_\bullet \xrightarrow{f} M_\bullet \longrightarrow N_\bullet \longrightarrow K[1]_\bullet$$

ein ausgezeichnetes Dreieck in $D^b(A\text{-mod})$. Dann gilt

$$\chi(K_\bullet) + \chi(N_\bullet) = \chi(M_\bullet).$$

BEWEIS. Ein ausgezeichnetes Dreieck ist zu einem Dreieck

$$K_\bullet \longrightarrow \text{Cyl}(f) \longrightarrow \text{Con}(f) \longrightarrow K_\bullet[1]$$

quasiisomorph. Dann gilt:

$$\chi(K_\bullet) + \chi(N_\bullet) - \chi(M_\bullet) = \chi(H_\bullet(K_\bullet)) + \chi(H_\bullet(N_\bullet)) - \chi(H_\bullet(M_\bullet)) = \chi(K_\bullet) + \chi(\text{Con}(f)) - \chi(\text{Cyl}(f)) = 0. \quad \square$$

Jetzt rechnen wir $\tau(P_1)$ und $\tau(P_2)$ aus. Wir haben eine Auslander-Reiten-Sequenz

$$P_1 \longrightarrow P_2 \oplus P_2 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_1[1].$$

Dann ist

$$\tau(P_2) \longrightarrow P_1 \oplus P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow \tau(P_2)[1]$$

ebenfalls eine Auslander-Reiten-Sequenz. $\tau(P_2)$ ist ein unzerlegbares Objekt von $D^b(\text{Rep}_\Gamma)$ und isomorph zu $X[i]$, wobei X ein unzerlegbares Objekt von Rep_Γ ist. Da Rep_Γ homologische Dimension 1 hat, hat $\tau(P_2)$ die Gestalt $X[-1]$. Es gilt $\chi(\tau(P_2)) = (-1, 0)$. Deswegen ist $\tau(P_2) = Q_1[-1]$. Ferner gilt, daß

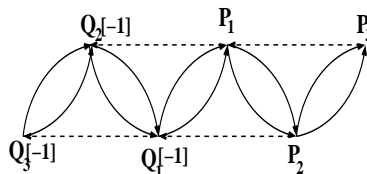
$$Q_1[-1] \longrightarrow P_1 \oplus P_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow Q_1$$

eine Auslander-Reiten-Sequenz ist. Somit ist

$$\tau(P_1) \longrightarrow Q_1[-1] \oplus Q_1[-1] \longrightarrow P_1 \longrightarrow \tau(P_1)[1]$$

wiederum eine Auslander-Reiten-Sequenz. Die präprojektive Serie wird mit dem Shift der präinjektiven Serie zusammengeklebt!

Diese Komponente des Auslander-Reiten-Köchers hat die Gestalt:



Das macht plausibel warum die abgeleiteten Kategorien $D^b(\text{Coh}_{\mathbb{P}^1})$ und $D^b(\text{Rep}_\Gamma)$ äquivalent sind. Für den Beweis benutzt man Kipp-Theorie.

LEMMA 11.3. *Die Bündel $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)$ erzeugen die ganze abgeleitete Kategorie $D^b(\text{Coh}_{\mathbb{P}^1})$. Darüber hinaus gilt $\text{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)) = \text{Ext}^1(\mathcal{O}(1), \mathcal{O}) = 0$.*

BEWEIS. Die Tatsache, daß diese Vektorbündel die ganze abgeleitete Kategorie erzeugen, folgt aus den Existenz der Eulersequenzen:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathcal{O}(2) \longrightarrow 0.$$

Dabei ist $\mathcal{O}(2) \in \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1) \rangle$ usw. Diese Vektorbündel erzeugen dann die ganze abgeleitete Kategorie. Das Verschwinden der Extensionsgruppen folgt aus den bekannten Verschwindungssätzen:

$$h^1(\mathcal{O}(1)) = h^1(\mathcal{O}(-1)) = 0.$$

□

Es ist auch klar, daß $\text{End}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)) = A$ ist, wobei A die Pfadalgebra des Kroneckerischen Köchers ist: $\text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)) = \mathbf{k}[x_0, x_1]_1 = \langle x_0, x_1 \rangle$.

THEOREM 11.4. *Die Kategorien $D^b(\text{Coh}_{\mathbb{P}^1})$ und $D^b(\text{Rep}_{\Gamma})$ sind äquivalent. Sei $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$. Dann ist der Äquivalenzfunktorkomplex $\mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}, -)$.*

BEMERKUNG 11.5. *Hier muß man die folgende Tatsache beachten. $\text{Hom}(\mathcal{E}, -)$ ist ein Funktor von $\text{Coh}_{\mathbb{P}^1}$ in die Kategorie der Rechtsmoduln über A . Um Darstellungen eines Köchers zu bekommen muss man die Algebra $A^* = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(A, \mathbf{k})$ betrachten. Dann gilt $A^* \text{-mod} = \text{mod-}A$. In unserem Fall ist aber $A^* = A$.*

Der Beweis folgt direkt aus dem Beilinsonschen Lemma. Jetzt rechnen wir Bilder unzerlegbarer Objekte der Kategorie $D^b(\text{Coh}_{\mathbb{P}^1})$ aus. Sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe. Es gilt $H^i(\mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})) = \text{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Sei $\mathcal{F} = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n$, dann ist $\text{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$. Der Komplex $\mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ hat nur eine Kohomologie, die nicht verschwindet, nämlich die nullte Kohomologie. Dann hat man einen Isomorphismus in der abgeleiteten Kategorie:

$$\mathbf{R}\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n) = \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n).$$

Es folgt, daß $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^n) = M_n(x)$ ist. Völlig analog bekommen wir die Bilder der Geradenbündel. Die Bilder der Objekte \mathcal{O} und $\mathcal{O}(1)$ sind projektive Moduln P_1 und P_2 .

12. Exzeptionelle Kollektionen auf einer Kette projektiver Geraden

Sei $X = K_n$ eine Kette projektiver Geraden. Wir wissen bereits, daß jedes unzerlegbare Vektorbündel \mathcal{B} auf X ein Geradenbündel ist und darüber hinaus durch seine Einschränkungen auf jede irreduzible Komponente bestimmt wird. Seien d_1, d_2, \dots, d_n die Grade der Einschränkungen von \mathcal{B} auf die irreduziblen Komponenten. Wir bezeichnen \mathcal{B} mit $\mathcal{B}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

THEOREM 12.1. *Sei $X = K_{n+1}$ eine Kette projektiver Geraden. Dann ist*

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(0, 0, \dots, 0), \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(1, 0, \dots, 0), \dots, \mathcal{B}_n = \mathcal{B}(0, 0, \dots, 0, 1)$$

eine exzeptionelle Kollektion auf X .

BEWEIS. Prüfen wir zuerst, daß $\text{Ext}^1(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

1. $\text{Ext}^1(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_i) = h^1(\mathcal{B}_i)$. Wir haben eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_i \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_i \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_i/\mathcal{B}_i \longrightarrow 0.$$

Sie induziert eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{B}_i) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{B}}_i) \longrightarrow H^0(\tilde{\mathcal{B}}_i/\mathcal{B}_i) \longrightarrow H^1(\mathcal{B}_i) \longrightarrow H^1(\tilde{\mathcal{B}}_i) \longrightarrow 0.$$

Es gilt $h^1(\tilde{\mathcal{B}}_i) = 0$, $h^0(\tilde{\mathcal{B}}_i/\mathcal{B}_i) = n$ und $h^0(\tilde{\mathcal{B}}_i) = n + 2$. Es ist auch evident, daß $h^0(\mathcal{B}_i) = 2$ ist. Aus der langen exakten Sequenz folgt, daß $h^1(\mathcal{B}_i) = 0$ ist.

2. $\text{Ext}^1(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_0) = H^1(\mathcal{B}_i^\vee)$. Dieselbe Berechnung zeigt $h^1(\tilde{\mathcal{B}}_i^\vee) = 0$, $h^0(\tilde{\mathcal{B}}_i^\vee/\mathcal{B}_i^\vee) = n$, $h^0(\tilde{\mathcal{B}}_i^\vee) = n$ und $h^0(\mathcal{B}_i^\vee) = 0$. Daraus wiederum folgt $h^1(\mathcal{B}_i^\vee) = 0$.

3. $\text{Ext}^1(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) = H^1(\mathcal{B}_i^\vee \otimes \mathcal{B}_j) = H^1(\mathcal{B}_{ij})$, wobei $\mathcal{B}_{ij} := \mathcal{B}_i^\vee \otimes \mathcal{B}_j$ für $i \neq j$ ist. Es gilt $h^1(\tilde{\mathcal{B}}_{ij}) = 0$, $h^0(\tilde{\mathcal{B}}_{ij}/\mathcal{B}_{ij}) = n$, $h^0(\tilde{\mathcal{B}}_{ij}) = n + 1$ und $h^0(\mathcal{B}_{ij}) = 1$. Aus der langen exakten Sequenz folgt, daß $h^1(\mathcal{B}_{ij}) = 0$ ist.

4. Analog zeigt man $\text{Ext}^1(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i) = 0$.

Die Vektorbündel $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ erzeugen eine volle Unterkategorie von $D^b(\text{Coh}_X)$, die aus den Komplexen endlicher homologischer Dimension besteht. Das folgt wiederum aus den Eulersequenzen

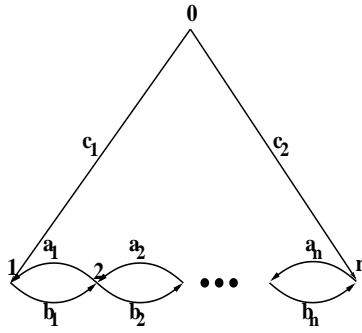
$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(n-1, \underline{x}) \longrightarrow \mathcal{B}(n, \underline{x}) \oplus \mathcal{B}(n, \underline{x}) \longrightarrow \mathcal{B}(n+1, \underline{x}) \longrightarrow 0.$$

□

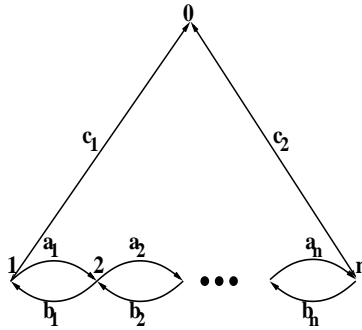
Jetzt berechnen wir die Endomorphismenalgebra des Kippmoduls $\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{B}_i$. Wir haben die Dimensionen der Homomorphismenräume bereits ausgerechnet. Es gilt für alle $1 \leq i, j \leq n$

$$\dim_{\mathbf{k}}(\text{Hom}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_i)) = 2, \dim_{\mathbf{k}}(\text{Hom}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)) = 1, \dim_{\mathbf{k}}(\text{Hom}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_0)) = 0.$$

Dabei hat die Endomorphismenalgebra des Moduls $\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{B}_i$ die Gestalt



Wir haben eine Äquivalenz von Kategorien: die volle Unterkategorie der Komplexe endlicher homologischer Dimension der abgeleiteten Kategorie $D^b(\text{Coh}_X)$ ist äquivalent zur vollen Unterkategorie der Komplexe von endlicher homologischer Dimension der abgeleiteten Kategorie $D^b(\text{mod } -A)$, wobei $A = \text{End}(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{B}_i)$ ist. Der Übergang zu den Darstellungen eines Köchers wird durch Invertierung der Pfeile gegeben. Die abgeleitete Kategorie $D^b(\text{Coh}_X)$ entspricht also dem Köcher



Die Pfadalgebra dieses Köchers ist zart. Wir können also unzerlegbare Objekte der abgeleiteten Kategorie explizit beschreiben.

Anhang

1. Offene Probleme

In diesem Kapitel wollen wir ungelöste Probleme diskutieren, die unserer Meinung nach für weitere Forschung interessant sind. Sie alle kann man unter dem Stichwort “homologische Spiegelsymmetrievermutung” von M.Kontsevich vereinen. Diese behauptet eine Äquivalenz der Kategorien: die abgeleitete Kategorie kohärenter Garben auf einer Calabi-Yau Varietät soll äquivalent sein zur “symplektischer” Fukaya-Kategorie auf der “Spiegelvarietät” X^\vee .

Diese Vermutung wurde in [41] für glatte elliptische Kurven bewiesen.

FRAGE 1.1. *Sei $X = X_n$ ein Zykel projektiver Geraden. Dann hat X eine triviale dualisierende Garbe. Mann kann sagen, daß X eine singuläre Calabi-Yau Varietät ist. Was ist X^\vee in diesem Fall?*

P.Seidel hat vermutet, daß X^\vee ein punktierter Torus mit n Löchern ist. Dabei ist X^\vee nicht kompakt und das verursacht gewisse Probleme bei der Definition der Fukaya-Kategorie.

Aus dieser Frage folgt eine ganze Lawine von weiteren Problemen.

FRAGE 1.2. *Was ist das Verhalten von Vektorbündeln auf Kurven von arithmetischem Geschlecht 1 in Familien? Sei $\mathbf{X} \rightarrow S$ eine Faserung von Kurven von arithmetischem Geschlecht 1, so daß die Zentralfaser X_0 singulär ist (z.B. ein Zykel projektiver Geraden). Welche Vektorbündel lassen sich aus X_0 auf eine Umgebung von X_0 in \mathbf{X} fortsetzen?*

Gewisser Fortschritt in dieser Richtung wurde in einer Arbeit von R.Friedman, J.Morgan und E.Witten gemacht [25]. Wir erwarten, daß zumindest stabile Vektorbündel fortsetzbar sind. Daraus folgt das nächste Problem.

FRAGE 1.3. *Sei X eine rationale Kurve mit einer kuspidalen Singularität. In diesem Fall erhält man auch ein Matrixproblem, das alle Vektorbündel auf X beschreibt. Dieses Problem ist sicherlich wild, aber man kann sich für Vektorbündel mit gewissen Eigenschaften interessieren. Es ist bekannt [53], daß ein stabiles Vektorbündel auf X durch seinen Rang r , seinen Grad d und seine Determinante λ eindeutig bestimmt ist (dabei sind r und d teilerfremd). Was sind die entsprechenden Matrizen?*

FRAGE 1.4. *Sei $X = X_3 \subset \mathbf{P}^2$ ein Dreieck projektiver Geraden. Welche Vektorbündel kann man von X auf ganz \mathbf{P}^2 fortsetzen?*

In der homologischen Spiegelsymmetrie spielen die sogenannten sphärischen Objekte eine wichtige Rolle. Im Fall von Zykeln projektiver Geraden ist ein Objekt \mathcal{E} aus $D^b(\text{Coh}_X)$ sphärisch, wenn $\text{End}(\mathcal{E}) = \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}[1]) = \mathbf{k}$ ist, und $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}[i]) = 0$ für $i \neq 0, 1$ sind.

FRAGE 1.5. *Sei X ein Zykel projektiver Geraden. Gibt es ein sphärisches Objekt in $D^b(\text{Coh}_X)$, das weder zu einem Shift eines einfachen Vektorbündels noch zu einer Wolkenkratzergarbe $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ in einem regulären Punkt $x \in X$ isomorph ist?*

Laut einer Arbeit von A.Polishchuk [42] ist dieses Problem mit der Klassifikation trigonometrischer Lösungen der klassischen Yang-Baxter-Gleichung für $sl(n)$ eng verbunden.

Ein sphärisches Objekt induziert auch eine Autoäquivalenz der abgeleiteten Kategorie $D^b(\text{Coh}_X)$. Daraus resultiert die nächste Frage:

FRAGE 1.6. *Sei X ein Zykel projektiver Geraden. Was ist die Gruppe exakter Autoäquivalenzen $\text{Aut}(D^b(\text{Coh}_X))$ in diesem Fall?*

Es wurde bewiesen, daß man im Fall einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt eine Fourier-Mukai Transformation hat. Diese Autoäquivalenz identifiziert die Kategorie semistabiler Vektorbündel vom Grad Null mit der Kategorie von Wolkenkratzergeraden. Man kann diese Korrespondenz explizit beschreiben. Es ist interessant, diese Korrespondenz auf eine größere Klasse von Objekten fortzusetzen.

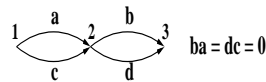
Ein Problem mit dem Beweis der Kontsevich-Vermutung für singuläre Kurven besteht darin, daß in unserer Beschreibung ein Teil der Morphismen verloren geht: der Funktor $D^-(\text{Coh}_X) \rightarrow \text{TC}_X$ ist nicht treu.

FRAGE 1.7. *Ist dieser Funktor voll? Und was ist der Kern dieses Funktors?*

Mittlerweilen ist die Antwort auf die folgende Frage nicht so klar:

FRAGE 1.8. *Ist TC_X triangulierbar? Und wenn ja, gibt es dann Kipp-Moduln in dieser Kategorie?*

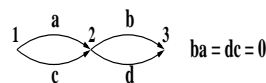
Sei X eine rationale Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt, A die Pfadalgebra des Köchers



Man sieht aus dem Bild der partiell geordneten Mengen beider Kategorien der Tripel, daß TC_X und TC_A sehr ähnlich sind. Die Objekte von $\text{TC}_X|_{\text{Bänder}}$ und $\text{TC}_A|_{\text{Bänder}}$ haben nämlich die gleiche Kombinatorik.

FRAGE 1.9. *Was ist Zusammenhang zwischen den $D^b(\text{Coh}_X)|_{\text{Bänder}}$ und $D^b(A\text{-mod})|_{\text{Bänder}}$?*

FRAGE 1.10. *In der Arbeit [35] wurde festgestellt, daß auf der abgeleiteten Kategorie von Darstellungen des Köchers*



die Zopfgruppe operiert. Wie operiert sie auf den diskreten Parametern von unzerlegbaren Komplexen?

Eine Verallgemeinerung dieser Frage auf den Fall dreidimensionaler Calabi-Yau Varietäten ist durch die Stringtheorie motiviert [17].

Sei A eine Inzidenzalgebra. Der Übergang zur Kategorie der Tripel vereinfacht die Beschreibung von $D^b(A\text{-mod})$. Die Kategorie $D^b(A\text{-mod})$ ist äquivalent zu einer vollen Unterkategorie der abgeleiteten Kategorie konstruierbarer Garben auf einer topologischen Mannigfaltigkeit.

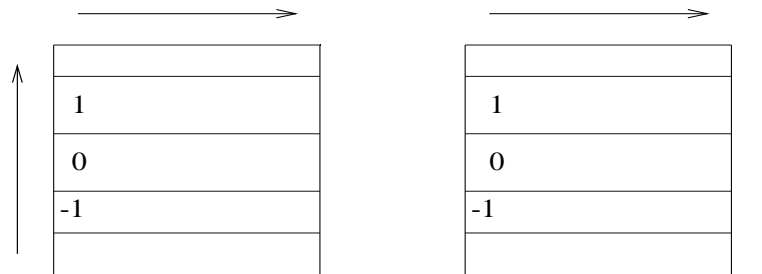
FRAGE 1.11. *Wie übersetzt sich dies in die Sprache von \mathcal{D} -Moduln?*

Man kann die Kategorie TC_A betrachten, sogar wenn die Algebra \tilde{A} aus der Einbettung $A \subset \tilde{A}$ nicht erblich ist.

FRAGE 1.12. *Was für ein Matrixproblem für die Beschreibung von TC_A kann man erhalten, wenn die Algebra \tilde{A} zahm versteckt ist?*

2. Matrixprobleme

2.1. Geschichte. Die Theorie der Matrixprobleme ist eine der bisher größten Leistungen in der kombinatorischen Darstellungstheorie. 1969 haben Nazarova und Roiter das Problem der Klassifikation endlicher p -Gruppen mit einer Abelschen Untergruppe vom Index p betrachtet. Sie haben gezeigt, daß diese Klassifikation zum folgenden Matrixproblem äquivalent ist [44]:



Man hat 2 Matrizen A und B . Jede von diesen wird in horizontale Blöcke geteilt. Man nummeriere diese Blöcke mit ganzen Zahlen (diese Zahlen nennt man auch die Gewichte). Die Blöcke mit der gleichen Nummer (Gewicht) haben die gleiche Anzahl von Zeilen. Die Matrizen A und B haben die gleiche Anzahl von Spalten. Man kann die folgenden Umformungen mit den Matrizen A und B durchführen:

1. simultane Spaltentransformationen in beiden Matrizen A und B ,
2. (a) simultan: Zeilentransformationen innerhalb der Blöcke vom gleichen Gewicht,
(b) unabhängig:
 - (i) mit der Matrix A : man kann das Vielfache einer Zeile von kleinerem Gewicht zu einer Zeile von größerem Gewicht addieren,
 - (ii) mit der Matrix B : man kann das Vielfache einer Zeile von größerem Gewicht zu einer Zeile von kleinerem Gewicht addieren.

Es wurde als Zwischenschritt gezeigt, daß dieses Matrixproblem auch die endlich erzeugten $\mathbf{k}[[x, y]]/(xy)$ -Moduln beschreibt. Was haben wir, wenn die Matrizen A und B aus genau einem horizontalen Block bestehen? Seien A und B zwei $n \times m$ Matrizen.

$$(A, B) \longrightarrow (S^{-1}AT, S^{-1}BT).$$

Das ist das berühmte Kroneckersche Problem. Weierstraß und Kronecker haben dies bezüglich eines Problems der linearen Differentialgleichungen betrachtet. Eine direkte Summe zweier Paare $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ wird folgendermaßen definiert:

$$(A_1, B_1) \oplus (A_2, B_2) = \left(\left(\begin{array}{cc} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{array} \right) \right).$$

Ferner, wenn beide A und B eine gemeinsame Nullspalte oder Nullzeile haben, dann können wir sie weglassen. z.B. $((A|0), (B|0)) = (A, B)$.

Ein Paar (A, B) heißt unzerlegbar, wenn $(A, B) \cong (A_1, B_1) \oplus (A_2, B_2)$ impliziert, daß $(A, B) \cong (A_1, B_1)$ oder $(A, B) \cong (A_2, B_2)$. Man möchte jetzt die unzerlegbaren Paare beschreiben.

Sei A eine invertierbare $n \times n$ Matrix. Es gibt einen Isomorphismus $(A, B) \longrightarrow (I, B')$. Jetzt möchten wir solche Umformungen von A und B machen, die die Identitätsmatrix I nicht verderben. Mit anderen Worten, $(I, B') \longrightarrow (I, S^{-1}B'S)$. Unter diesen Umständen sind die unzerlegbaren Objekte

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbf{k}^*$.

Die Hauptsorgen macht der Fall wenn A entartet ist. Wir geben hier eine Antwort (ohne Beweis):

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

An diesem Beispiel sieht man, daß es 2 Typen von unzerlegbaren Objekten gibt. Zum ersten Typ gehören nicht entartete Matrizen, die Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekten hängen von einem stetigen Parameter ab. Zum zweiten Typ gehören die Entartungen des ersten Typs. Diese hängen nur von der Größe ab.

Beim Internationalen Mathematischen Kongreß in Nizza (1970), stellte I. M. Gelfand eine Vermutung über die Klassifikation unzerlegbarer Harish-Chandra Moduln im singulären Punkt von $SL_2(\mathbb{R})$ vor [27]. Es wurde gezeigt (Nazarova-Roiter, [45]), daß dieses Problem zum folgenden Matrixproblem äquivalent ist:

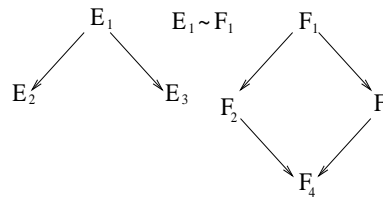
	F_1	F_2	F_3	F_4
E_1				
E_2				
E_3				

$E_1 \times F_1$ ist eine Quadratmatrix.

Erlaubten Umformungen:

1. von Zeilen
 - (a) elementare Transformationen innerhalb von E_2, E_3 ,
 - (b) man kann das Vielfache einer Zeile aus E_1 zur einer Zeile von E_2 oder E_3 addieren,
 - (c) man kann eine elementare Transformation mit den Zeilen von E_1 simultan mit der inversen Transformation der Spalten von F_1 machen;
2. von Spalten
 - (a) elementare Transformationen innerhalb von F_2, F_3, F_4 ,
 - (b) man kann eine elementare Transformation mit den Spalten von F_1 , simultan mit der inversen Transformation der Zeilen von E_1 machen,
 - (c) man kann ein Vielfaches einer Zeile aus F_1 zu einer Zeile von F_2, F_3 und F_4 addieren,
 - (d) man kann eine Zeile aus F_2 oder F_3 zu einer Zeile von F_4 addieren.

Wie läßt sich dies graphisch darzustellen?



Das ist ein sogenannter Halbkettenbund. Dieses Problem ist technisch sehr schwer. Eine komplette Antwort hat V. Bondarenko in den 80-er Jahren erhalten [5]. Diese Klasse Matrixproblemen (diese nennt man manchmal Gelfandsche Matrixprobleme) hat Anwendungen

1. in der Darstellungstheorie endlich-dimensionaler k - Algebren,
2. in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen über einem Körper der Charakteristik p ,
3. bei Klassifikationsproblemen der Algebraischen Topologie,
4. bei Klassifikationsproblemen der Algebraischen Geometrie.

2.2. Darstellungen der Kettenbünde.

DEFINITION 2.1. Ein Kettenbund ist $\{\{E_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I}, I, \sim\}$, wobei E_i und F_i einfach total geordneten Mengen (Ketten) sind, I eine Indexmenge (möglicherweise unendlich). Seien $E = \bigcup_{i \in I} E_i, F = \bigcup_{i \in I} F_i$ (E und F sind nun partiell geordneten Mengen). \sim ist eine Äquivalenzrelation auf $E \cup F$ mit der Bedingung, daß eine Äquivalenzklasse höchstens aus zwei Elementen besteht.

Mit jedem Kettenbund wird ein Matrixproblem assoziiert. Jedem $i \in I$ entspricht nämlich eine Matrix $M(i)$. Diese Matrix wird in vertikale und horizontale Blöcke unterteilt. Diese Blöcke werden auch numeriert: horizontale Blöcke entsprechen den Elementen

von E_i , vertikale den F_i . Die Ordnung auf E_i und F_i ordnet also jedem vertikalen oder horizontalen Block ein Gewicht zu. Man kann die folgenden Umformungen machen:

1. man kann ein Vielfaches einer Zeile von M_i mit kleinerem Gewicht zu einer Zeile von größerem Gewicht addieren
2. man kann ein Vielfaches einer Spalte von M_i mit kleinerem Gewicht zu einer Zeile von größerem Gewicht addieren
3. sei $a, b \in E \cup F$, $a \sim b$. Falls $a, b \in E$ oder $a, b \in F$, dann kann man simultane Transformationen mit den Blöcken, die a und b entsprechen, machen. Falls $a \in E$, $b \in F$ oder $a \in F$, $b \in E$, dann kann man eine Transformation mit a simultan zur inversen Transformation von b durchführen.

Beispiele

1. Gaußsches Problem

$$\begin{array}{c} E \\ \vdots \\ F \end{array}$$

2. Jordansches Problem

$$\begin{array}{c} E \text{ --- } F \\ \vdots \end{array}$$

3. Kroneckersches Problem

$$\begin{array}{ccc} F_1 & & F_1 \\ & \dots & \\ E_1 & & E_1 \end{array}$$

Es gibt zwei Typen unzerlegbarer Objekte: Bänder und Saiten. Ein Band hängt von einigen diskreten und einem stetigen Parameter ab. Eine Saite hängt nur von diskreten Parametern ab.

DEFINITION 2.2. Sei $\{\{E_i\}_{i \in I}, \{F_i\}_{i \in I}, I, \sim\}$ ein Kettenbund. Ein Wort w ist eine Folge $a_0 r_1 a_1 r_2 a_2 \dots w_n r_n a_n$, wobei $a_i \in E \cup F$ und jedes r_i ist eins der Symbole $-$ oder \sim . Wenn $a = a_i$ für ein $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, dann sagt man $a \in |w|$. Ferner sollten die folgenden Eigenschaften erfüllt werden:

1. $r_k \neq r_{k+1}$, $k = 1, \dots, n$.
2. wenn $a_k - a_{k+1}$ ein Unterwort von w ist, dann gilt $a_k, a_{k+1} \in E_i \cup F_i$ für ein $i \in I$, und falls $a_k \in E_i$, dann $a_{k+1} \in F_i$ und umgekehrt.
3. $a_k \sim a_{k+1}$ bedeutet nun, daß a_k und a_{k+1} äquivalent sind.

DEFINITION 2.3. 1. w heißt voll, falls die Äquivalenzklasse von a_0 aus zwei Elementen besteht, dann ist $r_1 = \sim$; falls die Äquivalenzklasse von a_n aus zwei Elemente besteht, dann ist $r_n = \sim$. Mit anderen Worten, wenn w ein Element a enthält, dann enthält es auch das konjugierte von a

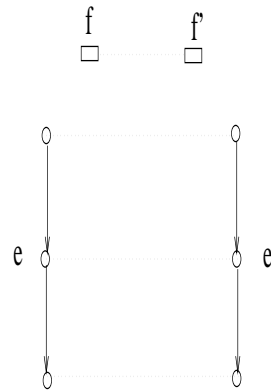
2. w heißt Zyklus, wenn $a_n = a_0$, $r_1 = \sim$, $r_n = -$.
3. Ein Zyklus w ist aperiodisch, wenn er sich nicht als eine Potenz w^k , $k \geq 1$ schreiben läßt.

DEFINITION 2.4. Sei $w = a_0 r_1 a_1 r_2 a_2 \dots w_n r_n a_n$ ein aperiodischer Zyklus, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in k^*$. Ein Band $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ wird folgendermaßen definiert:

1. über jedes $a \in |w|$ schreiben wir, welcher Eintritt der Äquivalenzklasse von a es ist (bemerke, daß über a_n 1 steht).

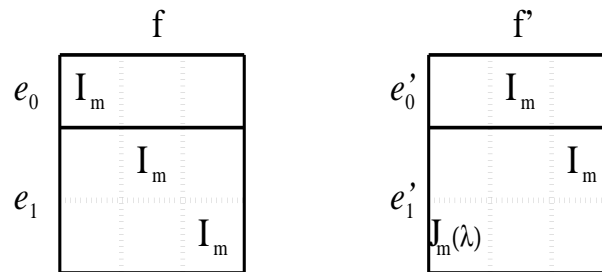
2. Man konstruiere jetzt die Matrizen: wir zählen die Eintritte jedes Elementes. Man dividiere die horizontalen und vertikalen Unterblöcke von M_i in entsprechende Anzahl kleinere Blöcke (z.B. ein $a \in E_i$ wird s mal getroffen. Man dividiere den horizontalen Block von M_i , der a entspricht, in s kleineren Blöcke. Jeder "elementare" Block soll die Größe $m \times m$ haben).
3. Sei $a - b$ ein Unterwort vom w , $a, b \in E_i \cup F_i$, über a steht k , über b steht t . Man betrachte den großen Block $a \times b$ der Matrix M_i . Wenn $b \neq r_{n-1}$ ist, dann setze man im Block mit den Koordinaten (s, t) (im $a \times b$ - Block) die Identitätsmatrix I_m ein. Wenn $b = r_{n-1}$ ist, dann setze man die Jordanzelle $J_m(\lambda)$ ein.
4. in allen anderen Blöcke stehen 0.

BEISPIEL 2.5. Sei unser Kettenbund



Er beschreibt zum Beispiel die torsionsfreien Garben auf einer rationalen Kurve mit einem gewöhnlichen Doppelpunkt.

Sei $w = f - e_0 \sim e'_0 - f' \sim f - e_1 \sim e'_1 - f' \sim f - e_1 \sim e'_1 - f' \sim f$. Was ist dann $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$? Man schreibe $w = \overset{1}{f - e_0} \overset{1}{\sim} \overset{2}{e'_0 - f'} \overset{2}{\sim} \overset{3}{f - e_1} \overset{3}{\sim} \overset{4}{e'_1 - f'} \overset{4}{\sim} \overset{5}{f - e_1} \overset{5}{\sim} \overset{6}{e'_1 - f'} \overset{6}{\sim} \overset{7}{f}$. Darüber hinaus gilt für $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$:



DEFINITION 2.6. Sei w ein volles Wort. Eine Saite $\mathcal{S}(w)$ hängt nur vom Wort w ab. Die Konstruktion der Matrizen ist absolut analog zum Fall der Bänder. Der einzige Unterschied ist, daß man statt der Matrizen $I_m, J_m(\lambda)$ einfach 1 schreibt.

BEISPIEL 2.7. Sei $w = f' \sim f - e_0 \sim e'_0 - f' \sim f$. Dann ist $\mathcal{S}(w)$



Und endlich formulieren wir das Haupttheorem dieser Theorie [5].

THEOREM 2.8. 1. Alle Darstellungen $\mathcal{B}(w, m, \lambda), \mathcal{S}(w)$ sind unzerlegbar. Jede unzerlegbare Darstellung ist zu einem $\mathcal{B}(w, m, \lambda)$ oder $\mathcal{S}(w)$ isomorph.

2. Die einzigen Isomorphismen zwischen diesen Objekten sind

- (a) $\mathcal{S}(w) \cong \mathcal{S}(w^{-1})$, wobei $w = a_0 r_1 a_1 \dots r_m a_m$ und $w^{-1} = a_m r_m a_{m-1} \dots r_1 a_0$ das inverse Wort.
- (b) $\mathcal{B}(w, m, \lambda) = \mathcal{B}(w', m, \lambda')$, wobei w' eine zyklische Permutation von w ist und λ' abhängig vom Vorzeichen der Permutation entweder λ oder λ^{-1} ist.

In dieser Arbeit kann die Menge I aus der Definition des Kettenbundes auch unendlich sein. In diesem Sinne muß die Antwort modifiziert werden. Ein volles Wort w kann nämlich auch unendlich sein. Ein Zyklus ist immer endlich. Das Isomorphismustheorem läßt sich ohne Änderungen für diesen Fall formulieren.

Literatur

- [1] M. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc., **7**(1957), 414-452.
- [2] H. Bass, *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Zeitsch., **82** (1963), 8-27.
- [3] V. Bekkert, H. Merklen, *Indecomposables in derived categories of gentle algebras*, Preprint RT-MAT 2000-23, University of Sao Paolo 2000.
- [4] V. Bekkert, E. Marcos, H. Merklen, *Indecomposables in derived categories of skew-gentle algebras*, Preprint RT-MAT 2001-07, University of Sao Paolo 2001.
- [5] V. M. Bondarenko, *Representations of bundles of semi-chains and their applications*, St. Petersburg Math. J., **3** (1992), 973-996
- [6] V. M. Bondarenko, *Bundles of semi-chains and their representations*, Preprint of the Kiev Institute of mathematics, 1988.
- [7] V. M. Bondarenko, L. A. Nazarova, A. V. Roiter, V. V. Sergijchuck, *Applications of the modules over a dyad to the classification of finite p -groups, having an abelian subgroup of index p* , Zapiski Nauchn. Seminara LOMI, **28** (1972) 69-92.
- [8] T. Bridgeland, A. King, M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories* J. Am. Math. Soc. **14**, No.3, 535-554 (2001).
- [9] I. Burban, *Stable vector bundles on a rational projective curve with one simple node*, zu erscheinen im "Ukrainian Mathematical Journal".
- [10] I. Burban, Yu. Drozd, *Coherent sheaves on singular curves with nodal singularities*, arxiv: math.AG/0101140, zu erscheinen im "Duke Mathematical Journal".
- [11] I. Burban, Yu. Drozd, *Derived tameness of nodal algebras*, zu erscheinen im "Journal of Algebra".
- [12] Burban I., Drozd Yu., Greuel G.-M., *Vector bundles on singular projective curves*, Applications of Algebraic Geometry to Coding Theory, Physics and Computation. - M.: Kluwer, 2001. P. 1 - 15.
- [13] I. Burban, B. Kreuzler, *Fourier-Mukai transform on a rational curve with one simple node*, (in Vorbereitung).
- [14] A. Dold *Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe*, Math. Ann. **140**, 278-298 (1960).
- [15] M.-R. Douglas, S. Govindarajan, T. Jayaraman, A. Tomasiello *D-branes on Calabi-Yau Manifolds and Superpotentials*, arxiv: hep-th/0203173.
- [16] D. Berenstein, M.-R. Douglas, *Seiberg Duality for Quiver Gauge Theories*, arxiv: hep-th/0207027.
- [17] M.-R. Douglas, *D-branes on Calabi-Yau manifolds*, Vortrag auf dem "Workshop on Algebraic Geometry and Physics", Genova, Juni 2002.
- [18] M.-R. Douglas, *Lecture on a WAGP2002 conference "K-theory, derived categories and strings"* at Genova, Italy 18.06.2002-21.06.2002
- [19] Yu. A. Drozd, G.-M. Greuel, *Tame and wild projective curves and classification of vector bundles*, Journal of algebra **246**, 1-54, (2001).
- [20] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko, *Finite dimensional algebras*, Springer 1998.
- [21] Yu. A. Drozd, *Finite modules over pure Noetherian algebras*, Proceedings of the Steklov Institute of mathematics, **4**, 1991.
- [22] Yu. A. Drozd, *Modules over hereditary orders*, Mat. Zametki **29**, (1981), 813-816.
- [23] Yu. A. Drozd, *Matrix problems and categories of matrices*, Zapiski Nauchn. Seminara LOMI, **28** (1972) 144-153.
- [24] Yu. A. Drozd, G. -M. Greuel, I. M. Kashuba, *On the classification of Cohen-Macaulay modules on 2-dimensional normal singularities*, Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint Series 2000.
- [25] Friedman R., Morgan J., Witten E., *Vector bundles over elliptic fibrations*, J. Algebr. Geom.- 1999. - **2**, no 8. - P. 279-401.
- [26] Ch.Geiß, J.A. de la Peña, *Auslander-Reiten components for clans*, Boll. Soc. Mat. Mexicana (3) **5** (1999), 307-326.
- [27] I. M. Gelfand, *Cohomology of the infinite dimensional Lie algebras; some questions of the integral geometry*, International congress of mathematics, Nice, 1970.
- [28] I. M. Gelfand, Yu. I. Manin, *Methods of homological algebra*, Nauka, 1988.

- [29] I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, *Indecomposable representations of the Lorenz group*, Uspehi Mat. Nauk, 1968, **140**, 3-60.
- [30] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math., **79** (1956), 121-138.
- [31] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119, Cambridge University Press(1988).
- [32] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag (1977).
- [33] S. M. Horoshkin *Indecomposable representations of the Lorenz group*, Funktional analysis and its applications **15**, 2, (1981), 50-60.
- [34] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag (1990).
- [35] M. Khovanov, P. Seidel, *Quivers, Floer cohomology, and braid group actions*, J. Am. Math. Soc. **15**, No.1, 203-271 (2002).
- [36] 2. M. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM '94, Vol. I. Basel: Birkhäuser. 120-139 (1995).
- [37] M. S. Narasimhan, *Vector bundles on curves – new directions. Lectures given at the 3rd session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) held in Cetraro (Cosenza), Italy, June 19–27, 1995* Lecture Notes in Mathematics, **1649**, Springer. 193 p., (1997).
- [38] Newstead, P.E. *Lectures on introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Lectures on Mathematics and Physics. Mathematics, **51**, Springer-Verlag. **VI**, (1978).
- [39] T.Oda, *Vector bundles on an elliptic curve*, Nagoya Math. J., **43**, 1971, P. 41-72.
- [40] Z. Pogorzaly, A. Skowronski, *Self-injective biserial standart algebras*, Journal of algebra **138**, 1991, no. 2, 491-504.
- [41] A. Polishchuk, E. Zaslow, *Categorical mirror symmetry: The elliptic curve*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, No.2, 443-470 (1998).
- [42] A. Polishchuk, *Classical Yang-Baxter equation and the A_∞ -constraint*, arXiv:math.AG/0008156
- [43] J. Le Potier, *Lectures on vector bundles*, Cambridge University Press, (1997).
- [44] L. A. Nazarova, A. V. Roiter, *Finitely generated modules over diad of two discrete valuation rings*, Izv. Akad. Nauk USSR, ser. mat. **33**, (1969), 65-89.
- [45] L. A. Nazarova, A. V. Roiter, *About one problem of I. M. Gelfand*, Functional analysis and its applications, vol. **7**, **4**, 1973, 54-69.
- [46] C. -M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Springer, 1984.
- [47] C. -M. Ringel, *The repetitive algebra of a gentle algebra*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, (3) **3**, 1997, no. 2, 235-253.
- [48] J.Schröer, A.Zimmermann *Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras* Mathematische Zeitschrift, **244** (2003), 515-530.
- [49] P. Seidel, *Vanishing cycles and mutations*, Preprint math.SG/0007115.
- [50] P. Seidel, *More about vanishing cycles and mutations*, Preprint math.SG/0010032.
- [51] P. Seidel, R. P. Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, arXiv:math.AG/0001043.
- [52] C.S. Seshadri, *Degenerations of the moduli spaces of vector bundles on curves*, The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP), ICTP Lect. Notes. 1, 205-265 (2000).
- [53] T.Teodorescu, *Vector bundles on curves of arithmetic genus 1*, PhD, Columbia University 2000.
- [54] I. Yudin, *Tensor product of vector bundles on curves of arithmetic genus 1*, Diploma thesis, Kaiserslautern 2001.

Wissenschaftlicher Werdegang

7. Juni 1977 geboren in Kiew, Ukraine
- 1984 – 1991 Besuch der Mittelschule 236, Kiew, Ukraine
- 1991 – 1994 Besuch des Ukrainischen Mathematisch-Physikalischen Lyceums, Kiew, Ukraine
- 1993 und 1994 1. Platz bei der Ukrainischen Mathematikolympiade für Mittelschulen
- Juni 1994 Abitur (mit Auszeichnung)
- 1994 – 1998 Studium der Mathematik an der Staatlichen Taras Schewtschenko Universität Kiew, Ukraine.
Vertiefungsgebiet: Algebra
- 1994 – 1997 Soros Stipendium
- Juni 1998 Bakkalaurus (mit Auszeichnung),
Staatliche Taras Schewtschenko Universität Kiew,
Ukraine
- 1998 – 2000 Studium der Mathematik an der Universität Kaiserslautern,
Deutschland. Vertiefungsgebiet:
Algebraische Geometrie und Computeralgebra
- Juni 1999 Diplom (mit Auszeichnung),
Staatliche Taras Schewtschenko Universität Kiew,
Ukraine
- September 2000 Diplom Mathematik (Gesamtnote 1.0),
Universität Kaiserslautern, Deutschland
- 2000 – 2003 Promotion an der Universität Kaiserslautern,
Deutschland

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich diese Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.