Die Feynman-Kac-Formel für unbeschränkte Potentiale und allgemeine Anfangsbedingungen

Mei Fang Ong

Vom Fachbereich Mathematik
der Technischen Universität Kaiserslautern
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Doctor rerum naturalium, Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

1. Gutachter: Prof. Dr. Heinrich v. Weizsäcker
2. Gutachter: Prof. Dr. Hajo Leschke
(Universität Erlangen-Nürnberg)

Vollzug der Promotion: 21. Mai 2004

D 386 (Diss. Technische Universität Kaiserslautern)

"Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes"

Für meine Familie: Jeffry, Prilly und Prissilya

An dieser Stelle möchte ich mich ganz besonders herzlich bei Prof. Dr. Heinrich von Weizsäcker für die ausgezeichnete Betreuung und die Geduld, die er in zahlreichen Gesprächen bewiesen hat, bedanken. Bei ihm und bei Dr. Olaf Wittich bedanke ich mich für die interessante Themenstellung. An dieser Stelle möchte ich mich auch ganz herzlich bei Prof. Dr. Hajo Leschke als Zweitgutachter meiner Arbeit bedanken. Ausserdem bedanke ich mich genauso herzlich bei all denen, die für die gerade in letzter Zeit sehr angenehme Arbeitsatmosphäre mitverantwortlich waren: HDoz. Dr. Jochen Geiger, Dr. Gerald Kroisand, Dr. Nadja Sidorova, Jochen Voß, Suryasatriya Trihandaru, Irwan Ary Dharmawan und besonders bei Beate Siegler und Horst P. Dauenhauer.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung, Motivation

Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch die in [Bor00] und in [Sim00] dargestellten Versionen der Feynman-Kac-Formel. Sie beschäftigen sich mit dem Problem, den Geltungsbereich der Feynman-Kac-Formel zu erweitern im Hinblick auf die Bedingungen an die Potentiale und die Anfangsbedingungen der partiellen Differentialgleichung. Es ist bekannt, dass die Feynman-Kac-Formel für beschränkte Potentiale und für Anfangsbedingungen, die zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger sind, gilt. Die Feynman-Kac-Formel für Anfangsbedingung im Raum $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ kann als Darstellung der Lösung der zugehörigen partiellen Differentialgleichung betrachtet werden, aber sie kann auch als eine stark stetige Halbgruppe auf dem Raum $C_0(\mathbb{R}^n)$ aufgefasst werden. Diese zwei verschiedene Darstellungen sind äquivalent.
In dieser Arbeit zeigen wir, dass die Feynman-Kac-Formel auch für unbeschränkte Potentiale V mit der Bedingung wie in (42) und Anfangsbedingungen mit der Eigenschaft wie in (56) gilt. Unter diesen Voraussetzungen zeigen wir die Feynman-Kac-Formel als die Lösung der partiellen Differentialgleichung.

1.1 Hauptresultate

Zur Erläuterung wird zunächst an die stochastische Beschreibung von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit Potential (reelle Schrödinger-Gleichung) erinnert. Das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mit Potential

$$\frac{\partial}{\partial t} m = \frac{1}{2}\Delta m - V m,$$

besteht aus dem Auffinden einer Funktion $m \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ mit $m(0,x) = f(x)$. Unter der Voraussetzung $V \in C_b(\mathbb{R}^n)$ stetig und beschränkt und $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger findet sich ein einfacher Beweis der Feyman-Kac-Formel

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds))$$

zum Beispiel in [Øks98]. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Potential lässt sich also als Erwartungswert eines Funktionals von Brownscher Bewegung berechnen.

In dieser Arbeit beweisen wir diese Art der Feynman-Kac-Formel in allgemeinerer Situation, nämlich: Der Prozess, der in der Feyman-Kac-Formel steht, ist ein (zeitlich homogener) Diffusionsprozess auf $\mathbb{R}^n$, der die Form

$$\xi_1(t) := x + \int_0^t \sigma(\xi_1(s))dB(s)$$

hat. Hierbei ist B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ ist eine C^2-Funktion, die samt ihrer ersten und zweiten partiellen Ableitungen beschränkt ist. Ausserdem gilt diese Formel hierbei für eine allgemeinere Bedingung des Potentials V und der Anfangsbedingung f. Dies Ergebnis wird in Satz 4.21 beschrieben.

Ein weiteres Hauptresultat unserer Arbeit ist die wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung der Kolmogorov-Ruckwärtsgleichung für einen speziellen $2n$-dimensionalen Diffusionsprozess. Dies Ergebnis wird in Satz 4.22 beschrieben. Die Motivation hierfür ist gegeben

durch den schon von Borodin benutzten Zusammenhang zwischen der eindimensionalen Feynman-Kac-Formel und der zweidimensionalen Kolmogorov-Ruckwärtsgleichung: Wenn f die Anfangsbedingung der eindimensionalen Feynman-Kac-Formel ist, dann geht für den zweidimensionalen Diffusionsprozess $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ die wahrscheinlichkeitstheoretische Darstellung der Lösung der Kolmogorov-Ruckwärtsgleichung zur Anfangsbedingung $Q(x,y) = f(x)\exp^y$ in die Feynman-Kac-Formel über.
Um diese zwei Sätze in Kapitel 4 zu beweisen, ist der wichtigste Punkt hierbei, dass man die Existenz von

$$\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))$$

und

$$\mathbf{E}_x(L_{V,\sigma}f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))$$

mit $L_{V,\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}\partial_{1i}\partial_{1j} + V$, sowie die Existenz von

$$\mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t), \xi_2(t)))$$

und

$$\mathbf{E}_x(L_{V,b,\sigma}Q(\xi_1(t), \xi_2(t)))$$

mit $L_{V,b,\sigma} = \sum_i V_i\partial_{2i} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\sigma\sigma^T)_{ik}\partial_{1i}\partial_{1k} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(bb^T)_{ik}\partial_{2i}\partial_{2k} + \sum_{i,k}(\sigma b^T)_{ik}\partial_{1i}\partial_{2k}$ überprüfen muss.

Die oben angekündigte Ausdehnung der Feynman-Kac-Formel auf Anfangsbedingungen mit Eigenschaft (56) benutzt die gleichen Methoden und wird im letzten Teil von Kapitel 4 durchgeführt (Satz 4.23).

Im letzten Kapitel gehen wir auf den Hilbert-Raum-Zugang zur Feynman-Kac-Formel ein. Im Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ wird die Feynman-Kac-Formel als Darstellung der Halbgruppe (e^{-tH}) aufgefasst, wobei $H := H_0 + V$; $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ ist. Es ist bekannt, dass diese Darstellung für folgende Potentiale gilt:
i) $V \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (siehe [Sim79]),
ii) V mit der Bedingung wie in (42) (siehe [Sim00]),
iii) $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (siehe [RS75]).

Im letzten Kapitel erweitern wir diesen Zugang auf die Klasse der Potentiale mit Eigenschaft (76), welche die Bedingungen ii) und iii) kombiniert. Dieses Resultat folgt allerdings aus Theorem 1.10 mit $A \equiv 0$ und Remark 1.2 ii) in [BLM04] von Broderix, Leschke und Müller. Im Gegensatz zur klassischen Situation ist e^{-tH} jetzt ein unbeschränkter Operator, wobei $H := -\frac{1}{2}\Delta + V$ und V wie in (76) ist.

1.2 Inhalt

Kapitel 2 besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil dieses Kapitels präzisieren wir den Begriff "Diffusionsprozess" und listen einige Eigenschaften solcher Prozesse auf, die für das Folgende nützlich sind. Dieser Teil ist im wesentlichen aus dem Buch von v. Weizsäcker und Winkler [WW90] entnommen. Aus den Lösungen der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

erhält man Diffusionsprozesse. Dabei entspricht X_t dem Ort eines Partikels zur Zeit t, der Term $b(t, X_t)$ entspricht der Drift und $\sigma(t, X_t)$ entspricht der Diffusionsmatrix.
Indem man die Situation auf zeitunabhängige Drift und Diffusionsmatrix einschränkt, kann man zu dem Prozess als zusätzliches Hilfsmittel eine Operatorhalbgruppe auf dem Banachraum $C_b(\mathbb{R}^n)$ konstruieren. Hier zeigen wir auch, wie man die Girsanov-Formel verwenden kann, um die Dichte der Verteilung der Pfade eines Diffusionsprozesses bezüglich des Wienermaßes auf $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ zu bestimmen.

Im zweiten Teil dieses Kapitels beschreiben wir die explizite Form des Generators einer (zeitlich homogenen) Itô-Diffusion.

Im letzten Teil betrachten wir h-harmonischen Morphismen. Ein durch einen h-harmonischen Morphismus abgebildeter und anschließend zeittransformierter h-Prozess ist in Verteilung zu einer Brownschen Bewegung äquivalent. Der h-Prozess wird durch eine stochastische Differentialgleichung gegeben und seine Verteilung besitzt eine explizit angebbare Dichte bezüglich des Wienermaßes, die später für den Beweis der Feynman-Kac-Formel nützlich ist.

Im dritten Kapitel beschreiben wir die klassischen Darstellungen der Feynman-Kac-Formel verschiedener Autoren und vergleichen sie. Wir sehen, dass die Feynman-Kac-Formel auf dem Raum $C_0(\mathbb{R}^n)$ als eine stark stetige Halbgruppe betrachtet werden kann, aber sie kann auch als die Lösung der partiellen Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen, die im Raum $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ liegen, aufgefasst werden. Diese Darstellungen sind äquivalent. Die Feynman-Kac-Formel wird in diesem Kapitel auch mit verschiedenen Methoden gezeigt.

Im vierten Kapitel stehen die Hauptresultate dieser Arbeit. Wir betrachten die Feynman-Kac-Formel für allgemeinere Bedingungen an die Potentiale und die Anfangsbedingungen für eine spezielle Form des n-dimensionalen Diffusionsprozesses: Wenn der n-dimensionale Diffusionsprozess $\xi_1(t) = x + \int_0^t \sigma(\xi_1(s))dB_s$ ist, dann ergibt sich die Funktion

$$v(t,x) = \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t)) \exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds)), \;\; t \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei f die Bedingung (41) und V die Bedingung (42) erfüllt, als Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma\sigma^T)_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v(t,x) + V(x)v(t,x), \\ v(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Wenn wir hier $n = 1$ und $\sigma = 1$ ersetzen, dann enthält dies die Feynman-Kac-Formel wie in [Bor00] (Theorem 0.1).

Ausserdem geben wir, wie oben angekündigt, die wahrscheinlichkeitstheoretische Darstellung der Lösung der Kolmogorov-Rückwärtsgleichung in folgender Situation an: Sei

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$$

ein $2n$-dimensionaler Diffusionsprozess mit

$$\begin{aligned}\xi_1(t) &:= x + \int_0^t \sigma(\xi_1(s))dB(s),\\ \xi_2(t) &:= y + \int_0^t V(\xi_1(s))ds + \int_0^t b(\xi_1(s))dB(s),\end{aligned}$$

wobei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist. Die Funktionen $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ sind zweimal stetig differenzierbare Abbildungen mit der Eigenschaft, dass für geeignete $K > 0$, $D > 0$ und $i, j = 1, 2, ..., n$ gilt:

$$|b(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_i} b(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} b(x)| \leq K$$

und

$$|\sigma(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma(x)| \leq D.$$

Die Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ existiert mit

$$|V(x)| \leq \varepsilon \|x\|^2 + C_\varepsilon.$$

Weiter sei $Q(x, y)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}&|Q(x,y)| + |\frac{\partial}{\partial x_i} Q(x,y)| + |\frac{\partial}{\partial y_i} Q(x,y)| + |\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} Q(x,y)| + |\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j} Q(x,y)|\\ &+|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j} Q(x,y)| \leq K e^{C\|x\|},\end{aligned}$$

wobei $\|x\|$ die Euklidische Norm des Vektors x bezeichnet.
Eine Funktion $q \in C^{1,2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ist genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} q(t,x,y) &= \frac{1}{2}\sum_{i,k} (\sigma\sigma^T)_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} q(t,x,y) + \frac{1}{2}\sum_{i,k} (bb^T)_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} q(t,x,y)\\ &\quad + \sum_i V_i(x) \frac{\partial}{\partial y_i} q(t,x,y) + \sum_{i,k} (\sigma b^T)_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_k} q(t,x,y)\\ q(0,x,y) &= Q(x,y),\end{aligned}$$

wenn q die folgende probabilistische Darstellung

$$q(t,x,y) = \mathbf{E}_x(Q(\xi(t)))$$

hat.
Mit (42) ist damit in der Feynman-Kac-Formel die Bedingung an das Potential gegenüber [Bor00] deutlich abgeschwächt. Schließlich erweitern wir im letzten Abschnitt des Kapitels 4 die Klasse der zulässigen Anfangsbedingungen: Wir verlangen, dass für alle $\varepsilon > 0$ die Funktion $\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x)$ in $H^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ liegt, wobei

$$\begin{aligned}H^{2,2}(\mathbb{R}^n) &:= \{g \in L^2(\mathbb{R}^n) : \text{ für } |s| \leq 2 \text{ gibt es } g^{(s)} \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ mit } g^{(0)} = g \text{ und}\\ &\quad \int_{\mathbb{R}^n} g^{(0)} \partial^s \xi dx = (-1)^{|s|} \int_{\mathbb{R}^n} g^{(s)} \xi dx,\ \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}\end{aligned}$$

ist. Dann erhalten wir, allerdings nur für den Fall der Brownschen Bewegung wieder die Feynman-Kac-Formel: Die durch

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds))$$

gegebene Funktion ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m(t,x) &= \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} m(t,x) + V(x)m(t,x), \\ m(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Im fünften Kapitel betrachten wir die Feynman-Kac-Formel im Hilbert Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ als Exponentialoperator e^{-tH}. Sie gilt für alle auf Seite 3 genannten Potentiale. Nun kombinieren wir die Bedingungen des Potentials, die in [Sim00] und in [RS75] stehen, nämlich: Sei $V = V_1 + V_2$, wobei $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ist und V_2 die Funktion mit Eigenschaft (42) ist und sei $H = H_0 + V$; $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$. Dann ist

$$(e^{-tH}f)(x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(-\int_0^t V(B(s))ds))$$

für alle $f \in \mathcal{D}(e^{-tH})$.

Dieses Resultat ist die Folgerung von Theorem 1.10 mit $A \equiv 0$ und Remark 1.2 ii) in [BLM04].

1.3 Notation

Die in der Arbeit verwendeten Bezeichnungen sind weitgehend immer dieselben. Im Anhang befindet sich eine Tabelle der wichtigsten verwendeten Symbole. Bei der Brownschen Bewegung B taucht die Zeit t der Brownschen Bewegung entweder als unterer Index B_t oder als $B(t)$ auf.

2 Diffusionsprozesse und h-harmonische Morphismen

2.1 Diffusionsprozesse

In diesem Teil wird der Begriff des Diffusionsprozesses eingeführt und es werden diejenigen Eigenschaften solcher Prozesse aufgelistet, die wir im Folgenden verwenden werden. Die Darstellung ist an Kapitel 12 in [WW90] von v. Weizsäcker und Winkler angelehnt.

Definition 2.1 *Es bezeichne S_+^n die Menge der symmetrischen, nicht-negativ definiten $n \times n$-Matrizen. Seien $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to S_+^n$ meßbar und auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ beschränkt. Definiere den Differentialoperator L_t durch*

$$L_t\varphi(x) = \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

für alle $\varphi \in T := C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Sei nun $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann heißt $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein **Diffusionsprozess***, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*
(i) X ist ein $(\mathcal{F}_t)$-adaptierter, f.s. stetiger stochastischer Prozess.
(ii) Es gilt

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\mathbf{E}(\varphi(X_{t+h}) - \varphi(X_t)|\mathcal{F}_t) = L_t\varphi(X_t) \text{ f.s.}$$

für alle $t \geq 0$ und alle $\varphi \in T$.
(iii) X besitzt die starke Markoveigenschaft, d.h. für jede endliche Stoppzeit S und jede beschränkte, $\sigma(X_{S+h}|h \geq 0)$-meßbare Funktion $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{E}(\Phi|\mathcal{F}_S^+) = \mathbf{E}(\Phi|X_S).$$

b heißt **Drift** und a **Diffusionsmatrix** von X. Die Elemente des Raumes T heißen **Testfunktionen**.

Der nächste Satz in [WW90] (Theorem 12.1.8) besagt, dass sich Diffusionsprozesse zum Beispiel als Lösungen stochastischer Differentialgleichungen konstruieren lassen.

Satz 2.1 *Seien $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ stetige Abbildungen, die folgende Lipschitz-Bedingung erfüllen: Für jedes $t^* < \infty$ gibt es ein $c \in \mathbb{R}_+$, so dass*

$$|b(t,x) - b(t,x')| \leq c|x - x'|,$$

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,x')| \leq c|x - x'|$$

für alle $t \in [0,t^*]$ gilt. $B = (B^1, ..., B^d)$ sei eine d-dimensionale Brownsche Bewegung. Dann hat das Anfangswertproblem zu der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \tag{1}$$

für jede Anfangsbedingung X_0 eine (pfadweise, f.s.) eindeutig bestimmte Lösung $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Falls X_0 zweite Momente besitzt, ist dieser Prozess ein Diffusionsprozess mit Drift b und Diffusionsmatrix $\sigma\sigma^T$.

Aus der pfadweisen Eindeutigkeit der Lösung der stochastischen Differentialgleichung im letzten Satz folgt auch die schwache Eindeutigkeit (siehe [WW90], Theorem 12.4.4):

Satz 2.2 *(Yamada, Watanabe) Sind die Drift $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und die Diffusionsmatrix $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d}$ der stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

so gewählt, dass es für jede Anfangsbedingung X_0 und jede $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung eine (pfadweise) eindeutig bestimmte Lösung gibt, so ist die Lösung schwach eindeutig, d.h. je zwei Lösungen mit derselben Anfangsverteilung $\mathcal{L}(X_0)$ haben auf $C([0,\infty), \mathbb{R}^n)$ dieselbe Verteilung.

Setze $a(t,x) = (\sigma\sigma^T)(t,x)$. Durch direktes Nachrechnen (siehe [WW90], Lemma 12.1.1) erhält man

$$dX^i dX^j = a_{ij}(t, X)dt.$$

Ist X eine Lösung von (1), so ist X nach Satz 2.1 unter geeigneten Voraussetzungen ein Diffusionsprozess. Der zugehörige Differentialoperator ist

$$L_t\varphi(x) = \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

für alle $\varphi \in T := C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nun betrachten wir statt der Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die glatten raum-zeit-Testfunktionen $\varphi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times U)$, wobei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist.

Folgender Satz ist die Itô-Formel für glatte Funktionale der Lösung X von (1). Diesen Satz brauchen wir später, um die Feynman-Kac-Formel in [WW90] zu beweisen.

Satz 2.3 *Sei X die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1). Weiter sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, wenn $P(X_t \in U) = 1$ für alle t und $\varphi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times U)$ ist, dann folgt*

$$\varphi(t, X_t) - \varphi(0, X_0) - \int_0^t (\frac{\partial}{\partial s} + L_s)\varphi(s, X_s)ds = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)\frac{\partial\varphi(s, X_s)}{\partial x_i}dB_s^j. \quad (2)$$

Beweis. Aus der Itô-Formel haben wir

$$\begin{aligned}
d\varphi(t, X_t) &= \partial_t\varphi(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^n \partial_i\varphi(t, X_t)dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \partial_i\partial_j\varphi(t, X_t)dX_t^i dX_t^j \\
&= \partial_t\varphi(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^n \partial_i\varphi(t, X_t)(b_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, X_t)dB_t^j) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma\sigma^T)_{ij}(t, X_t)\partial_i\partial_j\varphi(t, X_t)dt \\
&= (\partial_t + L_t)\varphi(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t, X_t)\partial_i\varphi(t, X_t)dB_t^j,
\end{aligned}$$

wobei

$$L_t := \sum_{i=1}^n b_i\partial_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma\sigma^T)_{ij}\partial_i\partial_j$$

und

$$(\sigma\sigma^T)_{ij} := \sum_{k=1}^d (\sigma_{ik}\sigma_{jk})$$

ist. Also ist

$$\varphi(t,X_t) - \varphi(0,X_0) - \int_0^t (\frac{\partial}{\partial s} + L_s)\varphi(s,X_s)ds = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(s,X_s)\frac{\partial\varphi(s,X_s)}{\partial x_i}dB_s^j.$$

Als Summe von stochastischen Integralen ist die rechte Seite ein $f.s.$ stetiges lokales Martingal. ∎

Es folgt eine Anwendung dieses Satzes.
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Funktion $\varphi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times U)$ wird als raum-zeit harmonische Funktion für den Operator $(\partial_t + L_t)$ bezeichnet, wenn

$$(\partial_t + L_t)\varphi = 0$$

ist.

Korollar 2.1 *Sei X die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1) und sei φ eine raum-zeit harmonische Funktion für den Operator $(\partial_t + L_t)$. Daraus folgt, dass der Prozess $(\varphi(t,X_t))_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal ist. Weiter, wenn die Familie*

$$\{\varphi(S,X_S) : 0 \leq S \leq t,\ S \textit{ Stoppzeit}\}$$

gleichmäßig integrierbar und $X_0 = x$ fast sicher ist, dann ist

$$\varphi(0,x) = \mathbf{E}_x(\varphi(t,X_t)).$$

Um dieses Korollar zu zeigen, brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 2.1 *Sei M ein lokales Martingal und sei T eine Stoppzeit. Wenn die Menge*

$$\{M_S : S \leq T,\ S \textit{ beschränkte Stoppzeit}\}$$

gleichmäßig integrierbar ist, dann folgt, dass $(M_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ ein durch M_T abgeschlossenes Martingal ist.

Beweis. (siehe [WW90], Lemma 4.2.3) ∎

Nun beweisen wir **Korollar 2.1**.

Beweis. Weil φ eine raum-zeit harmonische Funktion für den Operator $(\partial_t + L_t)$ ist, folgt aus Gleichung (2)

$$\varphi(t,X_t) - \varphi(0,X_0) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(s,X_s)\frac{\partial\varphi(s,X_s)}{\partial x_i}dB_s^j.$$

Also ist $(\varphi(t, X_t))_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal. Weil die Familie $\{\varphi(S, X_S) : 0 \leq S \leq t, \text{ S Stoppzeit}\}$ gleichmäßig integrierbar und $X_0 = x$ f.s ist, folgt aus Lemma 2.1, dass der Prozess $(\varphi(s, X_s))_{s\geq 0}$ ein Martingal bis zur Zeit t ist. Daraus folgt

$$\mathbf{E}_x(\varphi(t, X_t)) = \varphi(0, x).$$

■

Unter geeigneten Bedingungen ist die rechte Seite von (2) – und damit auch die linke Seite der Gleichung – sogar ein Martingal. Der nächste Satz (siehe [WW90], Theorem 12.1.4) gibt dafür ein hinreichendes Kriterium an.

Satz 2.4 *Sei X die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1) und sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge mit $P(X_t \in U) = 1$ für alle $t \geq 0$. Weiter erfülle die Funktion $\varphi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times U)$ die Bedingung*

$$\mathbf{E}(\int_0^t (\sigma_{ij}(s, X_s)\partial_i\varphi(s, X_s))^2 ds) < \infty$$

für alle $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., d\}$ und $t \geq 0$. Dann ist der Prozess

$$X^\varphi = \varphi(t, X_t) - \varphi(0, X_0) - \int_0^t (\partial_s + L_s)\varphi(s, X_s)ds$$

ein Martingal.

Daraus ergibt sich folgendes Korollar.

Korollar 2.2 *Mit denselben Voraussetzungen wie in Satz 2.4 haben wir*

$$\varphi(s, X_s) = \mathbf{E}(\varphi(t, X_t) - \int_s^t (\partial_u + L_u)\varphi(u, X_u)du|\mathcal{F}_s),$$

wobei $s \leq t$ ist, bzw.

$$\mathbf{E}(\varphi(t+h, X_{t+h}) - \varphi(t, X_t)|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(\int_t^{t+h} (\partial_u + L_u)\varphi(u, X_u)du|\mathcal{F}_t), \ h > 0.$$

Diese Umformulierung von Satz 2.4 nennt man Dynkin-Formel. Aus dieser Formel erhalten wir folgende Proposition.

Proposition 2.1 *Sei X ein Diffusionsprozess, der die Voraussetzungen wie in Satz 2.4 erfüllt und die Funktion $\varphi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times U)$ erfülle die Dynkin-Formel. Die infinitesimalen Parameter b und σ haben eine gemeinsame Stetigkeit in der Variablen t und x. Für $\varepsilon > 0$ sei die Familie*

$$((\partial_s + L_s)\varphi(s, X_s))_{t\leq s\leq t+\varepsilon}$$

gleichmäßig integrierbar. Dann ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\mathbf{E}(\varphi(t+h, X_{t+h}) - \varphi(t, X_t)|\mathcal{F}_t) = (\partial_t + L_t)\varphi(t, X_t) \ \text{f.s..}$$

Beweis. Es folgt aus der Stetigkeit der Funktionen φ, b, σ und der Pfade, dass die Abbildung $t \mapsto (\partial_t + L_t)\varphi(t, X_t)$ stetig ist. Aus dem klassischen Fundamentalsatz der infinitesimalrechnung im Kalkül folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\partial_s + L_s)\varphi(s, X_s)ds = (\partial_t + L_t)\varphi(t, X_t).$$

Weil die Familie $((\partial_s + L_s)\varphi(s, X_s))_{t\le s\le t+\varepsilon}$ gleichmäßig integrierbar ist, folgt aus der Dynkin-Formel

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\mathbf{E}(\varphi(t+h, X_{t+h}) - \varphi(t, X_t)|\mathcal{F}_t) &= \lim_{h\to 0} \mathbf{E}(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (\partial_s + L_s)\varphi(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t) \\ &= (\partial_t + L_t)\varphi(t, X_t).\end{aligned}$$

■

Weiter beschreiben wir eine alternative Form der starken Markoveigenschaft.

Seien wieder b und σ lipschitzstetig. Gleichung (1) besitzt dann für jede Brownsche Bewegung eine eindeutig bestimmte Lösung mit der Anfangsbedingung $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von Yamada und Watanabe ist die Verteilung der Lösung auf $C([0,\infty), \mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt (Die Stetigkeit des Prozesses erreicht man, indem man den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum einschränkt: Statt Ω betrachtet man $\Omega|N$ mit der induzierten σ-Algebra. Dabei ist N die Nullmenge, für die die Pfade unstetig sind.). Im Folgenden schreiben wir für diese Verteilung P_x und bezeichnen den Erwartungswert bezüglich P_x mit $\mathbf{E}_x$. Man erhält nun eine alternative Form der starken Markoveigenschaft (siehe [WW90], Theorem 12.5.1).

Satz 2.5 *Sei $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ ein polnischer Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ und sei X eine stetige Lösung der Gleichung*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

Weiter sei S eine Stoppzeit und $f : C([0,\infty), \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar. Dann gilt

$$\mathbf{E}(f(X_{S+\cdot})|\mathcal{F}_S^+) = \mathbf{E}_{X_S}(f) \text{ f.s.}.$$

Wenn wir im Folgenden die Verteilungen P_x oder die zugehörigen Erwartungswerte $\mathbf{E}_x$ verwenden, so setzen wir stets voraus, dass Ω ein polnischer Raum ist. Aus diesem Satz erhält man einen Zusammenhang zwischen den Maßen P_x auf dem Pfadraum und den bedingten Erwartungen $\mathbf{E}(\,\cdot\,|\mathcal{F}_0^+)$ auf Ω. Ist $f : C([0,\infty), \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ meßbar, so gilt

$$\mathbf{E}_{X_0}(f) = \mathbf{E}(f(X_\cdot)|\mathcal{F}_0^+) \text{ f.s.}$$

und damit

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}_{X_0}(f)) = \mathbf{E}(f(X_\cdot)).$$

Mittels der Erwartungswerte $(\mathbf{E}_x)_{x\in\mathbb{R}^n}$, die der Drift b und der Diffusionsmatrix σ zugeordnet sind, kann man eine Operatorhalbgruppe definieren. Dies geschieht im nächsten Satz (siehe [WW90], Theorem 12.5.3).

Satz 2.6 *Seien $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times d}$ lipschitzstetig. Dann wird durch*

$$P_t\varphi(x) := \mathbf{E}_x(\varphi(X_t))$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ eine Operatorhalbgruppe auf dem Banachraum $C_b(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Der Raum $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ ist im Definitionsbereich des infinitesimalen Generators der Halbgruppe enthalten und auf diesem Raum stimmt der Generator mit dem Generator L:

$$L\varphi(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x)\partial_i\varphi(x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma\sigma^T)_{ij}(x)\partial_i\partial_j\varphi(x)$$

für alle $\varphi \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ überein.

Im Folgenden betrachten wir meist Prozesse mit lipschitzstetiger Drift und Diffusionsmatrix, um die gerade konstruierte Halbgruppe verwenden zu können.

Die Verteilung von Diffusionsprozessen auf $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ hat oft eine Dichte bezüglich des Wienermaßes. In manchen Situationen kann man diese mittels der Girsanov-Formel (siehe [WW90], Theorem 10.2.1) bestimmen:

Bezeichnung. $\mathcal{B}$ bezeichne die Klasse aller Prozesse, die $f.s.$ gleich einem lokal beschränkten, vorhersagbaren (engl.: predictible) Prozess sind.

Satz 2.7 *(Girsanov) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, B eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung und $H \in \mathcal{B}$. Setze für alle $t \geq 0$*

$$Z_t := \exp(\int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds). \tag{3}$$

Zuletzt sei T eine Stoppzeit, so dass $Z_{\cdot\wedge T}$ ein durch Z_T abgeschlossenes Martingal ist, und Q das durch $dQ = Z_T dP$ definierte Maß. Dann ist der Prozess B^* mit

$$B_t^* := B_{t\wedge T} - \int_0^{t\wedge T} H_s ds$$

für alle $t \geq 0$ eine in T gestoppte $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

In diesem Satz startet B als $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung im Ursprung. Dies stellt aber keine Einschränkung dar: Sei nämlich B eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung mit beliebiger Startverteilung $\mathcal{L}(B_0)$. Dann ist $\tilde{B}_\cdot = B_\cdot - B_0$ eine Brownsche Bewegung, die in Null startet, und man kann obigen Satz auf $\tilde{B}$ anwenden. Da der Wert eines stochastischen Integrals nur von den Zuwächsen des Integrators abhängt, ist $\int_0^t H_s d\tilde{B}_s = \int_0^t H_s dB_s$ und man kann in Z weiterhin B statt $\tilde{B}$ schreiben. Ist Z ein Martingal, so liefert der Satz, dass $\tilde{B}^*$ mit

$$\tilde{B}_t^* := \tilde{B}_{t\wedge T} - \int_0^{t\wedge T} H_s ds = B_{t\wedge T} - B_0 - \int_0^{t\wedge T} H_s ds$$

für alle $t \geq 0$ eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung bezüglich Q ist, und man erhält, dass

$$B_\cdot^* := \tilde{B}_\cdot^* + B_0 = B_{\cdot\wedge T} - \int_0^{\cdot\wedge T} H_s ds$$

eine in T gestoppte $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung bezüglich Q mit Startverteilung $\mathcal{L}(B_0)$ ist. Also gilt der Satz unverändert auch für $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung mit beliebiger Startverteilung.

Korollar 2.3 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sowie B eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung. Weiter sei X eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dB_t.$$

Weiter sei Z der durch

$$Z_t := \exp(\int_0^t -b(s, X_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b(s, X_s)^2 ds)$$

für alle $t \geq 0$ definierte Prozess und $T \geq 0$, so dass $Z_{\cdot\wedge T}$ ein durch Z_T abgeschlossenes Martingal ist. Ist $\varphi_T : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{F}_T$-meßbare Abbildung mit

$$\varphi_T(X) = \exp(\int_0^T b(s, X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^T b(s, X_s)^2 ds) \text{ } P\text{-f.s.},$$

so gilt

$$P(X \in A) = \int_A \varphi_T d\mathbb{W}$$

für alle $A \in \mathcal{F}_T$.

Beweis. Es gilt

$$X_t = B_t + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

für alle $t \geq 0$. Wendet man die Girsanov-Formel für $H_s = b(s, X_s)$ an, so ergibt sich, dass X eine in T gestoppte $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ ist, wobei Q das durch $dQ = Z_T dP$ mit

$$Z_T := \exp(\int_0^T -b(s, X_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T b(s, X_s)^2 ds)$$

definierte Maß ist. Weiter gilt

$$dB_t = dX_t - b(t, X_t)dt.$$

Also ist

$$\begin{aligned} dQ &= \exp(\int_0^T -b(s, X_s)dX_s + \int_0^T b(s, X_s)^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^T b(s, X_s)^2 ds)dP \\ &= \exp(\int_0^T -b(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^T b(s, X_s)^2 ds)dP. \end{aligned}$$

Man erhält nun

$$
\begin{aligned}
P(X \in A) &= \int 1_{\{X \in A\}} dP \\
&= \int 1_{\{X \in A\}} \exp(\int_0^T b(s, X_s) dX_s - \frac{1}{2} \int_0^T b(s, X_s)^2 ds) dQ \\
&= \int 1_A(X) \varphi_T(X) dQ \\
&= \int 1_A(w) \varphi_T(w) d\mathbb{W}(w) \\
&= \int_A \varphi_T d\mathbb{W}
\end{aligned}
$$

für alle $A \in \mathcal{F}_T$. ■

Um die Girsanov-Formel anwenden zu können, benötigt man Kriterien, um zu entscheiden, ob $Z_{\cdot \wedge T}$ ein Martingal ist. Folgender Satz gibt eine hinreichende Bedingung dafür an.

Satz 2.8 *Sei Z ein nicht-negatives stetiges lokales Martingal. Weiter sei T eine Stoppzeit, so dass $P(Z_T > 0) = 1$ und $\mathbf{E}(Z_T) = \mathbf{E}(Z_0)$ ist. Dann ist der Prozess $Z_{\cdot \wedge T}$ ein durch Z_T f.s. strikt positives abgeschlossenes Martingal.*

Beweis. (siehe [WW90], Proposition 10.2.3) ■

Eine hinreichende Bedingung erhält man auch aus Novikov-Kriterium (siehe [LS77], Theorem 6.1).

Satz 2.9 *(Novikov) Sei B eine d-dimensionale $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung und H sei ein adaptierter, f.s. regulärer, f.s. linksstetiger Prozess mit*

$$\mathbf{E}(\exp(\frac{1}{2} \int_0^T H_s^2 ds)) < \infty$$

für alle $T \geq 0$. Dann ist der durch (3) definierte Prozess Z ein Martingal.

Aus dem Satz von Novikov erhält man auch folgendes Kriterium, das als Korollar 3.5.16 in [KS91] steht.

Satz 2.10 *(Beneš) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und sei B eine d-dimensionale $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung. Weiter sei H ein adaptierter, f.s. regulärer, f.s. linksstetiger Prozess mit Werten in $\mathbb{R}^n$. Für alle $T \geq 0$ gebe es eine Konstante K_T, so dass P-f.s.*

$$|H_t| \leq K_T(\sup_{0 \leq s \leq T} |B_s| + 1)$$

für alle $t \in [0, T]$ gilt. Dann ist der Prozess

$$Z_t = \exp(\int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 ds)$$

für alle $t \geq 0$ ein Martingal.

Korollar 2.4 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und sei B eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung. Weiter sei $z \in \mathbb{R}^n$ sowie X eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dB_t,$$

wobei $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetige Drift und $X_0 = z$ f.s. ist. Dann ist der durch

$$Z_t := \exp\left(\int_0^t -b(s, X_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b(s, X_s)^2 ds\right)$$

für alle $t \geq 0$ definierte Prozess Z ein Martingal.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{R}^n$ und sei $w \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. Weiter sei x die Lösung der (gewöhnlichen, deterministischen) Differentialgleichung

$$dx_t = dw_t + b(t, x_t)dt \tag{4}$$

für alle $t \geq 0$. Nach Voraussetzung ist b lipschitzstetig, so dass es für jedes $T < \infty$ ein $k > 0$ mit $|b(t, x_t)| \leq k(|x_t| + 1)$ für alle $t \in [0, T]$ gibt. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
|b(t, x_t)| &\leq k(|x_t| + 1) \\
&\leq k(|w_t| + |z| + \int_0^t |b(s, x_s)|ds + 1) \\
&= k(|w_t| + |z| + 1) + \int_0^t k|b(s, x_s)|ds
\end{aligned}$$

und mit dem Gronwall-Lemma (Hilfssatz in [WA86]) erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|b(t, x_t)| &\leq k(|w_t| + |z| + 1) + \int_0^t kk(|w_s| + |z| + 1)\exp\left(\int_s^t kdr\right)ds \\
&\leq k(\sup_{0\leq s\leq T} |w_s| + |z| + 1) + k(\sup_{0\leq s\leq T} |w_s| + |z| + 1)(e^{kt} - 1) \\
&\leq k(|z| + 1)e^{kT}(\sup_{0\leq s\leq T} |w_s| + 1)
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$. Also gilt

$$|b(t, x_t)| \leq k(|z| + 1)e^{kT}(\sup_{0\leq s\leq T} |w_s| + 1)$$

für alle $t \in [0, T]$. Da $t \mapsto t$ von lokal endlicher Variation ist, ist $b(t, X_t)dt$ eine Version von $\int b(s, X_s(w))ds$ und damit genügt $t \mapsto X_t(w)$ für P-fast alle w der Gleichung (4) mit $w = B(w)$. Also gilt

$$|-b(t, X_t)| \leq k(|z| + 1)e^{kT}(\sup_{0\leq s\leq T} |B_s| + 1) \text{ f.s..}$$

Damit kann man den Satz von Beněs anwenden und erhält, dass Z ein Martingal ist. ■

Eine weitere Anwendung der Girsanov-Formel besteht darin, die schwache Lösbarkeit von stochastischen Differentialgleichungen zu zeigen. Zu diesem Zweck muss man einen Wahrscheinlichkeitsraum und einen Prozess auf diesem Raum konstruieren, so dass der Prozess die vorgegebene Gleichung löst.

Satz 10.2.5 in [WW90] liefert eine Version der Girsanov-Formel, bei der man eine Brownsche Bewegung anstatt einer gestoppten Brownschen Bewegung erhält.

Satz 2.11 *Sei $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ und sei B die Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{W})$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die natürliche Filtration von B. Weiter sei $H \in \mathcal{B}$, so dass der Prozess*

$$Z_t := \exp(\int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds)$$

ein Martingal ist. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathcal{F}$, so dass $dQ = Z_t d\mathbb{W}$ auf $\mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$ gilt, und

$$B^*_\cdot = B_\cdot - \int_0^\cdot H_s ds$$

auf dem Raum $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ eine $(\mathcal{F}_t)$-Brownsche Bewegung ist.

Sei nun B die Brownsche Bewegung und Z das exponentielle Martingal von $\int_0^t -b(s, X_s)dB_s$ bzw.

$$Z_t = \exp(\int_0^t -b(s, X_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b(s, X_s)^2 ds)$$

für alle $t \geq 0$. Weiter sei b so gewählt, dass Z ein Martingal ist. Dann ist nach der Girsanov-Formel in der Form von Satz 2.11, der Prozess B^* mit

$$B^*_t = B_t + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

für alle $t \geq 0$ eine Brownsche Bewegung auf $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \mathcal{F}, Q)$ und nach der Definition von B^* ist B auf diesem Raum eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dB_t = -b(t, X_t)dt + dB^*_t.$$

Im folgenden Teil stellen wir eine explizite Formel des Generators einer (zeitlich homogenen) Itô-Diffusion dar, die wir später sehr oft zum Beweis der Feynman-Kac-Formel verwenden werden.

2.2 Generator der (zeitlich homogenen) Itô-Diffusion

Definition 2.2 *Eine (zeitlich homogene) Itô-Diffusion ist ein stochastischer Prozess $X_t(w) = X(t, w) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, der die stochastische Differentialgleichung*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \ t \geq s; \ X_s = x \tag{5}$$

erfüllt, wobei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist und die Abbildungen $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ die Bedingung

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq D|x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und geeignetes $D > 0$ erfüllen. Hierbei ist $|\sigma|^2 = \sum_{i,j} |\sigma_{ij}|^2$.

Definition 2.3 *Sei X_t eine (zeitlich homogene) Itô-Diffusion auf $\mathbb{R}^n$*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \ t \geq s; \ X_s = x.$$

Der (infinitesimale) Generator A von X_t wird als

$$Af(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{E}_x(f(X_t)) - f(x)}{t}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

definiert.

Die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $C_c^2(\mathbb{R}^n)$, so dass der obige Grenzwert in x existiert, wird als $\mathcal{D}_A(x)$ bezeichnet. Die Menge der Funktionen, für die der Grenzwert für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert, wird als $\mathcal{D}_A$ bezeichnet.

Folgendes Lemma brauchen wir später, um den Zusammenhang zwischen dem Generator A und den Koeffizienten b, σ in der stochastischen Differentialgleichung (5) zu zeigen.

Lemma 2.2 *Sei $Y_t = Y_t^x$ ein Itô-Prozess auf $\mathbb{R}^n$ mit*

$$Y_t^x(w) = x + \int_0^t u(s,w)ds + \int_0^t v(s,w)dB_s(w),$$

wobei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist. Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und sei τ eine Stoppzeit bezüglich der natürlichen Filtration der Brownschen Bewegung $\{\mathcal{F}_t^{(d)}\}$ mit $\mathbf{E}_x(\tau) < \infty$. Seien u und v beschränkt auf dem Träger von f. Dann ist

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x(f(Y_\tau)) \\ = \ & f(x) + \mathbf{E}_x\Big(\int_0^\tau \Big(\sum_i u_i(s, Y_s(w))\frac{\partial f(Y_s)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{ij}(s, Y_s(w))\frac{\partial^2 f(Y_s)}{\partial x_i \partial x_j}\Big)ds\Big), \end{aligned} \quad (6)$$

wobei $\mathbf{E}_x$ der Erwartungswert bezüglich der natürlichen Verteilung P_x von Y_t mit $Y_0 = x$ ist:

$$P_x(Y_{t_1} \in F_1, ..., Y_{t_k} \in F_k) = P_0(Y_{t_1}^x \in F_1, ..., Y_{t_k}^x \in F_k),$$

wobei F_i, $i \in \{1, 2, ..., k\}$ die borelschen Mengen sind.

Beweis. Setze $Z = f(Y)$. Aus der Itô-Formel folgt

$$\begin{aligned} dZ &= \sum_i \frac{\partial f(Y)}{\partial x_i} dY_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_i \partial x_j} dY_i dY_j \\ &= \sum_i u_i \frac{\partial f(Y)}{\partial x_i} dt + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{ij}\frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_i \partial x_j} dt + \sum_i \frac{\partial f(Y)}{\partial x_i}(vdB)_i. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} f(Y_t) &= f(Y_0) + \int_0^t \Big(\sum_i u_i \frac{\partial f(Y)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{ij}\frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_i \partial x_j}\Big)ds \\ &\quad + \sum_i \sum_k \int_0^t v_{ik}\frac{\partial f(Y)}{\partial x_i} dB_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Nun bilden wir den Erwartungswert $\mathbf{E}_x$ in (7) und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x(f(Y_\tau)) &= f(x) + \mathbf{E}_x\Big(\int_0^\tau \Big(\sum_i u_i \frac{\partial f(Y)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{ij}\frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_i \partial x_j}\Big)ds\Big) \\ &\quad + \sum_i \sum_k \mathbf{E}_x\Big(\int_0^\tau v_{ik}\frac{\partial f(Y)}{\partial x_i} dB_k\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

Wenn g eine beschränkte borelsche Funktion mit $|g| \leq M,\ M > 0$ ist, haben wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}_x\Big(\int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s)dB_s\Big) = \mathbf{E}_x\Big(\int_0^k \chi_{\{s<\tau\}} g(Y_s)dB_s\Big) = 0,$$

weil $g(Y_s)$ und $\chi_{\{s<\tau\}}$ meßbar sind. Weiter gilt

$$\mathbf{E}_x\Big(\Big(\int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s)dB_s\Big)^2\Big) = \mathbf{E}_x\Big(\int_0^{\tau\wedge k} g^2(Y_s)ds\Big) \leq M^2\mathbf{E}_x(\tau) < \infty.$$

Deshalb ist die Familie $\{\int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s)dB_s\}_k$ gleichmäßig integrierbar bezüglich P_x. Daraus folgt

$$0 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}_x\Big(\int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s)dB_s\Big) = \mathbf{E}_x\Big(\lim_{k\to\infty}\int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s)dB_s\Big) = \mathbf{E}_x\Big(\int_0^\tau g(Y_s)dB_s\Big).$$

Kombinieren wir dies mit Gleichung (8), so folgt die Behauptung. ■

Dieses Lemma gibt direkt die Formel für den Generator einer (zeitlich homogenen) Itô-Diffusion.

Satz 2.12 *Sei X_t eine (zeitlich homogene) Itô-Diffusion auf $\mathbb{R}^n$*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$

Wenn $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ ist, dann ist $f \in \mathcal{D}_A$ und es gilt

$$Af(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{9}$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 2.2 mit $\tau = t$ und der Definition von A. ■

Beispiel 2.1 *Die n-dimensionale Brownsche Bewegung ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = dB_t,$$

d.h. wir haben $b = 0$ und $\sigma = I_n$ (die n-dimensionale Einheitsmatrix). Der Generator von B_t ist also

$$Af(x) = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2},\ f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$$

bzw. $A = \frac{1}{2}\Delta$, wobei Δ der Laplace-Operator ist.

Wenn wir die Gleichungen (6) und (9) kombinieren, erhalten wir die Dynkin-Formel.

Satz 2.13 *(Dynkin-Formel) Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und sei τ eine Stoppzeit mit $\mathbf{E}_x(\tau) < \infty$. Dann ist*

$$\mathbf{E}_x(f(X_\tau)) = f(x) + \mathbf{E}_x(\int_0^\tau Af(X_s)ds).$$

Im nächsten Teil beschreiben wir den h-Prozess, der durch eine stochastische Differentialgleichung gegeben ist. Seine Verteilung besitzt eine explizit beschreibbare Dichte bezüglich des Wienermaßes, die wir später für eine andere Art des Beweises der Feynman-Kac-Formel benutzen können. Ausserdem zeigen wir im letzten Abschnitt dieses Teils die Transformationsformel für h-harmonische Morphismen.

2.3 h-harmonische Morphismen

Definition 2.4 *(h-harmonische Funktion) Sei $h \in C^\infty(M)$ eine Funktion mit $h(x) > 0$ für alle $x \in M$, wobei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Eine Funktion $u \in C^2(M)$ heißt h-harmonisch, falls*

$$\Delta_M u - 2(\nabla logh, \nabla u) = 0$$

gilt.

Definition 2.5 *(h-harmonischer Morphismus) Seien M, N Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $\Phi : M \to N$ heißt h-harmonischer Morphismus, falls für alle auf einer offenen Menge $V \subset N$ harmonischen Funktionen $f : V \to \mathbb{R}$ die Funktion $f \circ \Phi : \Phi^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ auf $\Phi^{-1}(V)$ h-harmonisch ist.*

Proposition 2.2 *$\Phi = (\Phi^1, ..., \Phi^n) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ist ein h-harmonischer Morphismus genau dann, wenn eine nicht-negative Funktion $\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_+$ existiert, so dass*
(i) $\Delta_M \Phi^k - 2(\nabla \log h, \nabla \Phi^k) = 0$,
(ii) $(\nabla \Phi^k, \nabla \Phi^j)(x) = \lambda(x)\delta^{kj}$
ist.

Beweis. (siehe [Fug78], Ch.12, p.140 f.) ■

Definition 2.6 *(h-Prozess) Der durch*

$$X_t^h := B_t - \int_0^t \nabla \log h(B_s)ds \qquad (10)$$

gegebene Prozess auf $\mathbb{R}^N$ heißt h-Prozess mit Startpunkt x.

Aus Proposition 2.2 erhält man folgendes Lemma.

Lemma 2.3 *Sei $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ein surjektiver h-harmonischer Morphismus und sei X_t der h-Prozess aus (10). Dann genügt $Y_t := \Phi(X_t)$ der stochastischen Differentialgleichung*

$$dY_t^k = \nabla \Phi^k(X_t)dB_t.$$

Beweis. Aus der Itô-Formel und Proposition 2.2 folgt

$$\begin{aligned} dY_t^k &= \nabla\Phi^k(X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi^k(X_t)}{\partial x_i \partial x_j}dX_t^i dX_t^j \\ &= \nabla\Phi^k(X_t)(dB_t - \nabla \log h(B_t)dt) + \frac{1}{2}\Delta\Phi^k(X_t)dt \\ &= \nabla\Phi^k(X_t)(dB_t - \nabla \log h(B_t)dt) + \nabla\Phi^k(X_t)\nabla \log h(B_t)dt \\ &= \nabla\Phi^k(X_t)dB_t. \end{aligned}$$

■

Die Verteilung des h-Prozesses besitzt eine explizit beschreibbare Girsanovdichte bezüglich des Wienermaßes. Diese wird jetzt ausgerechnet.

Satz 2.14 *(Girsanovtransformation) Ist*

$$Z_t := \exp(\int_0^t \nabla \log h(B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla \log h(B_s)|^2 ds) \tag{11}$$

ein P-Martingal, so ist X_t^h eine Brownsche Bewegung bezüglich Q, wobei

$$dQ = Z_t dP$$

für alle t ist.

Beweis. (siehe [RW87], (38.9) Theorem, p.82) ■

Lemma 2.4 *Die Girsanovdichte in (11) lässt sich umschreiben zu*

$$Z_t = \frac{h(B_t)}{h(B_0)}\exp(-\int_0^t W(B_s)ds),$$

wobei $W(x) := (|\frac{\nabla h}{h}|^2 + \frac{\Delta h}{2h})(x)$ ist.

Beweis. (siehe Gleichung (36)) ■

Bezeichnung. W heißt im Folgenden das h-Potential.

Nun zeigen wir die Transformationsformel für h-harmonische Morphismen. Aber zunächst stellen wir noch eine Proposition dar, die wir zum Beweis der Transformationsformel für h-harmonische Morphismen benötigen.

Proposition 2.3 *Sei*

$$\tau(t) := \int_0^t \lambda(X_s^h)ds$$

mit $(\nabla\Phi^i, \nabla\Phi^j)(x) = \lambda(x)\delta^{ij}$ die Zeittransformation. Sei weiterhin D_τ gegeben durch $D_\tau := X_{t(\tau)}^h$, wobei $t(\tau) := \inf\{s \geq 0 | \tau(s) = \tau\}$ ist. Dann stimmen $\Phi(D_\tau)$ und B_τ in Verteilung überein.

Beweis. (siehe [Øks90], Theorem 2, p.218) ■

Lemma 2.5 *(Transformationsformel für h-harmonische Morphismen) Sei* $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ *ein surjektiver und eigentlicher h-harmonischer Morphismus sowie* $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^n)$*. Dann ist*

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty dt u_0(B_t) \exp\left(-\int_0^t (\xi + \zeta V)(B_s) ds\right)\right) \\ = \; & \mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty dt \Phi^* u_0(B_t) \left(\frac{h(B_t)}{h(B_0)}\right) \exp\left(-\int_0^t (\xi\lambda + \zeta \Phi^* V + W)(B_s) ds\right)\right), \end{aligned} \tag{12}$$

wobei $(\xi,\zeta) \in \mathbb{K}$ *mit* $\mathbb{K} := \{(\xi,\zeta) \in \mathbb{C}^2 | Re(\zeta) > 0, Re(\xi + C_V \zeta) > 0\}$ *ist.* V *ist ein nach unten beschränktes Potential, d.h. für* $C_V \in \mathbb{R}$ *ist* $V(x) \geq C_V$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Beweis. Aus Proposition 2.3 und Satz 2.14 sowie Lemma 2.4 erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty d\tau u_0(B_\tau) \exp\left(-\int_0^\tau (\xi + \zeta V)(B_\sigma) d\sigma\right)\right) \\ = \; & \tilde{\mathbf{E}}_x\left(\int_0^\infty d\tau (u_0 \circ \Phi)(X^h_{t(\tau)}) \exp\left(-\int_0^\tau (\xi + \zeta V \circ \Phi)(X^h_{s(\sigma)}) d\sigma\right)\right) \\ = \; & \tilde{\mathbf{E}}_x\left(\int_0^\infty \lambda(X^h_{t(\tau)}) dt (u_0 \circ \Phi)(X^h_{t(\tau)}) \exp\left(-\int_0^t \lambda(X^h_{s(\sigma)}) ds (\xi + \zeta V \circ \Phi)(X^h_{s(\sigma)})\right)\right) \\ = \; & \tilde{\mathbf{E}}_x\left(\int_0^\infty dt \Phi^* u_0(X^h_{t(\tau)}) \exp\left(-\int_0^t ds (\xi\lambda + \zeta \Phi^* V)(X^h_{s(\sigma)})\right)\right) \\ = \; & \mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty dt \Phi^* u_0(B_t) \left(\frac{h(B_t)}{h(B_0)}\right) \exp\left(-\int_0^t (\xi\lambda + \zeta \Phi^* V + W)(B_s) ds\right)\right), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathbf{E}}$ der Erwartungswert bezüglich der Verteilung Q von X^h_t ist und die Funktion $\Phi^* : C(\mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{R}^N)$ als $\Phi^* u_0(x) := \lambda(x)(u_0 \circ \Phi)(x)$ definiert. ■

Bemerkung 2.1 $\mathbf{E}_x(\int_0^\infty dt u_0(B_t) \exp(-\int_0^t (\xi + \zeta V)(B_s) ds)) < \infty$ *(siehe [Wit97], Folgerung 4.5).*

Wenn $\Phi^* V \equiv c \in \mathbb{R}$ in Lemma 2.5 ist, erhält man folgendes Korollar.

Korollar 2.5 *Falls* $\Phi^* V \equiv c \in \mathbb{R}$ *ist, so folgt unter den Voraussetzungen von Lemma 2.5*

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty dt u_0(B_t) \exp\left(-\int_0^t (\xi + \zeta V)(B_s) ds\right)\right) \\ = \; & \mathbf{E}_x\left(\int_0^\infty dt \Phi^* u_0(B_t) \left(\frac{h(B_t)}{h(B_0)}\right) \exp\left(-\int_0^t \left(\xi \frac{c}{V \circ \Phi} + \zeta c + W\right)(B_s) ds\right)\right) \end{aligned}$$

für alle $(\xi,\zeta) \in \mathbb{L} := \{(\xi,\zeta) \in \mathbb{C}^2 | c\, Re(\zeta) > 0, Re(\xi) > 0\}$.

Beweis. Wenn

$$\Phi^* V(x) = c$$

ist, dann folgt

$$\lambda(x) = \frac{c}{(V \circ \Phi)(x)}.$$

Wenn wir in (12) $\Phi^* V(x) = c$ und $\lambda(x) = \frac{c}{(V \circ \Phi)(x)}$ setzen, so folgt die Behauptung. ■

3 Die klassische Feynman-Kac-Formel

In diesem Kapitel beschreiben wir verschiedene klassische Darstellungen der Feynman-Kac-Formel, die wir aus verschiedenen Büchern entnehmen. Es ist bekannt, dass die Feynman-Kac-Formel für beschränkte Potentiale immer gilt. Ausserdem gilt sie auch für stetig beschränkte Anfangsbedingungen. In diesem Fall betrachten viele Autoren die Feynman-Kac-Formel entweder als Lösung der partiellen Differentialgleichung oder als eine stark stetige Halbgruppe P_t^V. Wir zeigen in diesem Kapitel, dass diese Darstellungen äquivalent sind.
Neben den Unterschieden bei den Bedingungen an die Potentiale und Anfangsbedingungen wird die Feynman-Kac-Formel in der Literatur auch für unterschiedliche Prozesse formuliert. Manche beschränken sich auf die Brownsche Bewegung, andere betrachten einen Diffusionsprozess oder einen Feller-Dynkin-Prozess.

Die in diesem Kapitel gewählte Darstellung wird in einigen Punkten später in der Arbeit verallgemeinert.

3.1 Die Feynman-Kac-Formel als eine stark stetige Halbgruppe

Zuerst stellen wir die Darstellung der Feynman-Kac-Formel aus [Szn98] vor.

1. In [Szn98] wird die Feynman-Kac-Formel mit Halbgruppen hergeleitet und folgende Situation wird betrachtet:

Sei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung auf dem Raum $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}^d$ und sei $(\theta_t)_{t\geq 0}$ der kanonische Shift auf diesem Raum. Weiter sei P_x das Wienermaß mit Anfangspunkt $x \in \mathbb{R}^d$ und $\mathbf{E}_x$ der zugehörige Erwartungswert. Die Brownsche Dichte ist

$$p(u, x, y) = (2\pi u)^{-\frac{d}{2}} \exp(-\frac{|y-x|^2}{2u}),$$

wobei $u > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$ sind.
Auf dem Raum $C_0(\mathbb{R}^d)$ der stetigen im Unendlichen verschwiendenden Funktionen definiert die Formel

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= \mathbf{E}_x(f(B_t)), \ \forall t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) f(y) dy, \ \forall t > 0, \ x, y \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

eine stark stetige Halbgruppe, d.h. $P_t f \in C_0$, wenn $f \in C_0$ ist und $P_t f$ konvergiert für $t \to 0$ gleichmäßig gegen f. Der Generator L_0 der Halbgruppe hat als Definitionsbereich die Menge $\mathcal{D}(L_0)$ aller Funktionen $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, für die $\frac{1}{t}(f - P_t f)$ auf C_0 konvergiert, wenn $t \to 0$:

$$L_0 f = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f - P_t f), \ \ \forall f \in \mathcal{D}(L_0).$$

Also ist $L_0 = -\frac{1}{2}\Delta$, wobei Δ der Laplace-Operator ist (siehe A.1).

Nun stellen wir die Feynman-Kac-Formel, wie sie in [Szn98] steht, vor. Wir betrachten eine stetige beschränkte Funktion $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Satz 3.15 *Die Formel*

$$P_t^V f(x) = \mathbf{E}_x(f(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds)) \tag{13}$$

für alle $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ *und* $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *definiert eine stark stetige Halbgruppe auf* $C_0(\mathbb{R}^d)$ *mit dem Generator*

$$L_V f = L_0 f + Vf \tag{14}$$

für alle $f \in \mathcal{D}(L_V) = \mathcal{D}(L_0)$.

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 3.6 *(Pertubation-Gleichungen – Duhamel-Formeln) Die Formel*

$$P_t^V f(x) = \mathbf{E}_x(f(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds))$$

für alle $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ *und* $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *kann zu*

$$\begin{aligned} P_t^V f(x) &= P_t f(x) - \int_0^t P_s(VP_{t-s}^V f)(x)ds \\ &= P_t f(x) - \int_0^t P_s^V(VP_{t-s} f)(x)ds \end{aligned} \tag{15}$$

umgeschrieben werden.

Beweis. Wir haben für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \exp(-\int_0^t V(B_s)ds) &= 1 - \int_0^t V(B_s)\exp(-\int_s^t V(B_u)du)ds \\ &= 1 - \int_0^t V(B_s)\exp(-\int_0^s V(B_u)du)ds \end{aligned} \tag{16}$$

(siehe A.2). Multipliziere beide Seiten der ersten Gleichung von (16) mit $f(B_t)$ und integriere bezüglich P_x. Zusammen mit der Markoveigenschaft der Brownschen Bewegung (siehe A.4) folgt

$$\begin{aligned} P_t^V f(x) &= P_t f(x) - \int_0^t \mathbf{E}_x(V(B_s)\exp(-\int_s^t V(B_u)du)f(B_t))ds \\ &= P_t f(x) - \int_0^t \mathbf{E}_x(V(B_s)\exp(-A_{t-s}\circ\theta_s)f(B_{t-s}\circ\theta_s))ds \\ &= P_t f(x) - \int_0^t \mathbf{E}_x(V(B_s)\mathbf{E}_{B_s}(\exp(-A_{t-s})f(B_{t-s})))ds \\ &= P_t f(x) - \int_0^t \mathbf{E}_x(V(B_s)P_{t-s}^V f(B_s))ds \\ &= P_t f(x) - \int_0^t P_s(VP_{t-s}^V f)(x)ds, \end{aligned}$$

wobei $A_t := \int_0^t V(B_u)du$ ist. Diese Gleichung ist die erste Gleichung von (15). Analog kann man die zweite Gleichung von (15) mit Hilfe der zweiten Gleichung von (16) beweisen. ■

Bemerkung 3.2 *Die Duhamel-Formeln sind Ausdruck des Duhamelschen Prinzips, das noch allgemeiner formuliert werden kann, z.B. in [Tay97], (9.38), Seite 523.*

Jetzt beweisen wir **Satz 3.15**.

Beweis. Zuerst beweisen wir, dass (13) eine stark stetige Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R}^d)$ definiert. Direkte Untersuchung der ersten Gleichung von (15) und die Tatsache, dass P_s für $s > 0$ beschränkte meßbare Funktionen auf stetige Funktionen abbildet, sowie die Benutzung der Ungleichung $|P_t^V f| \leq c(t,V)P_t|f|$ (siehe A.3) im Satz von der majorisierten Konvergenz zeigen, dass $P_t^V f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ für alle $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ist. Weiter folgt aus der Markoveigenschaft

$$\begin{aligned}
P_{s+t}^V f(x) &= \mathbf{E}_x(\exp(-(\int_0^s V(B_u)du + \int_s^{s+t} V(B_u)du))f(B_{t+s})) \\
&= \mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^s V(B_u)du)\exp(-A_t \circ \theta_s)f(B_t \circ \theta_s)) \\
&= \mathbf{E}_x(\exp(-A_s)\mathbf{E}_{B_s}(\exp(-A_t)f(B_t))) \\
&= \mathbf{E}_x(\exp(-A_s)P_t^V f(B_s)) \\
&= P_s^V P_t^V f(x)
\end{aligned}$$

für alle $t, s \geq 0$. Also definiert P_t^V eine Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R}^d)$. Die starke Stetigkeit der Halbgruppe folgt aus Gleichung (15):

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} P_t^V f(x) &= \lim_{t\to 0} P_t f(x) - \lim_{t\to 0}\int_0^t P_s(VP_{t-s}^V f)(x)ds \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Für alle $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\frac{1}{t}\int_0^t P_s(VP_{t-s}^V f)(x)ds \underset{t\to 0}{\longrightarrow} Vf(x) \tag{17}$$

gleichmäßig in x, weil die Funktion V stetig und beschränkt ist. Aus Gleichung (15) folgt

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f - P_t^V f) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f - P_t f) + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t P_s(VP_{t-s}^V f)ds.$$

Dies ergibt mit (17)

$$L_V f = L_0 f + Vf$$

für alle $f \in \mathcal{D}(L_V) = \mathcal{D}(L_0)$. ■

Die rechte Seite der Feynman-Kac-Formel (13) ergibt eine probabilistische Darstellung für das funktionalanalytische Objekt e^{-tL_V}.

Als nächstes beweisen wir die Feynman-Kac-Formel, wie sie in [Wil79] steht. Mit verschiedenen Methoden wird sie hier gezeigt.

2. In [Wil79] werden verschiedene Zugänge zum Beweis der Feynman-Kac-Formel aufgezeigt. Als erstes mit dem analytischen Zugang und dann mit der Markov-Prozess-Theorie und als letztes mit Martingalen.

2.1. Analytischer Zugang
Wir betrachten eine einfache Situation, die zu speziell für bestimmte Anwendungen ist. Sei $X = (\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ ein Feller-Dynkin-Prozess (siehe [Wil79], $III.14$) mit Übergangshalbgruppe $\{P_t\}$ auf C_0 und Generator $\mathcal{G} = \frac{1}{2}\Delta$. Sei V eine stetige, beschränkte, nicht negative Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Dann definiert

$$P_t^V f(x) := \mathbf{E}_x(f(X_t)\exp(-\int_0^t V(X_s)ds))$$

eine Feller-Dynkin-Halbgruppe P_t^V (siehe [Wil79], Definition 8.2) mit dem Generator $\mathcal{G}^V$, der die Eigenschaften

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}^V) = \mathcal{D}(\mathcal{G}), \quad \mathcal{G}^V f(x) = \mathcal{G}f(x) - V(x)f(x) \tag{18}$$

hat.

Der Unterschied zwischen den Feynman-Kac-Formeln, die in [Szn98] und in [Wil79] (bei analytischem Zugang) stehen, liegt in dem Prozess X: Der Prozess X wird in [Szn98] als Brownsche Bewegung und in [Wil79] als Feller-Dynkin-Prozess betrachtet. Die Definitionsbereiche der Halbgruppen sind dieselben, nämlich: $C_0(\mathbb{R}^n)$ Raum der stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden. Betrachtet man die Generatoren L_V in [Szn98] und $\mathcal{G}^V$ in [Wil79], so fällt auf, dass diese äquivalent sind: In [Szn98] werden die Generatoren als

$$L_0 f := \lim_{t\to 0} \frac{f - P_t f}{t}$$

und

$$L_V f := \lim_{t\to 0} \frac{f - P_t^V f}{t}.$$

definiert und in [Wil79] werden die Generatoren als

$$\mathcal{G} f := \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t}$$

und

$$\mathcal{G}^V f := \lim_{t\to 0} \frac{P_t^V f - f}{t}$$

definiert. Nun kann man mit diesen Definitionen zeigen, dass die Darstellungen in (14) und in (18) äquivalent sind.

Man kann die Feynman-Kac-Formel auch durch Resolventen ausdrücken. Das wird durch die Markoveigenschaft bewiesen.

2.2. Markov-Prozess-Zugang
Man kann (18) durch Resolventen ausdrücken:

$$R_\lambda^V = R_\lambda - R_\lambda V R_\lambda^V \tag{19}$$

(siehe A. 5). Wir können (19) direkt und unter allgemeineren Bedingungen beweisen. Es ist wichtig, dass wir die Stetigkeit des Potentials V weglassen können. Sei das Potential V nicht-negativ, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-meßbar und sei $R_\lambda V(x) < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Für X brauchen wir weniger als die Feller-Dynkin-Eigenschaft. Der Prozess X braucht nur die Hypothese, dass die Abbildung $(t,\omega) \mapsto X(t,\omega)$ meßbar bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{B}[0,\infty) \times \mathcal{F}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist, und X die Markoveigenschaft besitzt.
Um

$$R_\lambda f(x) - R_\lambda^V f(x) = R_\lambda V R_\lambda^V f(x), \ \forall f \in C_b(\mathbb{R}^n)$$

zu berechnen (siehe A.6), benutzen wir, dass A_t ein stetiges additives Funktional ist (siehe [Wil79], III.32), d.h. es gilt

$$A_{s+u} - A_s = A_u \circ \theta_s,$$

wobei $A_t := \int_0^t V(X_u)du$ ist. Weiterhin wird die Markoveigenschaft von X verwendet. Mit dem gleichen Verfahren wie in A.6 kann man

$$R_\lambda f(x) - R_\lambda^V f(x) = R_\lambda^V V R_\lambda f(x) \tag{20}$$

zeigen.

Ausser den zwei oben genannten Zugängen kann man die Feynman-Kac-Formel auch mit Hilfe des Martingal-Zugangs beweisen.

2.3. Martingal-Zugang
Die Idee beruhrt auf der Tatsache, dass für alle $f \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$

$$C_t^f := f(X_t) - \int_0^t \mathcal{G}f(X_s)ds$$

ein Martingal ist. Aus der Itô-Formel folgt

$$d(\exp(-A_t)f(X_t)) = \exp(-A_t)(\mathcal{G}f(X_t) - V(X_t)f(X_t))dt + \exp(-A_t)dC_t^f$$

(siehe A.7). Also ist

$$\exp(-A_t)f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \exp(-A_s)\mathcal{G}^V f(X_s)ds + N_t, \tag{21}$$

wobei $\mathcal{G}^V f(x) := \mathcal{G}f(x) - V(x)f(x)$ und $N_t := \int_0^t \exp(-A_s)dC_s^f$ ist.
Die wichtige Tatsache ist, dass N ein stochastisches Integral eines stetigen beschränkten Prozesses bezüglich eines Martingals ein Martingal ist. Wir bilden den Erwartungswert $\mathbf{E}_x$ in (21) und erhalten

$$P_t^V f(x) - f(x) = \int_0^t P_s^V \mathcal{G}^V f(x)ds.$$

Dies entspricht (20).

Mit der Feynman-Kac-Formel meinen wir irgendeine der Gleichungen (18),(19), und (20).

Durch den Martingal-Zugang hatten auch D. Revuz und M. Yor in [RY91] die Feynman-Kac-Formel bewiesen.

3. Folgende Proposition ist die Feynman-Kac-Formel, die in [RY91] steht.

Proposition 3.4 *(Feynman-Kac-Formel) Wenn $\phi \in C^2$ ist, dann folgt*

$$\mathcal{G}^V \phi = \mathcal{G}\phi - V\phi.$$

Beweis. Sei $\phi \in C_c^\infty$, dann ist

$$M_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \mathcal{G}\phi(X_s)ds$$

ein P_x-Martingal (siehe [RY91], Proposition 2.2). Aus der Itô-Formel ergibt sich

$$\begin{aligned} d(N_t\phi(X_t)) &= N_t d\phi(X_t) + \phi(X_t)dN_t + dN_t d\phi(X_t) \\ &= N_t(dM_t^\phi + \mathcal{G}\phi(X_t)dt) - \phi(X_t)N_tV(X_t)dt - N_tV(X_t)dt(dM_t^\phi + \mathcal{G}\phi(X_t)dt) \\ &= N_t(\mathcal{G}\phi(X_t) - V(X_t)\phi(X_t))dt + N_t dM_t^\phi, \end{aligned}$$

wobei $N_t := \exp(-\int_0^t V(X_s)ds)$ ist. Folglich ist

$$N_t\phi(X_t) = \phi(X_0) + \int_0^t N_s(\mathcal{G} - V(X_s))\phi(X_s)ds + \int_0^t N_s dM_s^\phi.$$

Der letzte Term in dieser Gleichung ist ein P_x-Martingal. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x^V(\phi(X_t)) &= \mathbf{E}_x^V(\phi(X_0)) + \mathbf{E}_x^V(\int_0^t (\mathcal{G} - V(X_s))\phi(X_s)ds) \\ &= \mathbf{E}_x^V(\phi(X_0)) + \mathbf{E}_x^V(\int_0^t \mathcal{G}^V\phi(X_s)ds), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{G}^V := \mathcal{G} - V$ ist. Benutze Proposition 2.2 und Definition 2.1 in [RY91], dann gilt

$$\mathcal{G}^V\phi = \mathcal{G}\phi - V\phi$$

für alle $\phi \in C^2$. ■

3.2 Die Feynman-Kac-Formel als Lösung eines Anfangswertproblems

4. In [Øks98] wird die Feynman-Kac-Formel mit Hilfe des infinitesimalen Generators bewiesen. Sie wird hier als Lösung der partiellen Differentialgleichung gezeigt.

In der Einleitung zu diesem Abschnitt wurde bereits erwähnt, dass es einen Zusammenhang zwischen der Feynman-Kac-Formel und der Kolmogorov-Rückwärtsgleichung gibt. Deswegen stellen wir zuerst die Kolmogorov-Rückwärtsgleichung vor, bevor wir die Feynman-Kac-Formel in [Øks98] beweisen.

Satz 3.16 *(Kolmogorov-Rückwärtsgleichung) Sei X_t eine Itô-Diffusion auf $\mathbb{R}^n$ mit dem Generator A und $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$.*
a. Definiere

$$u(t,x) = \mathbf{E}_x(f(X_t)). \tag{22}$$

Dann ist $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}_A$ für alle t und es gilt

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x), \; t > 0, \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{23}$$

$$u(0,x) = f(x), \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{24}$$

wobei der Generator A auf die Funktion $x \mapsto u(t,x)$ angewendet wird.

b. Wenn die Funktion $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ beschränkt ist und wenn sie Lösung von (23), (24) ist, dann folgt $w(t,x) = u(t,x)$ wie in (22).

Beweis. a. Sei $g(x) = u(t,x)$. Weil $t \mapsto u(t,x)$ differenzierbar ist, haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{E}_x(g(X_r)) - g(x)}{r} &= \frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{X_r}(f(X_t))) - \mathbf{E}_x(f(X_t))) \\
&= \frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(f(X_{t+r})|\,\mathcal{F}_r)) - \mathbf{E}_x(f(X_t))) \\
&= \frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(f(X_{t+r})) - \mathbf{E}_x(f(X_t))) \\
&= \frac{u(t+r,x) - u(t,x)}{r} \underset{r \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$Au(t,x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mathbf{E}_x(g(X_r)) - g(x)}{r}$$

existiert und

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x)$$

ist. Nach der Definition der Funktion u folgt

$$u(0,x) = f(x), \; x \in \mathbb{R}^n.$$

b. Sei $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ eine Funktion, die die Gleichungen (23) und (24) erfüllt. Dann ist

$$\tilde{A}w := -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = 0, \; t > 0, \; x \in \mathbb{R}^n \tag{25}$$

und

$$w(0,x) = f(x), \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{26}$$

Fixiere $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ und definiere den Prozess Y_t in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $Y_t := (s-t, X_t^{0,x}), \; t \geq 0$. Dann hat Y_t den Generator $\tilde{A}$. Aus Gleichung (25) und der Dynkin-Formel folgt für alle $t \geq 0$ und $T > 0$,

$$\mathbf{E}_{s,x}(w(Y_{t \wedge \tau_r})) = w(s,x) + \mathbf{E}_{s,x}(\int_0^{t \wedge \tau_r} \tilde{A}w(Y_r)dr) = w(s,x),$$

wobei $\tau_r = \inf\{t > 0; |X_t| \geq R\}$ ist. Wenn $R \to \infty$, dann folgt für alle $t \geq 0$

$$w(s,x) = \mathbf{E}_{s,x}(w(Y_t)).$$

Für $t = s$ folgt mit Gleichung (26)

$$w(s,x) = \mathbf{E}_{s,x}(w(Y_s)) = \mathbf{E}(w(0, X_s^{0,x})) = \mathbf{E}(f(X_s^{0,x})) = \mathbf{E}_x(f(X_s)).$$

■

Satz 3.17 *(Feynman-Kac-Formel) Sei X_t eine Itô-Diffusion auf $\mathbb{R}^n$ mit dem Generator A. Ferner sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und die Funktion $V \in C(\mathbb{R}^n)$ nach unten beschränkt.*
a. Setze

$$v(t,x) = \mathbf{E}_x(f(X_t)\exp(-\int_0^t V(X_s)ds)). \tag{27}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} &= Av(t,x) - V(x)v(t,x), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, && (28) \\ v(0,x) &= f(x), \ x \in \mathbb{R}^n. && (29) \end{aligned}$$

b. Wenn die Funktion $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}_+$ beschränkt auf $K \times \mathbb{R}^n$ ist und wenn sie Lösung von (28), (29) ist, dann folgt $w(t,x) = v(t,x)$ wie in (27).

Beweis. a. Sei

$$X_t(w) = x + \int_0^t u(s,w)ds + \int_0^t \sigma(s,w)dB_s(w).$$

Setze $Y_t = f(X_t)$ und $Z_t = \exp(-\int_0^t V(X_s)ds)$. Dann ist

$$dY_t = (\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})dt + \sum_i \sum_k \sigma_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_i}dB_t^k$$

und

$$dZ_t = -Z_t V(X_t)dt.$$

Aus der Itô-Formel folgt $d(Y_t Z_t) = Y_t dZ_t + Z_t dY_t$. Weil der Prozess $Y_t Z_t$ ein Itô-Prozess ist, folgt aus Lemma 7.3.2 in [Øks98], dass die Funktion $v(t,x) = \mathbf{E}_x(Y_t Z_t)$ differenzierbar bezüglich t ist. Aus Gleichung (27) und der Markoveigenschaft folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(v(t,X_r)) - v(t,x)) &= \frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{X_r}(Z_t f(X_t))) - \mathbf{E}_x(Z_t f(X_t))) \\ &= \frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(f(X_{t+r})\exp(-\int_0^t V(X_{s+r})ds)|\mathcal{F}_r)) \\ &\quad -\mathbf{E}_x(Z_t f(X_t))) \\ &= \frac{1}{r}\mathbf{E}_x(Z_{t+r}\exp(\int_0^r V(X_s)ds)f(X_{t+r}) - Z_t f(X_t)) \\ &= \frac{1}{r}\mathbf{E}_x(Z_{t+r}f(X_{t+r}) - Z_t f(X_t)) \\ &\quad +\frac{1}{r}\mathbf{E}_x(Z_{t+r}f(X_{t+r})(\exp(\int_0^r V(X_s)ds) - 1)). \end{aligned}$$

Wir haben

$$\frac{1}{r}\mathbf{E}_x(Z_{t+r}f(X_{t+r}) - Z_t f(X_t)) + \frac{1}{r}\mathbf{E}_x(Z_{t+r}f(X_{t+r})(\exp(\int_0^r V(X_s)ds) - 1))$$

$$\underset{r\to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + V(x)v(t,x),$$

weil im letzten Term gilt

$$\frac{1}{r}Z_{t+r}f(X_{t+r})(\exp(\int_0^r V(X_s)ds) - 1) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} f(X_t)Z_t V(X_0).$$

Also ist

$$Av(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + V(x)v(t,x).$$

Nach der Definition der Funktion v folgt

$$v(0,x) = f(x).$$

b. Sei $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ eine Funktion, die die Gleichungen (28) und (29) erfüllt und für alle kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}_+$ beschränkt auf $K \times \mathbb{R}^n$ ist. Dann ist

$$\hat{A}w(t,x) := \frac{-\partial w}{\partial t} + Aw - Vw = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{30}$$

und

$$w(0,x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{31}$$

Fixiere $(s,x,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ und definiere $H_t = (s-t, X_t^{0,x}, Z_t)$ mit $Z_t := z + \int_0^t V(X_s)ds$. Dann folgt, dass H_t eine Itô-Diffusion mit dem Generator

$$A_H\phi(s,x,z) = -\frac{\partial\phi}{\partial s} + A\phi + V(x)\frac{\partial\phi}{\partial z},\ \phi \in C_c^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

ist. Aus der Dynkin-Formel (siehe A.8) folgt für alle $t \geq 0, R > 0$

$$\mathbf{E}_{s,x,z}(\phi(H_{t\wedge\tau_R})) = \phi(s,x,z) + \mathbf{E}_{s,x,z}(\int_0^{t\wedge\tau_R} A_H\phi(H_r)dr),$$

wobei $\tau_R = \inf\{t > 0 : |H_t| \geq R\}$ ist. Definiere $\phi(s,x,z) = \exp(-z)w(s,x)$, dann folgt aus Gleichung (30)

$$A_H\phi(s,x,z) = \exp(-z)(-\frac{\partial w}{\partial s} + Aw - V(x)w) = 0.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
w(s,x) &= \phi(s,x,0)\\
&= \mathbf{E}_{s,x,0}(\phi(H_{t\wedge\tau_R}))\\
&= \mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^{t\wedge\tau_R} V(X_r)dr)w(s-t\wedge\tau_R, X_{t\wedge\tau_R}^{0,x}))\\
&\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^t V(X_r)dr)w(s-t, X_t^{0,x})),
\end{aligned}$$

weil $w(r,x)$ für $(r,x) \in K \times \mathbb{R}^n$ beschränkt ist. Wählen wir $t = s$, so folgt mit Gleichung (31)

$$\begin{aligned} w(s,x) &= \mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^s V(X_r)dr)w(0,X_s^{0,x})) \\ &= \mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^s V(X_r)dr)f(X_s)) \\ &= v(s,x). \end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.3 *Die Funktion $v(t,x)$ in (27) ist die Lösung der partiellen Differentialgleichung (28) mit Anfangsbedingung (29) genau dann, wenn die Halbgruppe P_t^V in (13) den Generator wie in (14) hat:*

Wir haben

$$P_t^V f(x) = v(t,x).$$

Wenn die Funktion $v(t,x)$ in (27) die Lösung der partiellen Differentialgleichung (28) mit Anfangsbedingung (29) ist, dann folgt

$$\begin{aligned} L_V f(x) &:= -\lim_{t\to 0} \frac{P_t^V f(x) - f(x)}{t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) \mid_{t=0} \\ &= -\frac{1}{2}\Delta f(x) + V(x)f(x). \end{aligned}$$

Wenn die Halbgruppe P_t^V in (13) den Generator wie in (14) hat, dann ist

$$v(0,x) = P_0^V f(x) = f(x)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) &= \lim_{h\to 0} \frac{P_{t+h}^V f(x) - P_t^V f(x)}{h} \\ &= P_t^V \lim_{h\to 0} \frac{P_h^V f(x) - f(x)}{h} \\ &= P_t^V(-L_V f(x)) \\ &= -L_V(P_t^V f(x)) \\ &= \frac{1}{2}\Delta v(t,x) - V(x)v(t,x). \end{aligned}$$

Zum Schluss betrachten wir eine andere Art der Feynman-Kac-Formel, die an [WW90] angelehnt ist.

5. In [WW90] wird die Feynman-Kac-Formel durch die Eigenschaft des Martingals bewiesen.

Eine probabilistische Darstellung der Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi + L_t\psi = 0$$

wurde in Korollar 2.1 gegeben. Die Feynman-Kac-Formel in (33) gibt eine probabilistische Darstellung der Lösung der allgemeineren Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -L_t\psi + v\psi,$$

die wir im folgenden Satz beweisen werden.

Satz 3.18 *Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und X die Lösung von*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t,$$

wobei die Funktionen $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ meßbar und beschränkt auf den kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ sind und $B = (B^1, B^2, ..., B^d)^T$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist. Sei T eine Stoppzeit, so dass $X_{\cdot\wedge T} \in G$ fast sicher ist, und sei $v : G \to \mathbb{R}$ eine lokal beschränkte Borelsche Abbildung. Ist die Funktion $\psi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times G)$ die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -L_t\psi + v\psi,$$

dann ist der Prozess

$$(\psi(t\wedge T, X_{t\wedge T})\exp(-\int_0^{t\wedge T} v(X_s)ds))_{t\geq 0} \tag{32}$$

ein lokales Martingal. Insbesondere, wenn er die Bedingungen der Integrierbarkeit erfüllt, so dass er ein Martingal auf $[0,t]$ ist, und $X_0 = x$ fast sicher ist, dann folgt

$$\psi(0,x) = \mathbf{E}_x(\psi(t\wedge T, X_{t\wedge T})\exp(-\int_0^{t\wedge T} v(X_s)ds)). \tag{33}$$

Beweis. Weil $(\frac{\partial}{\partial s} + L_s)\psi = v\psi$ ist, folgt aus Satz 2.3, dass

$$\psi(t\wedge T, X_{t\wedge T}) - \int_0^{t\wedge T} v(X_s)\psi(s, X_s)ds$$

ein lokales Martingal ist. Setze $\Psi = (\psi(t\wedge T, X_{t\wedge T}))_{t\geq 0}$ und $V = (v(X_{t\wedge T}))_{t\geq 0}$, d.h. $d\Psi - V\Psi ds \in dM_c$. Weil v lokal beschränkt auf $\mathbb{R}^n$ ist und X fast sicher stetige Pfade hat, ist V ein lokal beschränkter Prozess. Also liegt der Prozess A mit $A_t = -\int_0^t V(X_s)ds$ in A_c. Folglich ist $e^A \in A_c$. Aus der partiellen Integration folgt

$$\begin{aligned} de^A\Psi &= e^A d\Psi + \Psi de^A \\ &= e^A d\Psi + \Psi e^A dA \\ &= e^A(d\Psi - \Psi V dt). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass der Prozess $e^A\Psi$ bzw. der Prozess in (32) in M_c liegt. Wenn dieses lokale Martingal ein Martingal bis zum Zeitpunkt t ist, dann gilt

$$\mathbf{E}_x(\psi(t\wedge T, X_{t\wedge T})\exp(-\int_0^{t\wedge T} v(X_s)ds)) = \psi(0,x).$$

■

Diese Form der Feynman-Kac-Formel kann man auch mit exponentiellen Martingalen beweisen. Bevor wir dies tun, noch ein Satz zur Erinnerung.

Wir wissen, dass die Gleichung $z = e^m$ die Lösung der Differentialgleichung $\frac{dz}{dm} = z$ mit $z(0) = 1$ ist. Analog, sei M ein Diffusionsprozess. Wir betrachten nun die stochastische Differentialgleichung

$$dZ = ZdM,\ Z_0 = 1. \tag{34}$$

Folgender Satz liefert die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung.

Satz 3.19 *Sei M ein fast sicher stetiger Diffusionsprozess mit $M_0 = 0$. Der Prozess Z, der durch*

$$Z_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$$

gegeben ist, ist die einzige Lösung der Gleichung (34). Wenn $M \in M_c$ ist, dann liegt der Prozess Z auch in M_c.

Beweis. (siehe [WW90], Theorem 8.2.1) ■

Jetzt benutzen wir diesen Satz, um eine andere Art des Beweises der Feynman-Kac-Formel durchzuführen.

Zuerst konstruieren wir den Prozess Z des zeitabhängigen Diffusionsprozesses.
Sei X eine Lösung des Diffusionsprozesses auf $\mathbb{R}^n$

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t;\ X_0 = x,$$

wobei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist und die Funktionen b, σ die Bedingungen aus Satz 2.1 erfüllen. Weiter habe die Funktion b die Form $b(t,y) = \nabla \log\varphi(t,y)$, wobei $\varphi \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ eine positive Funktion ist und ∇ den Gradienten bezeichnet. Aus der Itô-Formel folgt

$$\begin{aligned} d\ln\varphi(t,X_t) &= \nabla\ln\varphi(t,X_t)\sigma(t,X_t)dB_t + (\nabla\ln\varphi(t,X_t)b(t,X_t) + \partial_t\ln\varphi(t,X_t) \\ &\quad + \frac{\sigma\sigma^T}{2}\Delta\ln\varphi(t,X_t))dt, \end{aligned}$$

wobei Δ der Laplace-Operator ist. Durch eine weitere Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_t\ln\varphi + \frac{\sigma\sigma^T}{2}\Delta\ln\varphi &= \frac{1}{\varphi}\partial_t\varphi + \frac{\sigma\sigma^T}{2}(\frac{1}{\varphi}\Delta\varphi - \frac{1}{\varphi^2}|\nabla\varphi|^2) \\ &= -\frac{\sigma\sigma^T}{2}|\nabla\ln\varphi|^2 + \frac{1}{\varphi}(\partial_t + \frac{\sigma\sigma^T}{2}\Delta)\varphi, \end{aligned}$$

wobei $|\,.\,|$ die Euklidische Norm bezeichnet. Folglich ist

$$\begin{aligned} d\ln\varphi(t,X_t) &= \nabla\ln\varphi(t,X_t)\sigma(t,X_t)dB_t + (\nabla\ln\varphi(t,X_t)b(t,X_t) \\ &\quad -\frac{\sigma(t,X_t)\sigma(t,X_t)^T}{2}|\nabla\ln\varphi(t,X_t)|^2 \\ &\quad +\frac{1}{\varphi(t,X_t)}(\partial_t + \frac{\sigma(t,X_t)\sigma(t,X_t)^T}{2}\Delta)\varphi(t,X_t))dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp(\int_0^t \nabla\log\varphi(s,X_s)\sigma(s,X_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s,X_s)\sigma(s,X_s)^T|\nabla\log\varphi(s,X_s)|^2 ds) \\ &= \exp(\int_0^t d\log\varphi(s,X_s) - \int_0^t (\nabla\ln\varphi(s,X_s)b(s,X_s) + \frac{1}{\varphi(s,X_s)}(\partial_s \\ &\quad +\frac{\sigma(s,X_s)\sigma(s,X_s)^T}{2}\Delta)\varphi(s,X_s))ds) \\ &= \exp(\log\varphi(t,X_t) - \log\varphi(0,X_0) - \int_0^t (\frac{1}{\varphi(s,X_s)}(b(s,X_s)\nabla + \partial_s \\ &\quad +\frac{\sigma(s,X_s)\sigma(s,X_s)^T}{2}\Delta)\varphi(s,X_s))ds) \\ &= \exp(\log\frac{\varphi(t,X_t)}{\varphi(0,X_0)} - \int_0^t (\frac{1}{\varphi(s,X_s)}(\partial_s + L_s)\varphi(s,X_s))ds) \\ &= \frac{\varphi(t,X_t)}{\varphi(0,X_0)}\exp(-\int_0^t \frac{(\partial_s + L_s)\varphi(s,X_s)}{\varphi(s,X_s)}ds), \end{aligned} \tag{35}$$

wobei $L_s := b\nabla + \frac{\sigma\sigma^T}{2}\Delta$ ist.

Weil $\int_0^t \nabla\log\varphi(s,X_s)\sigma(s,X_s)dB_s$ ein lokales Martingal ist, erweist sich mit Satz 3.19 der Prozess Z bzw.

$$(\frac{\varphi(t,X_t)}{\varphi(0,X_0)}\exp(-\int_0^t \frac{(\partial_s + L_s)\varphi(s,X_s)}{\varphi(s,X_s)}ds))_{t\geq 0}$$

auch als ein lokales Martingal.

Jetzt betrachten wir zwei Fälle der Funktion φ.

1. Sei die Funktion φ die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -L_t\varphi + v\varphi.$$

Aus Gleichung (35) folgt

$$Z_t = \frac{\varphi(t,X_t)}{\varphi(0,X_0)}\exp(-\int_0^t v(X_s)ds).$$

Also ist der Prozess

$$(\frac{\varphi(t,X_t)}{\varphi(0,X_0)}\exp(-\int_0^t v(X_s)ds))_{t\geq 0}$$

ein lokales Martingal. Insbesondere, wenn er die Bedingungen der Integrierbarkeit erfüllt, so dass er ein Martingal auf $[0,t]$ ist, und $X_0 = x$ fast sicher ist, dann folgt

$$\varphi(0,x) = \mathbf{E}_x(\varphi(t,X_t)\exp(-\int_0^t v(X_s)ds)),$$

weil $\mathbf{E}_x(Z_t) = \mathbf{E}_x(Z_0) = 1$ ist. Dies ist ein anderer Beweis der Feynman-Kac-Formel.

• Ist der Prozess X eine Brownsche Bewegung und die Funktion φ die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{1}{2}\Delta\varphi + v\varphi,$$

dann ist der Prozess

$$(Z_t)_{t\geq 0} = (\frac{\varphi(t,B_t)}{\varphi(0,B_0)}\exp(-\int_0^t v(B_s)ds))_{t\geq 0}$$

ein lokales Martingal. Wenn der Prozess Z die Bedingungen der Integrierbarkeit erfüllt, so dass er ein Martingal auf $[0,t]$ ist, und $B_0 = X_0 = x$ fast sicher ist, dann folgt

$$\varphi(0,x) = \mathbf{E}_x(\varphi(t,B_t)\exp(-\int_0^t v(B_s)ds)),$$

weil $\mathbf{E}_x(Z_t) = \mathbf{E}_x(Z_0) = 1$ ist.

2. Sei die Funktion φ eine raum-zeit-harmonische Funktion für den Operator $(\frac{\partial}{\partial t} + L_t)$, nämlich: Die Funktion φ ist die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi + L_t\varphi = 0.$$

Aus Gleichung (35) folgt

$$Z_t = \frac{\varphi(t,X_t)}{\varphi(0,X_0)}.$$

Also ist der Prozess

$$(\frac{\varphi(t,X_t)}{\varphi(0,X_0)})_{t\geq 0}$$

ein lokales Martingal. Insbesondere, wenn er die Bedingungen der Integrierbarkeit erfüllt, so dass er ein Martingal auf $[0,t]$ ist, und $X_0 = x$ fast sicher ist, dann folgt

$$\varphi(0,x) = \mathbf{E}_x(\varphi(t,X_t)),$$

weil $\mathbf{E}_x(Z_t) = \mathbf{E}_x(Z_0) = 1$ ist. Dies ist ein anderer Beweis von Korollar 2.1.

Jetzt konstruieren wir den Prozess Z für eine zeitlich homogene Itô-Diffusion.
Sei X eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^n$

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t;\ X_0 = x,$$

wobei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist und die Funktionen b, σ die Bedingungen wie in Definition 2.2 erfüllen. Weiter habe die Funktion b die Form $b(y) = \nabla \log \varphi(y)$, wobei $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine positive Funktion ist.
Aus der Itô-Formel folgt

$$d \ln \varphi(X_t) = \nabla \ln \varphi(X_t)\sigma(X_t)dB_t + (\nabla \ln \varphi(X_t)b(X_t) + \frac{\sigma(X_t)\sigma(X_t)^T}{2}\Delta \ln \varphi(X_t))dt,$$

wobei Δ der Laplace-Operator ist. Durch eine weitere Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\sigma\sigma^T}{2}\Delta \ln \varphi &= \frac{\sigma\sigma^T}{2}(\frac{1}{\varphi}\Delta\varphi - \frac{1}{\varphi^2}|\nabla\varphi|^2) \\ &= -\frac{\sigma\sigma^T}{2}|\nabla \ln \varphi|^2 + \frac{\sigma\sigma^T}{2}\frac{1}{\varphi}\Delta\varphi, \end{aligned}$$

wobei $|\,.\,|$ die Euklidische Norm bezeichnet. Daraus folgt

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp(\int_0^t \nabla \log \varphi(X_s)\sigma(X_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla \log \varphi(X_s)|^2\sigma(X_s)\sigma(X_s)^T ds) \\ &= \exp(\int_0^t d\log\varphi(X_s) - \int_0^t \nabla \log \varphi(X_s)b(X_s)ds - \int_0^t \frac{1}{2}\sigma(X_s)\sigma(X_s)^T\frac{1}{\varphi(X_s)}\Delta\varphi(X_s)ds) \\ &= \exp(\log\varphi(X_t) - \log\varphi(X_0) - \int_0^t (\frac{1}{\varphi(X_s)}(b(X_s)\nabla + \frac{1}{2}\sigma(X_s)\sigma(X_s)^T\Delta)\varphi(X_s))ds) \\ &= \exp(\log\frac{\varphi(X_t)}{\varphi(X_0)} - \int_0^t (\frac{1}{\varphi(X_s)}L\varphi(X_s))ds) \\ &= \frac{\varphi(X_t)}{\varphi(X_0)}\exp(-\int_0^t \frac{L\varphi(X_s)}{\varphi(X_s)}ds), \end{aligned} \tag{36}$$

wobei $L := b\nabla + \frac{\sigma\sigma^T}{2}\Delta$ ist.

Weil $\int_0^t \nabla \log \varphi(X_s)\sigma(X_s)dB_s$ ein lokales Martingal ist, folgt aus Satz 3.19, dass der Prozess Z bzw.

$$(\frac{\varphi(X_t)}{\varphi(X_0)}\exp(-\int_0^t \frac{L\varphi(X_s)}{\varphi(X_s)}ds))_{t\geq 0}$$

auch ein lokales Martingal ist.

Nun betrachten wir wieder zwei Fälle der Funktion φ.

1. Sei die Funktion φ die Lösung der Gleichung

$$L\varphi = v\varphi.$$

Aus Gleichung (36) folgt

$$Z_t = \frac{\varphi(X_t)}{\varphi(X_0)}\exp(-\int_0^t v(X_s)ds).$$

Also ist der Prozess

$$(\frac{\varphi(X_t)}{\varphi(X_0)}\exp(-\int_0^t v(X_s)ds))_{t\geq 0}$$

ein lokales Martingal. Insbesondere, wenn er die Bedingungen der Integrierbarkeit erfüllt, so dass er ein Martingal auf $[0,t]$ ist, und $X_0 = x$ fast sicher ist, dann folgt

$$\varphi(x) = \mathbf{E}_x(\varphi(X_t)\exp(-\int_0^t v(X_s)ds)),$$

weil $\mathbf{E}_x(Z_t) = \mathbf{E}_x(Z_0) = 1$ ist. Dies ist ein anderer Beweis der Feynman-Kac-Formel für den zeitlich homogenen Fall.

• Ist der Prozess X eine Brownsche Bewegung und die Funktion φ die Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi = v\varphi,$$

dann ist der Prozess

$$(Z_t)_{t\geq 0} = (\frac{\varphi(B_t)}{\varphi(B_0)}\exp(-\int_0^t v(B_s)ds))_{t\geq 0}$$

ein lokales Martingal. Wenn der Prozess Z die Bedingungen der Integrierbarkeit erfüllt, so dass er ein Martingal auf $[0,t]$ ist, und $B_0 = X_0 = x$ fast sicher ist, dann folgt

$$\varphi(x) = \mathbf{E}_x(\varphi(B_t)\exp(-\int_0^t v(B_s)ds)),$$

weil $\mathbf{E}_x(Z_t) = \mathbf{E}_x(Z_0) = 1$ ist.

2. Sei die Funktion φ eine raum harmonische Funktion für den Operator L, nämlich: Die Funktion φ ist die Lösung der Gleichung

$$L\varphi = 0.$$

Aus Gleichung (36) folgt

$$Z_t = \frac{\varphi(X_t)}{\varphi(X_0)}.$$

Also ist der Prozess

$$(\frac{\varphi(X_t)}{\varphi(X_0)})_{t\geq 0}$$

ein lokales Martingal. Insbesondere, wenn er die Bedingungen der Integrierbarkeit erfüllt, so dass er ein Martingal auf $[0,t]$ ist, und $X_0 = x$ fast sicher ist, dann folgt

$$\varphi(x) = \mathbf{E}_x(\varphi(X_t)),$$

weil $\mathbf{E}_x(Z_t) = \mathbf{E}_x(Z_0) = 1$ ist. Dies ist ein anderer Beweis von Korollar 2.1 für den zeitlich homogenen Fall.

Wir können die Version der Dynkin-Formel in Korollar 2.2 auch für den zeitlich homogenen Fall umformulieren:

$$\mathbf{E}_x(\varphi(X_T)) - \varphi(x) = \mathbf{E}_x(\int_0^T L\varphi(X_s)ds)$$

für alle $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ und für beschränkte Stoppzeit T.

Bemerkung 3.4 *Die Darstellung der Feynman-Kac-Formel, die wir mit exponentiellen Martingalen beweisen, ist äquivalent zu der Feynman-Kac-Formel in Satz 3.17.*
Wir bezeichnen zum **Beweis** *die beiden Aussagen mit* **A** *bzw.* **B***:*

A. Satz 3.17 (Feynman-Kac-Formel): Die Funktion

$$\psi(t,x) = \mathbf{E}_x(f(X_t)\exp(-\int_0^t v(X_s)ds))$$

ist die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) &= L_t\psi(t,x) - v(x)\psi(t,x), \\ \psi(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

B. Die Darstellung der Feynman-Kac-Formel, die mit exponentiellen Martingalen bewiesen wird bzw. die in [WW90] steht: Die Funktion

$$\varphi(0,x) = \mathbf{E}_x(\varphi(t,X_t)\exp(-\int_0^t v(X_s)ds))$$

ist die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) = -L_t\varphi(t,x) + v(x)\varphi(t,x).$$

Jetzt zeigen wir **A**$\Leftrightarrow$**B**.

(**A**$\Leftarrow$**B**) Definiere $\psi(s,x) = \varphi(t^* - s, x)$, wobei die Funktion φ die Lösung der Gleichung $\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -L_t\varphi + v\varphi$ ist. Folglich ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\psi(s,x) &= -\frac{\partial}{\partial s}\varphi(t^* - s, x) \\ &= -(-L_s\varphi(t^* - s, x) + v(x)\varphi(t^* - s, x)) \\ &= L_s\varphi(t^* - s, x) - v(x)\varphi(t^* - s, x) \\ &= L_s\psi(s,x) - v(x)\psi(s,x). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \psi(t^*, x) &= \varphi(0,x) \\ &= \mathbf{E}_x(\varphi(t^*, X_{t^*})\exp(-\int_0^{t^*} v(X_s)ds)) \\ &= \mathbf{E}_x(\psi(0, X_{t^*})\exp(-\int_0^{t^*} v(X_s)ds)) \\ &= \mathbf{E}_x(f(X_{t^*})\exp(-\int_0^{t^*} v(X_s)ds)), \end{aligned}$$

wobei $\psi(0,x) := f(x)$ ist.

(**A**⇒**B**) Definiere $\psi(s,x) = \varphi(t^* - s, x)$, wobei die Funktion ψ die Lösung der Gleichung $\frac{\partial}{\partial t}\psi = L_t\psi - v\psi$ ist. Folglich ist

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial s}\varphi(t^* - s, x) &= \frac{\partial}{\partial s}\psi(s,x) \\ &= L_s\psi(s,x) - v(x)\psi(s,x) \\ &= L_s\varphi(t^* - s, x) - v(x)\varphi(t^* - s, x). \end{aligned}$$

Also ist die Funktion φ die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi = -L_s\varphi + v\varphi.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \varphi(0,x) &= \psi(t^*, x) \\ &= \mathbf{E}_x(f(X_{t^*})\exp(-\int_0^{t^*} v(X_s)ds)) \\ &= \mathbf{E}_x(\psi(0, X_{t^*})\exp(-\int_0^{t^*} v(X_s)ds)) \\ &= \mathbf{E}_x(\varphi(t^*, X_{t^*})\exp(-\int_0^{t^*} v(X_s)ds)). \end{aligned}$$

3.3 Die Feynman-Kac-Formel als Lösung eines Randwertproblems

Im Folgenden betrachten wir die Feynman-Kac-Formel als Lösung eines Randwertproblems.

Satz 3.20 *(Feynman-Kac-Formel für ein Randwertproblem) Sei X eine (zeitlich homogene) Itô-Diffusion auf $\mathbb{R}^n$ mit dem Generator L auf $C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, so dass die Kegelbedingungen für ∂D erfüllt sind (siehe [CZ95], 1.6, Seite 23). Weiter sei $\phi \in C(\partial D)$, $g \in C(D)$ mit $\mathbf{E}_x(\int_0^{\tau_D} |g(X_t)|dt) < \infty$; $\tau_D = \inf\{t > 0; X_t \notin D\}$ und $q \geq 0$ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Betrachte das Randwertproblem*

$$\begin{aligned} Lh(x) - q(x)h(x) &= -g(x), \ \forall x \in D, &(37)\\ \lim_{x\to y} h(x) &= \phi(y), \ y \in \partial D, &(38) \end{aligned}$$

wobei $h \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ beschränkt ist. Dann ist

$$h(x) = \mathbf{E}_x(\phi(X_{\tau_D})\exp(-\int_0^{\tau_D} q(X_s)ds) + \int_0^{\tau_D} g(X_t)\exp(-\int_0^t q(X_s)ds)dt).$$

Beweis. Betrachte $h(X_t)\exp(Y_t)$, wobei $Y_t := -\int_0^t q(X_s)ds$ ist. Also ist

$$d\exp(Y_t) = -q(X_t)\exp(Y_t)dt$$

und

$$\begin{aligned} dh(X_t) &= \sum_i \frac{\partial h(X_t)}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 h(X_t)}{\partial x_i \partial x_j} dX_t^i dX_t^j \\ &= \sum_i \frac{\partial h(X_t)}{\partial x_i}(b_i(X_t)dt + \sigma_i(X_t)dB_t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}(X_t)\frac{\partial^2 h(X_t)}{\partial x_i \partial x_j}dt. \end{aligned}$$

Weil $dh(X_t)d\exp(Y_t) = 0$ ist, folgt aus der Itô-Formel

$$\begin{aligned}
dh(X_t)\exp(Y_t) &= h(X_t)d\exp(Y_t) + \exp(Y_t)dh(X_t) \\
&= \sum_i \sigma_i(X_t)\frac{\partial h(X_t)}{\partial x_i}\exp(Y_t)dB_t + (\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}(X_t)\frac{\partial^2 h(X_t)}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\quad -q(X_t)h(X_t) + \sum_i b_i(X_t)\frac{\partial h(X_t)}{\partial x_i})\exp(Y_t)dt \\
&= \sum_i \sigma_i(X_t)\frac{\partial h(X_t)}{\partial x_i}\exp(Y_t)dB_t - g(X_t)\exp(Y_t)dt \\
&\quad +(\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}(X_t)\frac{\partial^2 h(X_t)}{\partial x_i \partial x_j} - q(X_t)h(X_t) \\
&\quad +\sum_i b_i(X_t)\frac{\partial h(X_t)}{\partial x_i} + g(X_t))\exp(Y_t)dt.
\end{aligned}$$

Folglich ist für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
h(X_t)\exp(Y_t) - h(X_0) &= \int_0^t \sum_i \sigma_i(X_s)\frac{\partial h(X_s)}{\partial x_i}\exp(Y_s)dB_s - \int_0^t g(X_s)\exp(Y_s)ds \\
&\quad + \int_0^t (Lh(X_s) - q(X_s)h(X_s) + g(X_s))\exp(Y_s)ds,
\end{aligned}$$

wobei

$$L := \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ist. Ferner definiere $\tau_n := n \wedge \tau_D$; $n \in \mathbb{N}$, $\tau_D < \infty$ und setze $t = \tau_n$, dann gilt

$$\begin{aligned}
h(X_{\tau_n})\exp(Y_{\tau_n}) - h(x) &= \int_0^{\tau_n} \sum_i \sigma_i(X_s)\frac{\partial h(X_s)}{\partial x_i}\exp(Y_s)dB_s - \int_0^{\tau_n} g(X_s)\exp(Y_s)ds \\
&\quad + \int_0^{\tau_n} (Lh(X_s) - q(X_s)h(X_s) + g(X_s))\exp(Y_s)ds.
\end{aligned}$$

Weil $s < \tau_n \leq \tau_D$ ist, folgt $X_s \in D$. Aus Gleichung (37) folgt

$$h(X_{\tau_n})\exp(Y_{\tau_n}) - h(x) = \int_0^{\tau_n} \sum_i \sigma_i(X_s)\frac{\partial h(X_s)}{\partial x_i}\exp(Y_s)dB_s - \int_0^{\tau_n} g(X_s)\exp(Y_s)ds.$$

Wir bilden den Erwartungswert $\mathbf{E}_x$ in dieser Gleichung und erhalten

$$h(x) = \mathbf{E}_x(h(X_{\tau_n})\exp(Y_{\tau_n})) + \mathbf{E}_x(\int_0^{\tau_n} g(X_s)\exp(Y_s)ds).$$

Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\mathbf{E}_x(\int_0^{\tau_n} g(X_s)\exp(Y_s)ds) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}_x(\int_0^{\tau_D} g(X_s)\exp(Y_s)ds),$$

weil

$$\int_0^{\tau_n} g(X_s)\exp(Y_s)ds \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \int_0^{\tau_D} g(X_s)\exp(Y_s)ds$$

und

$$|\int_0^{\tau_n} g(X_s)\exp(Y_s)ds| \leq \int_0^{\tau_D} |g(X_s)\exp(Y_s)|ds \leq \int_0^{\tau_D} |g(X_s)|ds$$

mit

$$\mathbf{E}_x(\int_0^{\tau_D} |g(X_s)|ds) < \infty$$

gilt. Aus Gleichung (38) haben wir

$$h(X_{\tau_n})\exp(Y_{\tau_n}) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \phi(X_{\tau_D})\exp(Y_{\tau_D}).$$

Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt wieder

$$\mathbf{E}_x(h(X_{\tau_n})\exp(Y_{\tau_n})) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mathbf{E}_x(\phi(X_{\tau_D})\exp(Y_{\tau_D})),$$

weil $|h(X_{\tau_n})\exp(Y_{\tau_n})| \leq |h(X_{\tau_n})| \leq c$, $c > 0$ ist. Folglich ist

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathbf{E}_x(\phi(X_{\tau_D})\exp(Y_{\tau_D})) + \mathbf{E}_x(\int_0^{\tau_D} g(X_s)\exp(Y_s)ds) \\ &= \mathbf{E}_x(\phi(X_{\tau_D})\exp(-\int_0^{\tau_D} q(X_u)du) + \int_0^{\tau_D} g(X_s)\exp(-\int_0^{s} q(X_u)du)ds). \end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.5 *(Feynman-Kac-Formel für das Dirichlet-Problem) Falls $g := 0$ ist, dann ist die Funktion*

$$h(x) = \mathbf{E}_x(\phi(X_{\tau_D})\exp(-\int_0^{\tau_D} q(X_u)du))$$

die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} Lh(x) - q(x)h(x) &= 0, \ \forall x \in D, \\ \lim_{x\to y} h(x) &= \phi(y), \ y \in \partial D. \end{aligned}$$

4 Die Feynman-Kac-Formel für eine andere Anfangsbedingung und eine andere Klasse der Potentiale

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, wurde diese Arbeit durch die in [Bor00] und in [Sim00] dargestellten Feynman-Kac-Formeln angeregt. Wir schwächen die Voraussetzungen an das Potential und an die Anfangsbedingung ab, um den Geltungsbereich der Feynman-Kac-Formel zu erweitern.
In diesem Kapitel hat der Prozess, der in der Feynman-Kac-Formel steht, eine besondere Form: Er ist eine (zeitlich homogene) Itô-Diffusion ξ_1 auf $\mathbb{R}^n$, die die Form

$$\xi_1(t) = x + \int_0^t \sigma(\xi_1(s))dB(s)$$

hat, wobei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist und die Funktion σ die Bedingung (39) erfüllt. In diesem Fall wird in Satz 4.21 gezeigt, dass die Feynman-Kac-Formel die Lösung der zugehörigen partiellen Differentialgleichung darstellt. Weil es den Zusammenhang zwischen der Feynman-Kac-Formel und der Kolmogorov-Rückwärtsgleichung gibt, wird in Satz 4.22 auch eine analoge Darstellung der Lösung der Kolmogorov-Rückwärtsgleichung für einen allgemeineren Diffusionsprozess $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ auf $\mathbb{R}^{2n}$ bewiesen, wobei

$$\begin{aligned}
\xi_1(t) &:= x + \int_0^t \sigma(\xi_1(s))dB(s), \\
\xi_2(t) &:= y + \int_0^t V(\xi_1(s))ds + \int_0^t b(\xi_1(s))dB(s)
\end{aligned}$$

ist. Hierbei ist B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung, die Funktionen $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ sind zweimal stetig differenzierbare Abbildungen mit Eigenschaft (39) und die Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung mit Eigenschaft (42). Satz 4.21 und Satz 4.22 sind die Hauptresultate.
Schließlich wird in dem letzten Teil dieses Kapitels bewiesen, dass die Feynman-Kac-Formel auch für Anfangsbedingungen mit Eigenschaft (56) gilt. Hier ist Satz 4.23 das Hauptresultat .

Bevor wir die Feynman-Kac-Formel und die Kolmogorov-Rückwärtsgleichung beweisen, schreiben wir als Vereinfachung zuerst die oft erscheinenden Bedingungen der Funktionen, die in der Feynman-Kac-Formel bzw. Kolmogorov-Rückwärtsgleichung stehen, auf.

Sei $B(t), t \geq 0$ eine Brownsche Bewegung und es bezeichne $\mathbf{E}_x$ den Erwartungswert bezüglich der Brownschen Bewegung $B(t)$ mit $B(0) = x$. Ferner sei $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die eine von den drei folgenden Eigenschaften erfüllt: Für geeignete $K > 0$, $C > 0$ und $i, j = 1, 2, ..., n$

$$|f(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)| \leq K \tag{39}$$

$$|f(x)| \leq K(1 + \|x\|), \; |\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)| \leq K \tag{40}$$

$$|f(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)| \leq K e^{C\|x\|}, \tag{41}$$

wobei $\|x\|$ die Euklidische Norm des Vektors x bezeichnet.
Sei die Funktion $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ gibt mit

$$|V(x)| \leq \varepsilon \|x\|^2 + C_\varepsilon. \tag{42}$$

4.1 Die allgemeine Feynman-Kac-Formel

Zuerst beweisen wir folgenden Satz. Er besagt, dass die Feynman-Kac-Formel auch für Potentiale V mit Eigenschaft (42) und Anfangsbedingungen f mit Eigenschaft (41) gilt. Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt bereits erwähnt wurde, ist der wichtigste Punkt hierbei, dass man die Existenz von

$$\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t)) \exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))$$

und

$$\mathbf{E}_x(L_{V,\sigma}(f(\xi_1(t)) \exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds)))$$

mit $L_{V,\sigma}$ wie in (43) überprüfen muss.

Satz 4.21 *(Feynman-Kac-Formel) Seien die Funktionen $f(x), V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass sie die Bedingungen (41) und (42) erfüllen. Sei der Prozess ξ_1 eine (zeitlich homogene) Itô-Diffusion auf $\mathbb{R}^n$, die die Form*

$$\xi_1(t) = x + \int_0^t \sigma(\xi_1(s))dB(s)$$

bzw.

$$d\xi_1(t) = \sigma(\xi_1(t))dB(t); \; \xi_1(0) = x$$

hat, wobei B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung ist und die Funktion $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ zweimal stetig differenzierbar mit Eigenschaft (39) ist, nämlich: Für geeignetes $D > 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $i, k, l \in \{1, 2, ..., n\}$, $j \in \{1, 2, ..., d\}$ gilt

$$|\sigma_{ij}(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_k}\sigma_{ij}(x)| + |\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_l}\sigma_{ij}(x)| \leq D.$$

Eine Funktion $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ ist genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}v(t,x) + V(x)v(t,x), \\ v(0,x) &= f(x), \end{aligned}$$

wenn v die folgende probabilistische Darstellung hat:

$$v(t,x) = \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t)) \exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds)), \; t \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Bevor wir die Funktion $v(t,x)$ definieren, zeigen wir zuerst die Existenz von $\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))Z_t)$, d.h. wir zeigen, dass $\mathbf{E}_x(|f(\xi_1(t))Z_t|) < \infty$ ist, wobei $Z_t := \exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds)$ ist. Weil $f(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit Eigenschaft (41) ist und V eine stetige Funktion mit Eigenschaft (42) ist, folgt

$$|f(\xi_1(t))Z_t| \quad \leq \quad K\exp(C\|\xi_1(t)\|)\exp(\int_0^t |V(\xi_1(s))|ds).$$

Wir haben

$$\mathbf{E}_x(\exp(C\|\xi_1(t)\|)) < \infty$$

(siehe A.18) und

$$\mathbf{E}_x(\exp(\int_0^t |V(\xi_1(s))|ds)) < \infty$$

(siehe A.16). Zusammen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\mathbf{E}_x(|f(\xi_1(t))Z_t|) < \infty.$$

Falls $d\xi_1(t) = \sigma(\xi_1(t))dB(t)$ ist, dann folgt aus der Itô-Formel

$$\begin{aligned} df(\xi_1(t)) &= \sum_i \partial_{1i} f(\xi_1(t))d\xi_1^i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial_{1i}\partial_{1j} f(\xi_1(t))d\xi_1^i(t)d\xi_1^j(t) \\ &= \sum_i\sum_k \sigma_{ik}(\xi_1(t))\partial_{1i} f(\xi_1(t))dB_k(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}(\xi_1(t))\partial_{1i}\partial_{1j} f(\xi_1(t))dt, \end{aligned}$$

wobei $\sum_k(\sigma_{ik}\sigma_{jk})(x) := (\sigma\sigma^T)_{ij}(x)$ und $\frac{\partial}{\partial\xi_1^i} := \partial_{1i}$ ist. Definiere $Z_t := \exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds)$. Es folgt

$$dZ_t = Z_t V(\xi_1(t))dt.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} d(f(\xi_1(t))Z_t) &= f(\xi_1(t))dZ_t + Z_t df(\xi_1(t)) \\ &= (\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}(\xi_1(t))\partial_{1i}\partial_{1j} + V(\xi_1(t)))f(\xi_1(t))Z_t dt \\ &\quad + \sum_i\sum_k \sigma_{ik}(\xi_1(t))\partial_{1i} f(\xi_1(t))Z_t dB_k(t). \end{aligned}$$

Aus Satz 2.4 folgt, dass

$$f(\xi_1(t))Z_t - f(x) - \int_0^t L_{V,\sigma} f(\xi_1(s))Z_s ds$$

ein Martingal ist, wobei

$$L_{V,\sigma} := \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}\partial_{1i}\partial_{1j} + V \tag{43}$$

ist, weil $\mathbf{E}_x(\int_0^t(\sum_i\sum_k \sigma_{ik}(\xi_1(s))\partial_{1i} f(\xi_1(s))Z_s)^2 ds) < \infty$ ist. Folglich ist

$$\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))Z_t) - f(x) = \mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,\sigma} f(\xi_1(s))Z_s ds). \tag{44}$$

Aus dem Lemma in A. 21 folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,\sigma}f(\xi_1(s))Z_s ds) &= \mathbf{E}_x\frac{\partial}{\partial t}(\int_0^t L_{V,\sigma}f(\xi_1(s))Z_s ds) \\ &= \mathbf{E}_x(L_{V,\sigma}f(\xi_1(t))Z_t) < \infty, \end{aligned} \tag{45}$$

weil die Familie

$$\{\frac{1}{t-t_0}(\int_{t_0}^t L_{V,\sigma}f(\xi_1(s))Z_s ds)\}_{t\neq t_0,t,t_0\in I}$$

gleichmäßig integrierbar (siehe A. 22) und $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval ist. Aus Gleichung (44) folgt

$$\lim_{t\to 0}\frac{v(t,x)-v(0,x)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,\sigma}f(\xi_1(s))Z_s ds)}{t}$$

bzw.

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,\sigma}f(\xi_1(s))Z_s ds).$$

Aus Gleichung (45) folgt

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \mathbf{E}_x(L_{V,\sigma}f(\xi_1(t))Z_t) < \infty.$$

Wir zeigen nun, dass für $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ mit

$$v(t,x) = \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds)),\ t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^n$$

gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}v(t,x) + V(x)v(t,x), \\ v(0,x) &= f(x).\end{aligned}$$

Aus der Definition der Funktion v und der Markoveigenschaft folgt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(v(t,\xi_1(r))) - v(t,x)) \\ =\ &\frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{\xi_1(r)}(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))) - \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))) \\ =\ &\frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t+r))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s+r))ds)|\mathcal{F}_r)) - \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))) \\ =\ &\frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t+r))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s+r))ds)) - \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))) \\ =\ &\frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t+r))\exp(\int_r^{t+r} V(\xi_1(u))du)) - \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))) \\ =\ &\frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t+r))Z_{t+r}\exp(-\int_0^r V(\xi_1(u))du)) - \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))) \\ =\ &\frac{1}{r}\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t+r))Z_{t+r} - f(\xi_1(t))Z_t) \\ &+\frac{1}{r}\mathbf{E}_x(f(\xi_1(t+r))Z_{t+r}(\exp(-\int_0^r V(\xi_1(u))du) - 1)).\end{aligned}$$

Im letzten Term gilt aber

$$\frac{1}{r} f(\xi_1(t+r)) Z_{t+r} (\exp(-\int_0^r V(\xi_1(u))du) - 1) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} - f(\xi_1(t)) Z_t V(x).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{r} (\mathbf{E}_x(v(t, \xi_1(r))) - v(t,x)) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) - V(x) v(t,x)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v(t,x) + V(x) v(t,x).$$

Unmittelbar aus der Definition der Funktion v folgt

$$v(0,x) = f(x).$$

Analog zu dem Beweis von Satz 3.17 Teil b. können wir zeigen: Wenn $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma \sigma^T)_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v(t,x) + V(x) v(t,x), \\ v(0,x) &= f(x) \end{aligned}$$

ist, dann folgt

$$v(t,x) = \mathbf{E}_x (f(\xi_1(t)) \exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds)), \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

■

Bemerkung 4.6 *Falls $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist, dann ist die Funktion*

$$v(t,x) = \mathbf{E}_x (f(B(t)) \exp(\int_0^t V(B(s))ds)), \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v(t,x) + V(x) v(t,x), \\ v(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

4.2 Die allgemeine Kolmogorov-Rückwärtsgleichung

Im Folgenden behandeln wir die Kolmogorov-Rückwärtsgleichung für einen Diffusionsprozess auf $\mathbb{R}^{2n}$ mit der Form

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)),$$

wobei

$$\xi_1(t) := x + \int_0^t \sigma(\xi_1(s))dB(s), \tag{46}$$

$$\xi_2(t) := y + \int_0^t V(\xi_1(s))ds + \int_0^t b(\xi_1(s))dB(s) \tag{47}$$

ist. Hierbei ist B eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und die Funktionen $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ sind zweimal stetig differenzierbare Abbildungen mit Eigenschaft (39) und die Funktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung mit Eigenschaft (42), nämlich: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C_\varepsilon > 0$, so dass

$$|V_i(x)| \leq \varepsilon \|x\|^2 + C_\varepsilon$$

für alle i ist.
Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt bereits erwähnt, ist der wichtigste Punkt hierbei, dass man die Existenz von $\mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t), \xi_2(t)))$ und $\mathbf{E}_x(L_{V,b,\sigma}Q(\xi_1(t), \xi_2(t)))$ mit $L_{V,b,\sigma}$ wie in (48) überprüfen muss.

Satz 4.22 *(Kolmogorov-Rückwärtsgleichung) Sei $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ ein $2n$-dimensionaler Diffusionsprozess wie oben. Weiter sei $Q(x, y)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die die Bedingung (41) erfüllt. Eine Funktion $q \in C^{1,2,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ist genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} q(t,x,y) &= \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\sigma\sigma^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} q(t,x,y) + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(bb^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} q(t,x,y) \\
&\quad + \sum_i V_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i} q(t,x,y) + \sum_{i,k}(\sigma b^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_k} q(t,x,y), \\
q(0,x,y) &= Q(x,y),
\end{aligned}$$

wenn q die folgende probabilistische Darstellung hat:

$$q(t,x,y) = \mathbf{E}_x(Q(\xi(t))).$$

Beweis. Bevor wir die Funktion $q(t,x,y)$ definieren, zeigen wir zuerst die Existenz von $\mathbf{E}_x(Q(\xi(t)))$, d.h. wir zeigen, dass $\mathbf{E}_x(|Q(\xi(t))|) < \infty$ ist. Weil $Q(x,y)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit Eigenschaft (41) ist, folgt

$$\begin{aligned}
|Q(\xi(t))| &= |Q(\xi_1(t), \xi_2(t))| \\
&\leq K \exp(C(\|\xi_1(t)\| + \|\xi_2(t)\|)).
\end{aligned}$$

Um $\mathbf{E}_x(|Q(\xi(t))|) < \infty$ zu zeigen, brauchen wir nur

$$\mathbf{E}_x(\exp(C(\|\xi_1(t)\| + \|\xi_2(t)\|))) < \infty$$

zu zeigen. Wir haben

$$\mathbf{E}_x(\exp(C\|\xi_1(t)\|)) < \infty$$

(siehe A.18) und

$$\mathbf{E}_x(\exp(C\|\xi_2(t)\|)) < \infty$$

(siehe A.19). Zusammen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\mathbf{E}_x(\exp(C(\|\xi_1(t)\| + \|\xi_2(t)\|))) < \infty.$$

Aus der Itô-Formel für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $Q(x,y)$, die die Bedingung (41) erfüllen, haben wir

$$\begin{aligned} dQ(\xi_1(t),\xi_2(t)) &= (\sum_i \partial_{1i} d\xi_1^i(t) + \partial_{2i} d\xi_2^i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \partial_{1i}\partial_{1k} d\xi_1^i(t) d\xi_1^k(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,k} \partial_{2i}\partial_{2k} d\xi_2^i(t) d\xi_2^k(t) + \sum_{i,k} \partial_{1i}\partial_{2k} d\xi_1^i(t) d\xi_2^k(t)) Q(\xi_1(t),\xi_2(t)) \\ &= (\sum_i\sum_j \sigma_{ij}(\xi_1(t))\partial_{1i} dB_j(t) + \sum_i\sum_j b_{ij}(\xi_1(t))\partial_{2i} dB_j(t) \\ &\quad + \sum_i V_i(\xi_1(t))\partial_{2i} dt + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\sigma\sigma^T)_{ik}(\xi_1(t))\partial_{1i}\partial_{1k} dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(bb^T)_{ik}(\xi_1(t))\partial_{2i}\partial_{2k} dt \\ &\quad + \sum_{i,k}(\sigma b^T)_{ik}(\xi_1(t))\partial_{1i}\partial_{2k} dt) Q(\xi_1(t),\xi_2(t)), \end{aligned}$$

wobei $\frac{\partial}{\partial \xi_1^i} := \partial_{1i}$ und $\frac{\partial}{\partial \xi_2^i} := \partial_{2i}$ ist. Aus Satz 2.4 folgt, dass

$$Q(\xi_1(t),\xi_2(t)) - Q(x,y) - \int_0^t L_{V,b,\sigma} Q(\xi_1(s),\xi_2(s)) ds$$

ein Martingal ist, wobei

$$L_{V,b,\sigma} := \sum_i V_i \partial_{2i} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\sigma\sigma^T)_{ik}\partial_{1i}\partial_{1k} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(bb^T)_{ik}\partial_{2i}\partial_{2k} + \sum_{i,k}(\sigma b^T)_{ik}\partial_{1i}\partial_{2k} \tag{48}$$

ist, weil

$$\mathbf{E}_x(\int_0^t (\sum_i\sum_j \sigma_{ij}(\xi_1(t))\partial_{1i} Q(\xi_1(t),\xi_2(t)) + \sum_i\sum_j b_{ij}(\xi_1(t))\partial_{2i} Q(\xi_1(t),\xi_2(t)))^2 ds) < \infty$$

ist. Folglich ist

$$\mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t),\xi_2(t))) - Q(x,y) = \mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,b,\sigma} Q(\xi_1(s),\xi_2(s)) ds). \tag{49}$$

Also hat der Generator $L_{V,b,\sigma}$ des Prozesses ξ die Form

$$\begin{aligned} L_{V,b,\sigma} &= \sum_i V_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\sigma\sigma^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}(bb^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_k} \\ &\quad + \sum_{i,k}(\sigma b^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_k}. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma in A. 21 folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,b,\sigma}Q(\xi(s))ds) &= \mathbf{E}_x\frac{\partial}{\partial t}(\int_0^t L_{V,b,\sigma}Q(\xi(s))ds)\\ &= \mathbf{E}_x(L_{V,b,\sigma}Q(\xi(t))) < \infty,\end{aligned} \tag{50}$$

weil die Familie

$$\{\frac{1}{t-t_0}(\int_{t_0}^t L_{V,b,\sigma}Q(\xi(s))ds)\}_{t\neq t_0,\ t,t_0\in I}$$

gleichmäßig integrierbar (siehe A.23) und $I\subset\mathbb{R}$ ein Interval ist. Aus Gleichung (49) folgt

$$\lim_{t\to 0}\frac{q(t,x,y)-q(0,x,y)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,b,\sigma}Q(\xi(s))ds)}{t}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t}q(t,x,y) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,b,\sigma}Q(\xi(s))ds).$$

Aus Gleichung (50) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}q(t,x,y) = \mathbf{E}_x(L_{V,b,\sigma}Q(\xi(t))) < \infty.$$

Nun zeigen wir: Falls $q\in C^{1,2,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ und

$$q(t,x,y) = \mathbf{E}_x(Q(\xi(t)))$$

ist, dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}q(t,x,y) &= \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\sigma\sigma^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}q(t,x,y)+\frac{1}{2}\sum_{i,k}(bb^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_k}q(t,x,y)\\ &\quad+\sum_i V_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i}q(t,x,y)+\sum_{i,k}(\sigma b^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_k}q(t,x,y),\\ q(0,x,y) &= Q(x,y).\end{aligned}$$

Definiere $m(x,y) := q(t,x,y) = \mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t),\xi_2(t)))$. Aus der Markoveigenschaft folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(m(\xi_1(r),\xi_2(r)))-m(x,y)) &= \frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{\xi_1(r)}(Q(\xi_1(t),\xi_2(t))))-\mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t),\xi_2(t))))\\ &= \frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t+r),\xi_2(t+r))|\mathcal{F}_r))\\ &\quad -\mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t),\xi_2(t))))\\ &= \frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t+r),\xi_2(t+r)))-\mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t),\xi_2(t))))\\ &= \frac{1}{r}(q(t+r,x,y)-q(t,x,y)).\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}(\mathbf{E}_x(m(\xi_1(r),\xi_2(r)))-m(x,y)) = \frac{\partial}{\partial t}q(t,x,y)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}q(t,x,y) &= \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\sigma\sigma^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}q(t,x,y)+\frac{1}{2}\sum_{i,k}(bb^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_k}q(t,x,y)\\ &\quad+\sum_i V_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i}q(t,x,y)+\sum_{i,k}(\sigma b^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_k}q(t,x,y).\end{aligned}$$

Unmittelbar aus der Definition der Funktion q folgt

$$q(0,x,y)=Q(x,y).$$

Analog zu dem Beweis von Satz 3.16 Teil b. können wir zeigen: Wenn $q\in C^{1,2,2}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}q(t,x,y) &= \frac{1}{2}\sum_{i,k}(\sigma\sigma^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}q(t,x,y)+\frac{1}{2}\sum_{i,k}(bb^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_k}q(t,x,y)\\ &\quad+\sum_i V_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i}q(t,x,y)+\sum_{i,k}(\sigma b^T)_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial y_k}q(t,x,y),\\ q(0,x,y) &= Q(x,y)\end{aligned}$$

ist, dann folgt

$$q(t,x,y)=\mathbf{E}_x(Q(\xi(t))).$$

■

Bemerkung 4.7 a. *Wenn die Prozesse ξ_1 und ξ_2 in Satz 4.22 Diffusionsprozesse auf $\mathbb{R}^1$ sind, dann ist die Funktion*

$$q(t,x,y)=\mathbf{E}_x(Q(\xi(t)))$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}q(t,x,y) &= \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(t,x,y)+\frac{1}{2}b^2(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}q(t,x,y)+V(x)\frac{\partial}{\partial y}q(t,x,y)\\ &\quad+\sigma(x)b(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}q(t,x,y),\\ q(0,x,y) &= Q(x,y).\end{aligned}$$

b. *Falls in Bemerkung* **a.** $\sigma(x)=1,\ x\in\mathbb{R}^1$ *ist, dann ist die Funktion*

$$q(t,x,y)=\mathbf{E}_x(Q(\xi(t)))$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}q(t,x,y) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}q(t,x,y)+\frac{1}{2}b^2(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}q(t,x,y)+V(x)\frac{\partial}{\partial y}q(t,x,y)\\ &\quad+b(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}q(t,x,y),\\ q(0,x,y) &= Q(x,y).\end{aligned}$$

c. *Wenn wir in Bemerkung* **a.** $Q(x,y) := f(x)e^y$ *definieren, wobei die Funktion* f *die Bedingung (41) erfüllt, erhalten wir*

$$q(t,x,y) = e^y m(t,x) \tag{51}$$

(siehe A.10), wobei

$$m(t,x) := \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds + \int_0^t b(\xi_1(s))dB(s))) \tag{52}$$

ist. Nach dem Resultat in Bemerkung **a.** *ist die Funktion*

$$m(t,x) := \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds + \int_0^t b(\xi_1(s))dB(s)))$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}m(t,x) &= \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + \sigma(x)b(x)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x) \\ &\quad +(V(x) + \frac{1}{2}b^2(x))m(t,x), \\ m(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

d. *Falls in Bemerkung* **c.** $\sigma(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}^1$ *ist, dann ist die Funktion*

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s)))$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}m(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x) + (V(x) + \frac{1}{2}b^2(x))m(t,x), \\ m(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Dieses Resultat gilt auch, wenn $x \in \mathbb{R}^n$ *ist.*

e. *Wenn in Bemerkung* **c.** $b(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^1$ *ist, dann ist die Funktion*

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds))$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}m(t,x) &= \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + V(x)m(t,x), \\ m(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

f. *Falls in Bemerkung* **c.** $\sigma(x) = 1$ *und* $b(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^1$ *ist, dann ist die Funktion*

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds))$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}m(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + V(x)m(t,x), \\ m(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Die Resultate in Bemerkung **b.**, **d.** und **f.** wurden in [Bor00] beschrieben. Der Unterschied zwischen unseren Resultaten und denen aus [Bor00] liegt in der Voraussetzung an das Potential. Wir haben die Bedingung (40) durch die Bedingung (42) ersetzt. Daher haben wir jetzt einen größeren Geltungsbereich der Feynman-Kac-Formel bzw. Kolmogorov-Rückwärtsgleichung bezüglich des Potentials.

Bemerkung 4.8 **a.** *Wenn $V = 0$ in Teil* **e.** *und* **f.** *der vorigen Bemerkung ist, erhalten wir die normale Form der Kolmogorov-Rückwärtsgleichung zurück.*
b. *In der vorigen Bemerkung ist* **d.** *eine Erweiterung von* **f.** *und* **c.** *ist eine Erweiterung von* **e.**. *Aber wir können auch zeigen, dass das Resultat in Bemerkung* **d.** *die Folgerung des Resultates in Bemerkung* **f.** *ist:*

Aus der Itô-Formel haben wir

$$\int_0^t b(B(s))dB(s) = \int_x^{B(t)} b(y)dy - \frac{1}{2}\int_0^t b'(B(s))ds$$

(siehe A.11). Durch diese Gleichung kann die Funktion $m(t,x)$ in Bemerkung **d.** zu

$$m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(\int_0^{B(t)} b(y)dy)\exp(\int_0^t (V(B(s)) - \frac{1}{2}b'(B(s)))ds)) \quad (53)$$

umgeschrieben werden. Definiere $G(z) = f(z)\exp(\int_0^z b(y)dy)$, dann folgt aus dem Resultat in Bemerkung **f.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) \\ &\quad +(V(x) - \frac{1}{2}b'(x))m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy). \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist

$$\frac{\partial}{\partial t}m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) = \exp(\int_0^x b(y)dy)\frac{\partial}{\partial t}m(t,x).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) + (V(x) - \frac{1}{2}b'(x))m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\exp(\int_0^x b(y)dy)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x) + m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy)b(x)) \\
& +(V(x) - \frac{1}{2}b'(x))m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) \\
= \; & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy)b(x) \\
& +\frac{1}{2}\exp(\int_0^x b(y)dy)b(x)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x) + \frac{1}{2}m(t,x)\frac{\partial}{\partial x}(\exp(\int_0^x b(y)dy)b(x)) \\
& +(V(x) - \frac{1}{2}b'(x))m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) \\
= \; & \frac{1}{2}\exp(\int_0^x b(y)dy)\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + \exp(\int_0^x b(y)dy)b(x)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x) \\
& +\frac{1}{2}m(t,x)(\exp(\int_0^x b(y)dy)b^2(x) + \exp(\int_0^x b(y)dy)b'(x)) \\
& +V(x)m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) - \frac{1}{2}b'(x)m(t,x)\exp(\int_0^x b(y)dy) \\
= \; & \frac{1}{2}\exp(\int_0^x b(y)dy)\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + \exp(\int_0^x b(y)dy)b(x)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x) \\
& +\exp(\int_0^x b(y)dy)(V(x) + \frac{1}{2}b^2(x))m(t,x) \\
= \; & \exp(\int_0^x b(y)dy)(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x) + (V(x) + \frac{1}{2}b^2(x))m(t,x)).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\frac{\partial}{\partial t}m(t,x) \;=\; \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x) + (V(x) + \frac{1}{2}b^2(x))m(t,x).$$

Unmittelbar folgt aus Gleichung (53)

$$m(0,x) = f(x).$$

Analog können wir zeigen, dass **c.** aus **e.** folgt.
c. Ein Spezialfall des Resultats **d.**: Wenn $V(x) = -\frac{1}{2}b^2(x)$ ist, dann ist die Funktion

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(-\int_0^t \frac{1}{2}b^2(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s))) \tag{54}$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}m(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x), \\
m(0,x) &= f(x).
\end{aligned}$$

Man kann dieses Resultat auch durch die Girsanov-Formel beweisen:
Die Kolmogorov-Rückwärtsgleichung liefert, dass eine Funktion $m(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1)$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} m(t,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x} m(t,x), \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}^1, \\ m(0,x) &= f(x), \ x \in \mathbb{R}^1 \end{aligned}$$

ist, wenn m die folgende probabilistische Darstellung

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(X_t)), \ t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^1$$

hat, wobei $dX_t = b(X_t)dt + dB_t$ ist. Aus der Girsanov-Formel wissen wir, dass der Prozess X_t eine Brownsche Bewegung bezüglich des Maßes Q mit $dQ = Z_t dP_x$ ist, wobei

$$Z_t = \exp(-\int_0^t b(X_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(X_s)ds)$$

ist. Weiter ist

$$\begin{aligned} m(t,x) &= \mathbf{E}_x(f(X_t)) = \mathbf{E}_x(f(X_t)Z_t^{-1}Z_t) = \mathbf{E}_Q(f(X_t)Z_t^{-1}) \\ &= \mathbf{E}_Q(f(X_t)\exp(\int_0^t b(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t b^2(X_s)ds)) \\ &= \mathbf{E}_Q(f(X_t)\exp(\int_0^t b(X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(X_s)ds)) \\ &= \mathbf{E}_x(f(B_t)\exp(\int_0^t b(B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(B_s)ds)). \end{aligned}$$

Also ist die Funktion

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(B_t)\exp(\int_0^t b(B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(B_s)ds))$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} m(t,x) + b(x)\frac{\partial}{\partial x} m(t,x), \\ m(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Beispiel 4.2 *Wir nehmen an, die Stammfunktion γ von b sei in $C_c^2(\mathbb{R}^1)$. Dann ist die Funktion*

$$m(t,x) = \exp(-\gamma(x))\mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(\gamma(B(t)))\exp(-\frac{1}{2}\int_0^t (\nabla\gamma^2(B(s)) + \Delta\gamma(B(s)))ds)) \quad (55)$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} m(t,x) + \nabla\gamma(x)\frac{\partial}{\partial x} m(t,x), \\ m(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Aus der Itô-Formel haben wir

$$\int_0^t b(B(s))dB(s) = \int_x^{B(t)} b(y)dy - \frac{1}{2}\int_0^t b'(B(s))ds$$

(siehe A.11). Folglich kann die Funktion $m(t,x)$ in Gleichung (54) mit $\nabla\gamma = b$ in die Form (55) umgeschrieben werden.
Wenn wir $v(t,x) := \exp(\gamma(x))m(t,x)$ definieren, wobei $m(t,x)$ wie in (55) ist, ergibt sich aus der Feynman-Kac-Formel: Die Funktion

$$v(t,x) = \mathbf{E}_x(\exp(-\frac{1}{2}\int_0^t (\nabla\gamma^2(B(s)) + \Delta\gamma(B(s)))ds)\exp(\gamma(B(t)))f(B(t)))$$

ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) &= \frac{1}{2}\Delta v(t,x) - \frac{1}{2}(\nabla\gamma^2(x) + \Delta\gamma(x))v(t,x), \\ v(0,x) &= \exp(\gamma(x))f(x). \end{aligned}$$

4.3 Besondere Anfangsbedingung der Feynman-Kac-Formel

Im Folgenden zeigen wir, dass die Feynman-Kac-Formel nicht nur für allgemeinere Potentiale mit Eigenschaft (42), sondern auch für allgemeinere Anfangsbedingungen gilt: Wenn die Anfangsbedingung der Feynman-Kac-Formel die Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|f(x)|^2dx + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|\frac{\partial f(x)}{\partial x}|^2dx \ + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}|^2dx < \infty \quad (56)$$

hat, gilt auch die Feynman-Kac-Formel. Weil der Raum der Funktionen mit Eigenschaft (41) im Raum der Funktionen mit Eigenschaft (56) liegt, haben wir nun einen größeren Geltungsbereich der Feynman-Kac-Formel für die Anfangsbedingung f. Bevor wir diese Formel für diese Anfangsbedingung zeigen, beweisen wir zuerst noch ein Lemma.

Lemma 4.7 *Sei die Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1,2,...,n$ absolut stetig. Weiter sei $H^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ der Sobolev Raum und*

$$\begin{aligned} H^{2,2}(\mathbb{R}^n) \ := \ &\{g \in L^2(\mathbb{R}^n) : \textit{für } |s| \le 2 \textit{ gibt es } g^{(s)} \in L^2(\mathbb{R}^n) \textit{ mit } g^{(0)} = g \textit{ und} \\ &\int_{\mathbb{R}^n} g^{(0)}\partial^s\xi dx = (-1)^{|s|}\int_{\mathbb{R}^n} g^{(s)}\xi dx, \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}. \end{aligned} \quad (57)$$

Für alle $\varepsilon > 0$ liegen die Funktionen $\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x)$ genau dann in $H^{2,2}(\mathbb{R}^n)$, wenn die Funktionen f die Bedingung (56) erfüllen.

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ seien die Funktionen $\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x)$ in $H^{2,2}(\mathbb{R}^n)$, d.h. für alle i liegen

$$\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x), \ \frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) \text{ und } \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x)$$

in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Durch eine Rechnung ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) = \exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) - 2\varepsilon x_i\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x). \quad (58)$$

Nun betrachten wir diese Gleichung. Für $\varepsilon' < \varepsilon$ haben wir

$$|-2\varepsilon x_i| \leq C\exp((\varepsilon-\varepsilon')|x|^2),\ C > 0.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} |-2\varepsilon x_i f(x)|\exp(-\varepsilon|x|^2) &\leq C\exp((\varepsilon-\varepsilon')|x|^2)|f(x)|\exp(-\varepsilon|x|^2) \\ &= C\exp(-\varepsilon'|x|^2)|f(x)|. \end{aligned}$$

Da $\exp(-\varepsilon'|x|^2)f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, folgt für alle i

$$-2\varepsilon x_i \exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Aus Gleichung (58) folgt für alle i

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)(\frac{\partial}{\partial x_i}f(x))^2 dx < \infty,$$

weil $\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle i ist. Folglich ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|\frac{\partial}{\partial x}f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)\sum_i(\frac{\partial}{\partial x_i}f(x))^2 dx < \infty.$$

Eine weitere Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) - 2\varepsilon x_i\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x)) \\ &= \exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x) - 2\varepsilon x_i\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) \\ &\quad -2\varepsilon\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) - 2\varepsilon x_i\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) \\ &\quad +4\varepsilon^2 x_i^2\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) \\ &= \exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x) - 4\varepsilon x_i\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) \\ &\quad -2\varepsilon\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) + 4\varepsilon^2 x_i^2\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x). \end{aligned} \tag{59}$$

Jetzt betrachten wir diese Gleichung. Wähle $\varepsilon' < \varepsilon$, dann ist für $C > 0$

$$\begin{aligned} |-4\varepsilon x_i\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)|\exp(-\varepsilon|x|^2) &\leq C\exp((\varepsilon-\varepsilon')|x|^2)|\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)|\exp(-\varepsilon|x|^2) \\ &= C\exp(-\varepsilon'|x|^2)|\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)|. \end{aligned}$$

Weil $\exp(-\varepsilon'|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle i ist (siehe oben), folgt für alle i

$$-4\varepsilon x_i\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} |4\varepsilon^2 x_i^2 f(x)|\exp(-\varepsilon|x|^2) &\leq C\exp((\varepsilon-\varepsilon')|x|^2)|f(x)|\exp(-\varepsilon|x|^2) \\ &= C\exp(-\varepsilon'|x|^2)|f(x)|. \end{aligned}$$

Mit demselben Argument wie oben folgt für alle i

$$4\varepsilon^2 x_i^2 \exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Aus Gleichung (59) folgt für alle i

$$\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

weil $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle i ist. Folglich ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)\sum_i(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2})^2 dx < \infty.$$

Umgekehrt erfülle die Anfangsbedingung f die Bedingung (56): Für alle $\varepsilon > 0$ gelte

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|\frac{\partial f(x)}{\partial x}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}|^2 dx < \infty.$$

Aus dieser Bedingung und Gleichung (58) folgt für alle i

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial}{\partial x}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i(\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x))^2 dx \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x))^2 dx < \infty.\end{aligned}$$

Aus Bedingung (56) und Gleichung (59) folgt für alle i

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Also ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial^2}{\partial x^2}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_i(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x))^2 dx \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\exp(-\varepsilon|x|^2)f(x))^2 dx < \infty.\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir nur noch zeigen, dass für $|s| \leq 2$ und für alle $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\partial^s \xi dx = (-1)^{|s|}\int_{\mathbb{R}^n} g^{(s)}\xi dx \tag{60}$$

ist, wobei $g = \exp(-\varepsilon|x|^2)f(x)$ ist bei geeigneter Wahl der $g^{(s)}$.
Weil die Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ absolut stetig sind, existieren die Funktionen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_j} dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\xi dx$$

für alle $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist. Wenn $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, dann gilt auch $\exp(-\varepsilon|x|^2)\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zuerst zeigen wir, dass (60) für $s = 1$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2) f \frac{\partial}{\partial x_i}\xi dx = -\int_{\mathbb{R}^n} (\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2))f)\xi dx.$$

Wir beginnen mit der rechten Seite.

$$\begin{aligned}
& -\int_{\mathbb{R}^n} (\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2))f)\xi dx \\
= & -\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)\xi\frac{\partial f}{\partial x_i} dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi f dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\xi) f dx - \int_{\mathbb{R}^n} ((\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi) f dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\xi) f dx - (\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\xi) f dx - \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)(\frac{\partial}{\partial x_i}\xi) f dx) \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2) f \frac{\partial}{\partial x_i}\xi dx.
\end{aligned}$$

Zum Schluss zeigen wir (60) für $s = 2$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2) f \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\xi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\exp(-\varepsilon|x|^2) f)\xi dx.$$

Wir beginnen wieder mit der rechten Seite.

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\exp(-\varepsilon|x|^2)f)\xi dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2))f))\xi dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} (\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + (\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\exp(-\varepsilon|x|^2))f \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial f}{\partial x_i})\xi dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)\xi\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}dx + 2\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi\frac{\partial f}{\partial x_i}dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi f dx \\
= & -\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\xi)\frac{\partial f}{\partial x_i}dx + 2\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\xi)\frac{\partial f}{\partial x_i}dx \\
& -2\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\xi\frac{\partial f}{\partial x_i}dx + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}((\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi)f dx \\
& -\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2)(\frac{\partial}{\partial x_i}\xi)f dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\xi)\frac{\partial f}{\partial x_i}dx - 2\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\xi\frac{\partial f}{\partial x_i}dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}((\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi)f dx - (\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\xi)f dx \\
& -\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\varepsilon|x|^2)(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\xi)f dx) \\
= & \int_{\mathbb{R}^n}(\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi\frac{\partial f}{\partial x_i}dx + \int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\xi\frac{\partial f}{\partial x_i}dx \\
& -2\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\xi\frac{\partial f}{\partial x_i}dx + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}((\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi)f dx \\
& -\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\xi)f dx + \int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\varepsilon|x|^2)f\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\xi dx \\
= & -\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}((\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi)f dx + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\xi)f dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}((\frac{\partial}{\partial x_i}\exp(-\varepsilon|x|^2))\xi)f dx - \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\exp(-\varepsilon|x|^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\xi)f dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\varepsilon|x|^2)f\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\xi dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\varepsilon|x|^2)f\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\xi dx.
\end{aligned}
$$

Gleichung (60) folgt unmittelbar. ∎

Analog zum Resultat in Bemerkung 4.7 **d.** zeigen wir, dass dieses Resultat auch für die Anfangsbedingung f mit Eigenschaft (56) gilt.

Satz 4.23 *Seien $b(x), V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ Funktionen mit Eigenschaften (39), (42). Ferner habe die Anfangsbedingung f die Eigenschaft (56). Eine Funktion $m \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ ist genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} m(t,x) &= \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} m(t,x) + b(x)\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} m(t,x) + (V(x) + \frac{1}{2} b^2(x)) m(t,x), \\ m(0,x) &= f(x), \end{aligned}$$

wenn m die folgende probabilistische Darstellung hat:

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(B(t)) \exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s))).$$

Beweis. Ist für alle $\varepsilon > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|\frac{\partial f(x)}{\partial x}|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\varepsilon|x|^2)|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}|^2 dx < \infty,$$

dann ist $\mathbf{E}_x|f(B(t))|^2 < \infty$, weil

$$\mathbf{E}_x|f(B(t))|^2 = \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^2 \exp(-\frac{|z-x|^2}{2t}) dz$$

ist. Wenn $x = 0$ ist, dann folgt

$$\mathbf{E}_0|f(B(t))|^2 = \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^2 \exp(-\frac{|z|^2}{2t}) dz < \infty,$$

wobei $\varepsilon = \frac{1}{2t}$ ist. Weiter ist

$$\begin{aligned} \exp(-\frac{|z-x|^2}{2t}) &= \exp(\frac{-|z-x|^2 + |z|^2}{2t}) \exp(-\frac{|z|^2}{2t}) \\ &\le \exp(\frac{\delta|z|^2}{2t}) \exp(-\frac{|z|^2}{2t}) = \exp(-\frac{(1-\delta)|z|^2}{2t}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{E}_x|f(B(t))|^2 \le \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^2 \exp(-\frac{(1-\delta)|z|^2}{2t}) dz < \infty, \tag{61}$$

wobei $\varepsilon = \frac{1-\delta}{2t}$ mit $\delta < 1$ ist. Analog können wir zeigen, dass für alle i

$$\mathbf{E}_x|\frac{\partial}{\partial x_i} f(B(t))|^2 < \infty \tag{62}$$

und

$$\mathbf{E}_x|\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(B(t))|^2 < \infty \tag{63}$$

gelten.

Bevor wir die Funktion $m(t,x)$ definieren, zeigen wir zuerst die Existenz von

$$\mathbf{E}_x(f(B(t)) \exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s)))$$

d.h. wir müssen zeigen, dass

$$\mathbf{E}_x(|f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s))|) < \infty$$

ist. Es gilt

$$\begin{aligned} & |f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s))| \\ \leq \ & |f(B(t))|\exp(\int_0^t |V(B(s))|ds)\exp(|\int_0^t b(B(s))dB(s)|). \end{aligned}$$

Aus (61), A.16, A.18 und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\mathbf{E}_x(|f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s))|) < \infty.$$

Aus der Itô-Formel (siehe A.9) folgt

$$\begin{aligned} & d(f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s))) \\ = \ & (\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(B(t)) + \frac{1}{2}b^2(B(t))f(B(t)) + b(B(t))\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(B(t)) + V(B(t))f(B(t))) \\ & \exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s))dt + (\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(B(t)) + b(B(t))f(B(t))) \\ & \exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s))dB(t). \end{aligned}$$

Aus Satz 2.4 folgt, dass

$$\begin{aligned} & f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s)) - f(x) \\ & - \int_0^t (\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(B(s)) + \frac{1}{2}b^2(B(s))f(B(s)) + b(B(s))\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(B(s)) + V(B(s))f(B(s))) \\ & \times \exp(\int_0^s V(B(u))du + \int_0^t b(B(u))dB(u))ds \end{aligned}$$

ein Martingal ist, weil

$$\mathbf{E}_x(\int_0^t ((\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(B(t)) + b(B(t))f(B(t)))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s)))^2 ds) < \infty$$

ist. Folglich ist

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s))) - f(x) \\ = \ & \mathbf{E}_x(\int_0^t (\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(B(s)) + \frac{1}{2}b^2(B(s))f(B(s)) + b(B(s))\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(B(s)) \\ & + V(B(s))f(B(s)))\exp(\int_0^s V(B(u))du + \int_0^s b(B(u))dB(u))ds). \qquad (64) \end{aligned}$$

Aus dem Lemma in A. 21 folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,b}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du + \int_0^s b(B(u))dB(u))ds) \\
= \ & \mathbf{E}_x\frac{\partial}{\partial t}(\int_0^t L_{V,b}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du + \int_0^s b(B(u))dB(u))ds) \\
= \ & \mathbf{E}_x(L_{V,b}f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(u))du + \int_0^t b(B(u))dB(u))) < \infty, \qquad (65)
\end{aligned}$$

wobei $L_{V,b} := \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}b^2 + b\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} + V$ ist, weil die Familie

$$\{\frac{1}{t-t_0}(\int_{t_0}^t L_{V,b}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du + \int_0^s b(B(u))dB(u))ds)\}_{t\neq t_0,\ t,t_0\in I}$$

gleichmäßig integrierbar (siehe A. 24) und $I \subset \mathbb{R}$ ein Interval ist. Aus Gleichung (64) folgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{m(t,x)-m(0,x)}{t} \\
= \ & \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,b}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du + \int_0^s b(B(u))dB(u))ds)}{t}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}m(t,x) \\
= \ & \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}_x(\int_0^t L_{V,b}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du + \int_0^s b(B(u))dB(u))ds).
\end{aligned}$$

Aus Gleichung (65) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}m(t,x) = \mathbf{E}_x(L_{V,b}f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(u))du + \int_0^t b(B(u))dB(u))) < \infty.$$

Aus dem Resultat in Bemerkung 4.7 **d.** folgt, dass die Funktion

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \int_0^t b(B(s))dB(s)))$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}m(t,x) &= \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}m(t,x) + b(x)\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}m(t,x) + (V(x) + \frac{1}{2}b^2(x))m(t,x), \\
m(0,x) &= f(x)
\end{aligned}$$

ist. ■

Bemerkung 4.9 *Aus Lemma 4.7 und Satz 4.23 mit $b = 0$ ergibt sich die Feynman-Kac-Formel für Anfangsbedingungen f mit $x \mapsto \exp(-\varepsilon|x|^2)f(x) \in H^{2,2}(\mathbb{R}^n)$.*

5 Der Hilbert-Raum-Zugang für unbeschränkte Potentiale

Wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde, wird in der Literatur für Anfangsbedingungen im Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ die Feynman-Kac-Formel als Darstellung der Halbgruppe (e^{-tH}) aufgefasst. Zum Beispiel betrachtet B. Simon in [Sim79] die Feynman-Kac-Formel als Darstellung der Halbgruppe (e^{-tH}), wobei $H := H_0 + V$; $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ ist und das Potential V beschränkt sein muss. Diese Formel in [Sim79] lautet:

Satz 5.24 *Sei $V \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$ eine stetige Funktion, die im Unendlichen verschwindet. Sei $B(t)$, $t \geq 0$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung. Weiter sei $H = H_0 + V$ ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{D}(H_0)$. Dann gilt*

$$(f, e^{-tH}g) = \mathbf{E}_0(\overline{f(B(0))}g(B(t))\exp(-\int_0^t V(B(s))ds)) \tag{66}$$

für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. (siehe [Sim79], Theorem 6.1) ■

In demselben Buch (siehe Example 2, Seite 171) wird die Feynman-Kac-Formel auch durch stochastische Analysis bewiesen.

Ausserdem untersuchte B. Simon in [Sim00] die Feynman-Kac-Formel auch für gewisse nach unten unbeschränkte Potentiale: Die Feynman-Kac-Formel für den Schrödinger Operator wird mit einem Potential V, das die Bedingung (42) erfüllt, bewiesen. Daraus ergibt sich, dass die zugehörige Halbgruppe aus unbeschränkten Operatoren besteht. Der zugehörige Prozess ist bei B. Simon die Brownsche Brücke. Im Geist dieser Arbeiten haben K. Broderix, H. Leschke und P. Müller in [BLM04] die Feynman-Kac-Formel für eine allgemeinere Klasse von Potentialen bewiesen. In dieser Arbeit bzw. in [BLM04] wurde sogar die Feynman-Kac-Itô-Formel für diese allgemeine Klasse von Potentialen bewiesen. Im folgenden geben wir zunächst eine etwas ausführlichere Darstellung des Beweises von B. Simon [Sim00]. In Anschluß daran formulieren wir das Resultat von [BLM04] und ziehen einfache Folgerungen.

Wenn $\alpha^{x,y,t}$ die Brownsche Brücke mit $\alpha^{x,y,t}(0) = x$, $\alpha^{x,y,t}(t) = y$ bezeichne, so ist für $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbf{E}(f(\alpha^{x,y,t}(s))) = \mathbf{E}_x(f(B_s)|B_t = y)$$

gegeben durch die bedingte reguläre Erwartung. Daraus folgt zum Beispiel :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x(g(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds)) \\
= &\int_\Omega \mathbf{E}_x(g(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds)|B_t = y)P_x(B_t \in dy) \\
= &\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{|y-x|^2}{2t})g(y)\mathbf{E}(\exp(-\int_0^t V(\alpha^{x,y,t}(s))ds))dy \\
= &\int_{\mathbb{R}^n} e^{-tH_0}(x,y)g(y)Q(x,y;V,t)dy, \qquad (67)
\end{aligned}$$

wobei

$$e^{-tH_0}(x,y) := \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{|y-x|^2}{2t})$$

und

$$\begin{aligned} Q(x,y;V,t) &:= \mathbf{E}(\exp(-\int_0^t V(\alpha^{x,y,t}(s))ds)) \\ &:= \mathbf{E}(\exp(-\int_0^t V((1-\frac{s}{t})x + \frac{s}{t}y + \sqrt{t}\alpha(\frac{s}{t}))ds)) \end{aligned} \tag{68}$$

ist.

Die n-dimensionale Brownsche Brücke besteht aus einem n-dimensionalen Gaußschen Prozess $\{\alpha_i(t)\}_{i=1;0\le t\le 1}^n$ mit der Kovarianz

$$\mathbf{E}(\alpha_i(t)\alpha_j(s)) = \delta_{ij}\, min(t,s)(1-max(t,s))$$

und

$$\mathbf{E}(\alpha_i(t)) = 0$$

für alle $i,j \in \{1,2,...,n\}$. Falls B eine Brownsche Bewegung ist, dann ist

$$\alpha(s) = B(s) - sB(1)$$

eine explizite Realisierung der Brownschen Brücke.

Die folgenden Resultate sind aus [Sim00] entnommen.

Satz 5.25 *Sei V eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$ und nach unten beschränkt und sei $H = H_0 + V$. Dann gilt für $t > 0$*

$$(\psi, e^{-tH}\varphi) = \int \overline{\psi(x)}\varphi(y)e^{-tH_0}(x,y)Q(x,y;V,t)dxdy \tag{69}$$

für alle $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung 5.10 *Die Gleichungen (66) und (69) sind äquivalent (siehe A.12 bzw. Gleichung (67)).*

Jetzt betrachten wir ein Potential V mit Eigenschaft (42). Für ein solches V ist $H = H_0+V$ wesentlich selbstadjungiert auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (siehe [RS75], Theorem X.38). Also können wir den Funktionalkalkül benutzen, um die unbeschränkte Halbgruppe e^{-tH} zu definieren. Folgender Satz zeigt, dass die Feynman-Kac-Formel auch für dieses V gilt.

Satz 5.26 *Sei V eine stetige Funktion mit Eigenschaft (42). Dann ist für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0$ die Funktion Q aus (68) endlich. Seien $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger. Dann ist $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(e^{-tH})$ für alle $t > 0$ und es gilt*

$$(\psi, e^{-tH}\varphi) = \int \overline{\psi(x)}\varphi(y)e^{-tH_0}(x,y)Q(x,y;V,t)dxdy.$$

Um Satz 5.26 zu beweisen, brauchen wir folgende Sätze:

Satz 5.27 *Sei V eine stetige Funktion mit Eigenschaft (42) und sei die Funktion Q wie in (68). Dann ist für alle $t > 0$ und $\delta > 0$*

$$Q(x,y;V,t) \le D\exp(\delta x^2 + \delta y^2), \tag{70}$$

wobei D von t, δ und der Konstanten C_ε abhängt.

Lemma 5.8 *Sei X eine Gaußsche Zufallsvariable. Wenn $\varepsilon\mathbf{E}(X^2) < \frac{1}{2}$ ist, dann folgt*

$$\mathbf{E}(\exp(\varepsilon X^2)) < \infty.$$

Beweis. Ist $\varepsilon\mathbf{E}(X^2) = \varepsilon\sigma^2 < \frac{1}{2}$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\exp(\varepsilon X^2)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})\exp(\varepsilon x^2)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int \exp(-\frac{(1-2\sigma^2\varepsilon)x^2}{2\sigma^2})dx < \infty.
\end{aligned}$$

■

Nun beweisen wir **Satz 5.27**.

Beweis. Wenn $0 < \theta < 1$ und $x, y, \alpha \in \mathbb{R}^n$ sind, dann folgt

$$\begin{aligned}
|\theta x + (1-\theta)y + \alpha|^2 &\le 2|\theta x + (1-\theta)y|^2 + 2|\alpha|^2 \\
&\le 2(x^2 + y^2 + |\alpha|^2).
\end{aligned}$$

Weil $V(x) \ge -\varepsilon|x|^2 - C_\varepsilon$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
-V(\theta x + (1-\theta)y + \sqrt{t}\alpha) &\le \varepsilon|\theta x + (1-\theta)y + \sqrt{t}\alpha(\frac{s}{t})|^2 + C_\varepsilon \\
&\le 2\varepsilon(x^2 + y^2 + t|\alpha|^2) + C_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
Q(x,y;V,t) &= \mathbf{E}(\exp(-\int_0^t V((1-\frac{s}{t})x + \frac{s}{t}y + \sqrt{t}\alpha(\frac{s}{t}))ds)) \\
&\le \mathbf{E}(\exp(\int_0^t (2\varepsilon(x^2 + y^2 + t\alpha(\frac{s}{t})^2) + C_\varepsilon)ds)) \\
&= \mathbf{E}(\exp(C_\varepsilon t + 2\varepsilon t(x^2 + y^2) + \int_0^t 2\varepsilon t\alpha(\frac{s}{t})^2 ds)) \\
&= \mathbf{E}(\exp(C_\varepsilon t + 2\varepsilon t(x^2 + y^2) + 2\varepsilon\int_0^1 t^2\alpha(s)^2 ds)) \\
&= \exp(C_\varepsilon t + 2\varepsilon t(x^2 + y^2))\mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2\int_0^1 \alpha(s)^2 ds)).
\end{aligned}$$

Mit der Jensenschen Ungleichung haben wir

$$\mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2\int_0^1 \alpha(s)^2 ds)) \le \int_0^1 \mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2\alpha(s)^2))ds \tag{71}$$

(siehe A.13). Weil $\mathbf{E}(\alpha(s)^2)$ an der Stelle $s = \frac{1}{2}$ maximiert wird, folgt aus Lemma 5.8

$$\int_0^1 \mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2 \alpha(s)^2))ds \leq \mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2 \alpha(\frac{1}{2})^2)) < \infty, \tag{72}$$

wenn $2\varepsilon t^2 \mathbf{E}(\alpha(\frac{1}{2})^2) < \frac{1}{2}$ bzw. $\varepsilon t^2 < 1$ ist, weil

$$\mathbf{E}(\alpha(\frac{1}{2})^2) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

ist. Also können wir $\varepsilon = \frac{\delta_0}{t^2}$ mit $\delta_0 < 1$ wählen.
Aus (71) und (72) folgt

$$Q(x, y; V, t) \quad \leq \quad \exp(C_\varepsilon t + 2\varepsilon t(x^2 + y^2))\mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2 \alpha(\frac{1}{2})^2)) \ < \ \infty,$$

wenn $\varepsilon = \frac{\delta_0}{t^2}$ mit $\delta_0 < 1$ ist. Folglich ist

$$\begin{aligned} Q(x, y; V, t) \quad &\leq \quad \exp(C_\varepsilon t) \exp(\frac{2\delta_0}{t}(x^2 + y^2))\mathbf{E}(\exp(2\delta_0 \alpha(\frac{1}{2})^2)) \\ &= \quad \exp(C_\varepsilon t) \exp(\frac{2\delta_0}{t}(x^2 + y^2))(1 - \delta_0)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \quad \exp(C_\varepsilon t) \exp(\delta(x^2 + y^2))(1 - \frac{\delta t}{2})^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{2\delta_0}{t} := \delta$ ist. Daraus folgt

$$Q(x, y; V, t) \leq D \exp(\delta x^2 + \delta y^2),$$

wobei $D := (1 - \frac{\delta t}{2})^{-\frac{1}{2}} \exp(C_\varepsilon t)$ ist. ∎

Satz 5.28 *Seien A_n, A selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum H und $A_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} A$ im starken Resolventen-Sinn. Sei f eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ und $\psi \in H$ mit $\psi \in \mathcal{D}(f(A_n))$ für alle n.*

(i) Wenn $\sup_n \|f(A_n)\psi\| < \infty$ ist, dann folgt $\psi \in \mathcal{D}(f(A))$.

(ii) Wenn $\sup_n \|f(A_n)^2\psi\| < \infty$ ist, dann folgt $f(A_n)\psi \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(A)\psi$.

Beweis. Sei

$$f_m(x) = \begin{cases} m & \text{wenn } f(x) \geq m \\ f(x) & \text{wenn } |f(x)| \leq m \\ -m & \text{wenn } f(x) \leq -m. \end{cases}$$

Dann folgt aus Thm VIII.20 in [RS72], dass für festes m

$$f_m(A_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f_m(A)$$

stark konvergiert. Folglich ist

$$\begin{aligned}\|f_m(A)\psi\| &= \lim_{n\to\infty}\|f_m(A_n)\psi\|\\ &\leq \sup_n\|f_m(A_n)\psi\|\\ &\leq \sup_n\|f(A_n)\psi\|.\end{aligned}$$

Ist $\sup_n \|f(A_n)\psi\| < \infty$, so ist $\sup_m \|f_m(A)\psi\| < \infty$. Daraus folgt $\psi \in \mathcal{D}(f(A))$.

Nun sei $\sup_n \|f(A_n)^2\psi\| < \infty$, dann ist für $m > 0$

$$\begin{aligned}\|(f(A_n) - f_m(A_n))\psi\| &\leq \frac{1}{m}\|f(A_n)^2\psi\|\\ &\leq \frac{1}{m}\sup_n\|f(A_n)^2\psi\| < \infty.\end{aligned}$$

Also konvergiert

$$f_m(A_n)\psi \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(A_n)\psi$$

gleichmäßig in n. Daraus folgt

$$f(A_n)\psi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(A)\psi,$$

weil

$$\begin{aligned}\|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \leq\; &\|f(A_n)\psi - f_m(A_n)\psi\| + \|f_m(A_n)\psi - f_m(A)\psi\|\\ &+\|f_m(A)\psi - f(A)\psi\|\end{aligned}$$

ist. ∎

Schließlich beweisen wir **Satz 5.26**.

Beweis. Sei $V_n(x) = \max(V(x), -n)$, dann sind die Funktionen V_n nach unten beschränkt. Aus Satz 5.25 folgt

$$(\psi, e^{-tH_n}\varphi) = \int \overline{\psi(x)}\varphi(y)e^{-tH_0}(x,y)Q(x,y;V_n,t)dxdy, \tag{73}$$

wobei $H_n := H_0 + V_n$ ist.
Weiter sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger. Aus Satz 5.27 folgt

$$\sup_n \|\exp(-tH_n)\varphi\| < \infty$$

für alle $t > 0$ (siehe A.14). Aus der wesentlichen Selbstadjungiertheit von H auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $(V_n - V)\eta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für beliebige Funktionen $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ folgt, dass H_n zu H im starken Resolventen-Sinn konvergiert. Setze in Satz 5.28 $A_n = H_n, A = H, f(x) = e^{-tx}$ und $\psi = \varphi$, dann gilt

$$\varphi \in \mathcal{D}(f(H)) = \mathcal{D}(e^{-tH})$$

und

$$\|(f(H_n) - f(H))\varphi\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

bzw.

$$\|(e^{-tH_n} - e^{-tH})\varphi\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{74}$$

Aus Satz 5.27 und zusammen mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\int \overline{\psi(x)}\varphi(y)e^{-tH_0}(x,y)Q(x,y;V_n,t)dxdy \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int \overline{\psi(x)}\varphi(y)e^{-tH_0}(x,y)Q(x,y;V,t)dxdy. \tag{75}$$

Also folgt aus (73), (74) und (75)

$$(\psi, e^{-tH}\varphi) = \int \overline{\psi(x)}\varphi(y)e^{-tH_0}(x,y)Q(x,y;V,t)dxdy.$$

■

Folgende Resultate werden von der Arbeit in [BLM04] von Broderix, Leschke und Müller entnommen.

Satz 5.29 *Sei A ein Vektorpotential mit den Eigenschaften*

$$|A|^2,\ \nabla A \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{K}_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

sei V ein skalares Potential mit $V = V_1 + V_2$, wobei

$$V_1 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{K}_{\pm}(\mathbb{R}^n) \text{ und } V_2 \text{ mit Eigenschaft (42)}$$

ist. Weiter sei $H(A,V) := \frac{1}{2}\sum_j (i\partial_j + A_j)^2 + V;\ i = \sqrt{-1}$. Dann folgt

$$(e^{-tH(A,V)}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k_t(x,y)f(y)dy$$

für alle $f \in \mathcal{D}(e^{-tH(A,V)}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} k_t(x,y)f(y)dy \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$, wobei

$$\begin{aligned} k_t(x,y) &:= \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int e^{-S_t(A,V;b)}\mu^{0,t}_{x,y}(db), \\ S_t(A,V;b) &:= i\int_0^t A(b(s))db(s) + \frac{i}{2}\int_0^t (\nabla A)(b(s))ds + \int_0^t V(b(s))ds \text{ und} \end{aligned}$$

$\mu^{0,t}_{x,y}$ das Wahrscheinlichkeitsmaß der Brownschen Brücke ist.

Bemerkung 5.11 *Wenn $n \leq 3$ ist, dann folgt $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{K}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Jetzt betrachten wir die Feynman-Kac-Formel, wie sie in [RS75] steht.

In [RS75] wird die Feynman-Kac-Formel mit einer anderen Art des Potentials betrachtet: Das Potential V hat die Form

$$V = V_1 + V_2,$$

wobei $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ ist.

Satz 5.30 *(Feynman-Kac-Formel) Sei das Potential V eine reellwertige Funktion in $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ und sei $H = H_0 + V$; $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$. Weiter sei $B(t)$, $t \geq 0$ eine 3-dimensionale Brownsche Bewegung mit $B(0) = x$. Dann ist*

$$(e^{-tH}f)(x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(-\int_0^t V(B(s))ds))$$

für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$.

Beweis. (siehe [RS75], Theorem X.68) ■

Nun kombinieren wir die Bedingungen der Potentiale, die in [Sim00] und [RS75] stehen. Wir betrachten nämlich ein Potential V der Form

$$V = V_1 + V_2, \tag{76}$$

wobei $V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und V_2 die Funktion mit Eigenschaft (42) ist.

Das nächste Resultat ist die Feynman-Kac-Formel für Potential V wie in (76). Dieses Resultat folgt aus Satz 5.29 mit $A = 0$ und den Bemerkungen 5.11, 5.10. Beachte, dass man e^{-tH} in diesem Fall als unbeschränkte Halbgruppe betrachtet:

Satz 5.31 *Sei das Potential V eine reellwertige Funktion wie in (76) und sei $H = H_0 + V$; $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$. Weiter sei $B(t)$, $t \geq 0$ eine 3-dimensionale Brownsche Bewegung mit $B(0) = x$. Dann ist*

$$(e^{-tH}f)(x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(-\int_0^t V(B(s))ds))$$

für alle $f \in \mathcal{D}(e^{-tH}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) : \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(-\int_0^t V(B(s))ds)) \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$.

Bemerkung 5.12 *Sei $\xi \in \mathbb{R}$ und das Potential V wie in (76). Dann ist*

$$(e^{-tH(\xi)}f)(x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(-\int_0^t \xi V(B(s))ds))$$

für alle $f \in \mathcal{D}(e^{-tH(\xi)}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3) : \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(-\int_0^t \xi V(B(s))ds)) \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$, wobei $H(\xi) := -\frac{1}{2}\Delta + \xi V$ ist.

6 Nachwort

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Geltungsbereich der Feynman-Kac-Formel, und dabei insbesondere mit den Bedingungen an die Potentiale und die Anfangsbedingungen der partiellen Differentialgleichung. Für eine spezielle Klasse von Prozessen, nämlich solcher, deren Diffusionskoeffiziente beschränkt ist, löst die Feynman-Kac-Formel die partielle Differentialgleichung mit Anfangsbedingung. Ausserdem beschäftigt sich diese Arbeit auch mit dem Geltungsbereich der Kolmogorov-Rückwärtsgleichung, und dabei insbesondere mit den Voraussetzungen für die Anfangsbedingungen der partiellen Differentialgleichung.

Im 1-dimensionalen Fall gibt es eine Äquivalenz zwischen der Feynman-Kac-Formel und der Kolmogorov-Rückwärtsgleichung, die man durch die Itô-Formel zeigen kann.

In dieser Arbeit wird die Äquivalenz der verschiedenen Darstellungen der klassischen Feynman-Kac-Formel gezeigt. Ausserdem haben wir diese verschiedene Darstellung mit unterschiedlichen Methoden gezeigt.

Um weitergehende Ergebnisse zu erzielen, kann man die Methoden, die in Kapitel 4 beschrieben werden, anwenden. Man kann z.B. die Feynman-Kac-Itô-Formel als Lösung des Anfangswertproblems mit denselben Methoden wie in Kapitel 4 beweisen, wobei die Bedingungen der Funktionen, die in der Feynman-Kac-Itô-Formel stehen, diejenigen der Funktionen in Kapitel 4 sind, nämlich: Seien die Funktionen $b(x), f(x), V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit Eigenschaften (39), (41) und (42). Dann ist die Funktion

$$m(t,x) = \mathbf{E}_x(f(B(t))\exp(\int_0^t V(B(s))ds + \frac{i}{2}\int_0^t \operatorname{div} b(B(s))ds + i\int_0^t b(B(s))dB(s)))$$

die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}m(t,x) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}m(t,x) + ib(x)\frac{\partial}{\partial x}m(t,x) + (V(x) + \frac{i}{2}\operatorname{div} b(x) - \frac{1}{2}b^2(x))m(t,x), \\ m(0,x) &= f(x), \end{aligned}$$

wobei $i := \sqrt{-1}$ ist.
Die Methoden aus Kapitel 4 können sogar benutzt werden, um die Feynman-Kac-Itô-Formel für Potentiale, die in der Kato-Klasse liegen, zu beweisen. Die Feynman-Kac-Itô-Formel mit Potentialen aus der Kato-Klasse kann als Lösung des Anfangswertproblems dargestellt werden, weil wir die Resultate aus Theorem 3.6 (Seite 69) und Proposition 3.8 (Seite 72) in [CZ95] haben.

Analog kann man die allgemeine Kolmogorov-Rückwärtsgleichung wie in Satz 4.22 beweisen, nämlich: Der Prozess in der Kolmogorov-Rückwärtsgleichung ist $2n$-dimensionaler Diffusionsprozess $\xi(t) := (\xi_1(t), \xi_2(t))$, wobei

$$\xi_1(t) := x + \int_0^t dB(s), \quad \xi_2(t) := y + \int_0^t V(B(s))ds + \frac{i}{2}\int_0^t divb(B(s))ds + i\int_0^t b(B(s))dB(s)$$

ist und die Funktionen $b(x), f(x), V(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ die Eigenschaften (39), (41) und (42) haben. Mit demselben Argument wie bei der Feynman-Kac-Itô-Formel gilt die

Kolmogorov-Rückwärtsgleichung auch für Potentiale V, die in der Kato-Klasse liegen.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit haben wir die Feynman-Kac-Formel für Potentiale, die eine Form wie in (76) haben, bewiesen. Im Gegensatz zur klassischen Situation ist e^{-tH} jetzt ein unbeschränkter Operator.

Schließlich sind die offene Probleme dieser Arbeit:

- Die Feynman-Kac-Formel als Lösung eines Anfangswertproblems bei unstetiger Anfangsbedingung
- Erweiterung auf größere Potentialklassen bei einem allgemeineren Diffusionsprozess ξ_1 bzw. zeitabhängigem Diffusionsprozess
- Erweiterung der Feynman-Kac-Itô-Formel durch Hinzufügen eines inhomogenen Terms

Appendix

A. 1 *Definiere*

$$\begin{aligned} L_0 f(x) &:= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x) - P_t f(x)) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x) - \mathbf{E}_x f(B_t)). \end{aligned}$$

Aus der Itô-Formel folgt

$$df(B_t) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(B_t) dB_t^i + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(B_t) dt$$

bzw.

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(B_s) dB_s^i + \int_0^t \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(B_s) ds.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} -L_0 f(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mathbf{E}_x f(B_t) - f(x)) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \mathbf{E}_x (\int_0^t \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(B_s) ds) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x). \end{aligned}$$

bzw.

$$L_0 = -\frac{1}{2}\Delta,$$

wobei $\Delta := \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ *der Laplace-Operator ist.*

A. 2 *Wir haben für alle* $t \geq 0$

$$\exp(-\int_0^t V(B_s) ds) = 1 - \int_0^t V(B_s) \exp(-\int_s^t V(B_u) du) ds. \tag{77}$$

Beweis. *Zuerst betrachten wir die linke Seite von (77):*

$$\frac{d}{dt}(\exp(-\int_0^t V(B_s) ds)) = \exp(-\int_0^t V(B_s) ds)(-V(B_t)). \tag{78}$$

Die rechte Seite von (77) ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(1 - \int_0^t V(B_s) \exp(-\int_s^t V(B_u) du) ds) &= -\frac{d}{dt} \int_0^t V(B_s) \exp(-\int_s^t V(B_u) du) ds \\ &= -\frac{d}{dt} \int_0^t F(t,s) ds, \end{aligned} \tag{79}$$

wobei $F(t,s) := V(B_s)\exp(-\int_s^t V(B_u)du)$ *ist. Ferner ist*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^t F(t,s)ds &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\int_0^{t+h} F(t+h,s)ds - \int_0^t F(t,s)ds) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\int_0^{t+h} F(t+h,s)ds - \int_0^{t+h} F(t,s)ds + \int_0^{t+h} F(t,s)ds - \int_0^t F(t,s)ds) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\int_0^{t+h} (F(t+h,s) - F(t,s))ds) + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\int_0^{t+h} F(t,s)ds - \int_0^t F(t,s)ds) \\
&= \lim_{h\to 0}\int_0^{t+h} \frac{F(t+h,s)-F(t,s)}{h}ds + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\int_0^{t+h} F(t,s)ds - \int_0^t F(t,s)ds) \\
&= \int_0^t F'(t,s)ds + \lim_{h\to 0}\frac{\int_t^{t+h} F(t,s)ds}{h} \\
&= \int_0^t F'(t,s)ds + F(t,t) \\
&= \int_0^t F'(t,s)ds + V(B_t). \qquad (80)
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\int_0^t F'(t,s)ds = -\int_0^t V(B_s)\exp(-\int_s^t V(B_u)du)dsV(B_t)$$

und

$$\begin{aligned}
V(B_s)\exp(-\int_s^t V(B_u)du) &= V(B_s)\exp(\int_t^s V(B_u)du) \\
&= \frac{d}{ds}\exp(\int_t^s V(B_u)du) \\
&= \frac{d}{ds}\exp(-\int_s^t V(B_u)du).
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\int_0^t F'(t,s)ds &= -\int_0^t \frac{d}{ds}\exp(-\int_s^t V(B_u)du)dsV(B_t) \\
&= -(\exp(-\int_t^t V(B_u)du) - \exp(-\int_0^t V(B_u)du))V(B_t) \\
&= -(1 - \exp(-\int_0^t V(B_u)du))V(B_t) \\
&= -V(B_t) + \exp(-\int_0^t V(B_u)du)V(B_t). \qquad (81)
\end{aligned}$$

Aus Gleichungen (81) und (80) folgt, dass (78) und (79) gleich sind. ■

A. 3 *Definiere*

$$P_t^V f(x) := \mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^t V(B_s)ds)f(B_t)).$$

Also ist

$$\begin{aligned} |P_t^V f(x)| &\leq \exp(t\|V\|_\infty)\mathbf{E}_x|f(B_t)| \\ &= c(t,V)P_t|f|(x), \end{aligned}$$

wobei $c(t,V) := \exp(t\|V\|_\infty)$ *ist.*

A. 4 *Markoveigenschaft (siehe [Wil79], Seite 105) Wenn* $\xi \in b\mathcal{F}_t^0$ *(Raum der beschränkten* $\mathcal{F}_t^0$*-meßbaren Funktionen von* Ω *nach* $\mathbb{R}$*) und* $\eta \in b\mathcal{F}^0$ *sind, dann folgt*

$$\mathbf{E}_x(\xi\theta_t\eta) = \mathbf{E}_x(\xi\mathbf{E}_{X_t}\eta),$$

wobei $(\xi\theta_t\eta)(w) := \xi(w)\eta(\theta_t w)$ *ist.*

A. 5 *Aus Gleichung (18) folgt*

$$\begin{aligned} I - \mathcal{G}^V &= I - \mathcal{G} + V \\ (R_\lambda^V)^{-1} &= (R_\lambda)^{-1} + V \\ I &= (R_\lambda)^{-1}R_\lambda^V + VR_\lambda^V \\ R_\lambda &= R_\lambda^V + R_\lambda V R_\lambda^V \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} I - \mathcal{G}^V &= I - \mathcal{G} + V \\ (R_\lambda^V)^{-1} &= (R_\lambda)^{-1} + V \\ I &= R_\lambda^V(R_\lambda)^{-1} + R_\lambda^V V \\ R_\lambda &= R_\lambda^V + R_\lambda^V V R_\lambda. \end{aligned}$$

A. 6 *Zu zeigen* $R_\lambda f(x) - R_\lambda^V f(x) = R_\lambda V R_\lambda^V f(x)$.

$$\begin{aligned} & R_\lambda f(x) - R_\lambda^V f(x) \\ = \ & \mathbf{E}_x \int_0^\infty \exp(-\lambda t - A_t) f(X_t)(\exp(A_t) - 1)dt \\ = \ & \mathbf{E}_x \int_0^\infty \exp(-\lambda t - A_t) f(X_t)dt \int_0^t ds V(X_s)\exp(A_s) \\ = \ & \mathbf{E}_x \int_0^\infty ds V(X_s) \int_0^\infty \exp(-\lambda s - \lambda u - A_{s+u}) f(X_{s+u})\exp(A_s)du \\ = \ & \mathbf{E}_x \int_0^\infty ds \exp(-\lambda s)V(X_s) \int_0^\infty \exp(-\lambda u - (A_{s+u} - A_s)) f(X_{s+u})du \\ = \ & \mathbf{E}_x \int_0^\infty ds \exp(-\lambda s)V(X_s) \int_0^\infty \exp(-\lambda u - A_u \circ \theta_s) f(X_u \circ \theta_s)du \\ = \ & \mathbf{E}_x \int_0^\infty ds \exp(-\lambda s)V(X_s)\mathbf{E}_{X_s} \int_0^\infty du \exp(-\lambda u - A_u) f(X_u) \\ = \ & \mathbf{E}_x \int_0^\infty ds \exp(-\lambda s)V(X_s)R_\lambda^V f(X_s) \\ = \ & R_\lambda V R_\lambda^V f(x). \end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, dass für alle $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$

$$R_\lambda f(x) - R_\lambda^V f(x) = R_\lambda^V V R_\lambda f(x)$$

gilt.

A. 7 *Aus der Itô-Formel haben wir*

$$d(\exp(-A_t)f(X_t)) = (d\exp(-A_t))f(X_t) + \exp(-A_t)df(X_t) + (d\exp(-A_t))df(X_t).$$

Definiere $A_t := \int_0^t V(X_u)du$, *dann ist* $d(\exp(-A_t)) = -\exp(-A_t)V(X_t)dt$ *und* $C_t^f := f(X_t) - \int_0^t \mathcal{G}f(X_s)ds$, *dann ist* $dC_t^f = df(X_t) - \mathcal{G}f(X_t)dt$. *Folglich ist*

$$\begin{aligned} d(\exp(-A_t)f(X_t)) &= -V(X_t)\exp(-A_t)dtf(X_t) + \exp(-A_t)(dC_t^f + \mathcal{G}f(X_t)dt) \\ &\quad +(-V(X_t)\exp(-A_t)dt)(dC_t^f + \mathcal{G}f(X_t)dt) \\ &= \exp(-A_t)(\mathcal{G}f(X_t) - V(X_t)f(X_t))dt + \exp(-A_t)dC_t^f. \end{aligned}$$

A. 8 *Dynkin-Formel (siehe [Øks98], Theorem 7.4.1) Sei* $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ *und* τ *eine Stoppzeit mit* $\mathbf{E}_x(\tau) < \infty$. *Dann ist*

$$\mathbf{E}_x(f(X_\tau)) = f(x) + \mathbf{E}_x(\int_0^\tau Af(X_s)ds),$$

wobei A *der Generator der Itô-Diffusion* X *auf* $\mathbb{R}^n$ *ist.*

Beweis. *Die Behauptung folgt aus Gleichungen (6) und (9).* ■

A. 9 *Aus der Itô-Formel für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion* $Q(x,y)$, *die die Bedingung (41) erfüllt, haben wir*

$$\begin{aligned} dQ(\xi_1(t),\xi_2(t)) &= (\frac{\partial}{\partial x}d\xi_1(t) + \frac{\partial}{\partial y}d\xi_2(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}d\xi_1(t)d\xi_2(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}d\xi_2(t)d\xi_1(t) \\ &\quad +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}d\xi_1(t)d\xi_1(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}d\xi_2(t)d\xi_2(t))Q(\xi_1(t),\xi_2(t)). \end{aligned}$$

Sind $\xi_1(t) = x + \int_0^t \sigma(\xi_1(s))dB(s)$ *und* $\xi_2(t) = y + \int_0^t V(\xi_1(s))ds + \int_0^t b(\xi_1(s))dB(s)$, *dann folgt*

$$\begin{aligned} d\xi_1(t) &= \sigma(\xi_1(t))dB(t), \\ d\xi_2(t) &= V(\xi_1(t))dt + b(\xi_1(t))dB(t), \\ d\xi_1(t)d\xi_1(t) &= \sigma^2(\xi_1(t))dt, \\ d\xi_2(t)d\xi_2(t) &= b^2(\xi_1(t))dt, \\ d\xi_1(t)d\xi_2(t) &= d\xi_2(t)d\xi_1(t) = \sigma(\xi_1(t))b(\xi_1(t))dt. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} & dQ(\xi_1(t),\xi_2(t)) \\ = & (\frac{1}{2}\sigma^2(\xi_1(t))\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}b^2(\xi_1(t))\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sigma(\xi_1(t))b(\xi_1(t))\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + V(\xi_1(t))\frac{\partial}{\partial y})Q(\xi_1(t),\xi_2(t))dt \\ & +(\sigma(\xi_1(t))\frac{\partial}{\partial x} + b(\xi_1(t))\frac{\partial}{\partial y})Q(\xi_1(t),\xi_2(t))dB(t). \end{aligned}$$

A. 10 *Definiere* $Q(x,y) := f(x)\,e^y$, *dann ist*

$$\begin{aligned} q(t,x,y) &= \mathbf{E}_x(Q(\xi_1(t),\xi_2(t))) \\ &= \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))e^y \exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds + \int_0^t b(\xi_1(s))dB(s))) \\ &= e^y\, m(t,x), \end{aligned}$$

wobei $m(t,x) := \mathbf{E}_x(f(\xi_1(t))\exp(\int_0^t V(\xi_1(s))ds + \int_0^t b(\xi_1(s))dB(s)))$ *ist.*

A. 11 *Definiere* $F(z) = \int_x^z b(y)dy$. *Aus der Itô-Formel folgt*

$$\begin{aligned} dF(B(s)) &= F'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}F''(B(s))ds \\ dF(B(s)) - \frac{1}{2}F''(B(s))ds &= F'(B(s))dB(s) \\ d(\int_x^{B(s)} b(y)dy) - \frac{1}{2}b'(B(s))ds &= b(B(s))dB(s) \\ \int_0^t b(B(s))dB(s) &= \int_x^{B(t)} b(y)dy - \frac{1}{2}\int_0^t b'(B(s))ds. \end{aligned}$$

A. 12 *Zu zeigen*

$$\mathbf{E}_x(g(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds)) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n}\exp(\frac{-|x-y|^2}{2t})g(y)Q(x,y;V,t)dy.$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x(g(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds)) \\ =\ &\int_\Omega \mathbf{E}_x(g(B_t)\exp(-\int_0^t V(B_s)ds) \mid B_t = y)P_x(B_t \in dy) \\ =\ &\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n}\exp(\frac{-|x-y|^2}{2t})g(y)\mathbf{E}(\exp(-\int_0^t V((1-\frac{s}{t})x + \frac{s}{t}y + \sqrt{t}\alpha(\frac{s}{t}))ds))dy \\ =\ &\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n}\exp(\frac{-|x-y|^2}{2t})g(y)Q(x,y;V,t)dy. \end{aligned}$$

A. 13 *Zu zeigen*

$$\mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2\int_0^1 \alpha(s)^2 ds)) \le \int_0^1 \mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2\alpha(s)^2))ds.$$

Definiere $\hat{E}f(s) := \int_0^1 f(s)ds$, *dann folgt*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2\alpha(s)^2))ds &= \hat{E}\mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2\alpha(s)^2)) \\ &= \mathbf{E}\hat{E}(\exp(2\varepsilon t^2\alpha(s)^2)). \end{aligned}$$

Die Jensensche Ungleichung liefert

$$q(\hat{E}(X)) \le \hat{E}(q(X)),$$

wenn q eine konvexe Funktion ist. Also ist

$$\exp(\hat{E}(X)) \leq \hat{E}(\exp(X)).$$

Weiter definiere $X = 2\varepsilon t^2 \alpha(s)^2$, dann ist

$$\exp(2\varepsilon t^2 \int_0^1 \alpha(s)^2 ds) \quad \leq \quad \hat{E}(\exp(2\varepsilon t^2 \alpha(s)^2)).$$

Wir bilden den Erwartungswert E in dieser Ungleichung und erhalten

$$\mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2 \int_0^1 \alpha(s)^2 ds)) \quad \leq \quad \mathbf{E}\hat{E}(\exp(2\varepsilon t^2 \alpha(s)^2)) \quad = \quad \int_0^1 \mathbf{E}(\exp(2\varepsilon t^2 \alpha(s)^2)) ds.$$

A. 14 *Definiere $V_n(x) := max(V(x), -n),\ n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $-V_n(x) \leq -V(x)$. Weiter ist*

$$\begin{aligned} Q(x,y;V_n,t) \quad &:= \quad \mathbf{E}(\exp(-\int_0^t V_n((1-\frac{s}{t})x + \frac{s}{t}y + \sqrt{t}\alpha(\frac{s}{t}))ds)) \\ &\leq \quad \mathbf{E}(\exp(-\int_0^t V((1-\frac{s}{t})x + \frac{s}{t}y + \sqrt{t}\alpha(\frac{s}{t}))ds)) \\ &=: \quad Q(x,y;V,t) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Satz 5.27 haben wir

$$Q(x,y;V_n,t) \leq D\exp(\delta x^2 + \delta y^2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist

$$\begin{aligned} &\|e^{-tH_n}\varphi\|^2 \\ = \quad &\|\int dy \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \exp(\frac{-|x-y|^2}{2t}) Q(x,y;V_n,t)\varphi(y)\|^2 \\ = \quad &\int dx |\int dy \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \exp(\frac{-|x-y|^2}{2t}) Q(x,y;V_n,t)\varphi(y)|^2 \\ \leq \quad &\int dx (\int dy |\frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \exp(\frac{-|x-y|^2}{2t}) Q(x,y;V_n,t)\varphi(y)|)^2 \\ = \quad &\int dx (\int dy \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \exp(\frac{-|x-y|^2}{2t}) Q(x,y;V_n,t)|\varphi(y)|)^2 \\ \leq \quad &\int dx \int dy \frac{1}{(\sqrt{2\pi t})^n} \exp(\frac{-|x-y|^2}{2t}) Q^2(x,y;V_n,t)|\varphi(y)|^2 \\ \leq \quad &\frac{D^2}{(\sqrt{2\pi t})^n} \int dx \int dy \exp(\frac{-|x-y|^2}{2t}) \exp(2\delta x^2 + 2\delta y^2)|\varphi(y)|^2 \\ \leq \quad &\frac{D^2}{(\sqrt{2\pi t})^n} \int dx \int dy \exp(-(\frac{1}{2t} - 2\delta)|x|^2) \exp(-(\frac{1}{2t} - 2\delta)|y|^2) \exp(\frac{|x||y|}{t})|\varphi(y)|^2 \\ \leq \quad &\frac{D^2}{(\sqrt{2\pi t})^n} \int dx \int dy \exp(-(\frac{1}{2t} - 2\delta)|x|^2) \exp(-(\frac{1}{2t} - 2\delta)|y|^2) \exp(\frac{C(\varphi)|x|}{t})|\varphi(y)|^2 \\ = \quad &\frac{D^2}{(\sqrt{2\pi t})^n} \int \exp(-(\frac{1}{2t} - 2\delta)|y|^2)|\varphi(y)|^2 dy \int \exp(-(\frac{1}{2t} - 2\delta)|x|^2) \exp(\frac{C(\varphi)|x|}{t}) dx \\ \leq \quad &\frac{D^2}{(\sqrt{2\pi t})^n} \|\varphi\|_2^2 Vol(S^{n-1}) \int_0^\infty \exp(-(\frac{1}{2t} - 2\delta)r^2 + \frac{C(\varphi)r}{t}) dr, \end{aligned}$$

wobei $C(\varphi) := \sup\{|y| : y \in supp(\varphi)\}$ *ist. Der letzte Term*

$$\int_0^\infty \exp(-(\frac{1}{2t} - 2\delta)r^2 + \frac{C(\varphi)r}{t})dr$$

ist endlich. Da wir für festes t *jeweils* δ *so klein wählen können, so dass* $\frac{1}{2t} - 2\delta > 0$ *ist, definieren wir* $\alpha := \frac{1}{2t} - 2\delta > 0$ *und* $\beta := \frac{C(\varphi)}{t} > 0$. *Dann ist*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \exp(-(\frac{1}{2t} - 2\delta)r^2 + \frac{C(\varphi)r}{t})dr &= \int_0^\infty \exp(-\alpha r^2 + \beta r)dr \\
&= \int_0^\infty \exp(-\alpha(r^2 - \frac{\beta}{\alpha}r + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}))dr \exp(\frac{\beta^2}{4\alpha}) \\
&= \exp(\frac{\beta^2}{4\alpha}) \int_0^\infty \exp(-\alpha(r - \frac{\beta}{2\alpha})^2)d(r - \frac{\beta}{2\alpha}) \\
&= \exp(\frac{\beta^2}{4\alpha}) \int_0^\infty \exp(-\alpha z^2)dz < \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|e^{-tH_n}\varphi\| < \infty$$

für alle n.

A. 15 *Sei* $dX_t = \sigma(X_t)dB_t$; $X_0 = x$ *eine Itô-Diffusion auf* $\mathbb{R}^1$ *und* σ *eine Funktion, die die Bedingung (39) erfüllt. Hier wollen wir zeigen, wenn* $V(x) \geq -\varepsilon|x|^2 - C_\varepsilon$ *ist, dann folgt*

$$\mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^t V(X_\tau)d\tau)) < \infty.$$

Aus dem Satz von Dambis und Dubins-Schwarz (siehe [WW90], Theorem 9.2.3) folgt

$$X_\tau = B_{\int_0^\tau \sigma^2(X_s)ds},$$

wobei B *eine* 1*-dimensionale Brownsche Bewegung ist. Es ist klar, dass*

$$0 \leq \int_0^\tau \sigma^2(X_s)ds \leq \int_0^\tau D^2 ds = D^2\tau$$

ist. Folglich ist

$$|X_\tau| \leq \sup_{0 \leq s \leq D^2\tau} |B_s|.$$

Wenn $V(x) \geq -\varepsilon|x|^2 - C_\varepsilon$ *ist, haben wir*

$$\begin{aligned}
\int_0^t V(X_\tau)d\tau &\geq \int_0^t (-\varepsilon|X_\tau|^2 - C_\varepsilon)d\tau \\
&= -\varepsilon \int_0^t |X_\tau|^2 d\tau - C_\varepsilon t \\
&\geq -\varepsilon \int_0^t (\sup_{0 \leq s \leq D^2\tau} |B_s|)^2 d\tau - C_\varepsilon t \\
&\geq -\varepsilon t(\sup_{0 \leq s \leq D^2 t} |B_s|)^2 - C_\varepsilon t.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^t V(X_\tau)d\tau)) &\leq \mathbf{E}_x(\exp(\varepsilon t(\sup_{0\leq s\leq D^2 t}|B_s|)^2 + C_\varepsilon t)) \\
&= \exp(C_\varepsilon t)\,\mathbf{E}_x(\exp(\varepsilon t(\sup_{0\leq s\leq D^2 t}|B_s|)^2)).
\end{aligned}$$

Wenn $X \geq 0$ *ist, dann folgt*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(X) &= \int_\Omega X(w)dP_x(w) \\
&= \int_\Omega\int_0^\infty 1_{\{X\geq a\}}da\,dP_x(w) \\
&= \int_0^\infty\int_\Omega 1_{\{X\geq a\}}dP_x(w)da \\
&= \int_0^\infty P_x\{X\geq a\}da.
\end{aligned}$$

Unmittelbar folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(\exp(\varepsilon t(\sup_{0\leq s\leq D^2 t}|B_s|)^2)) &= \int_0^\infty P_x(\exp(\varepsilon t(\sup_{0\leq s\leq D^2 t}|B_s|)^2)\geq a)da \\
&= \int_0^\infty P_x(\sup_{0\leq s\leq D^2 t}|B_s| \geq (\frac{\log a}{\varepsilon t})^{\frac{1}{2}})da.
\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass für alle $a \geq 0$

$$P_x(\sup_{0\leq s\leq t}|B_s|\geq a) \leq 2P_x(\sup_{0\leq s\leq t}B_s \geq a) \tag{82}$$

ist. Weil

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq s\leq t}|B_s| &= \sup_{0\leq s\leq t}\max(B_s, -B_s) \\
&= \max(\sup_{0\leq s\leq t}B_s, \sup_{0\leq s\leq t}(-B_s))
\end{aligned}$$

ist, folgt

$$\begin{aligned}
P_x(\sup_{0\leq s\leq t}|B_s|\geq a) &= P_x(\sup_{0\leq s\leq t}B_s\geq a \text{ oder } \sup_{0\leq s\leq t}(-B_s)\geq a) \\
&\leq P_x(\sup_{0\leq s\leq t}B_s\geq a) + P_x(\sup_{0\leq s\leq t}(-B_s)\geq a) \\
&= 2P_x(\sup_{0\leq s\leq t}B_s\geq a).
\end{aligned}$$

Das Spiegelungsprinzip (Reflection principle) (siehe [RY91], Proposition 3.7) liefert, dass

$$P_x(\sup_{0\leq s\leq t}B_s\geq a) = 2P_x(B_t\geq a) = P_x(|B_t|\geq a)$$

ist. Aus (82) und dem Spiegelungsprinzip folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(\exp(\varepsilon t(\sup_{0\le s\le D^2t}|B_s|)^2)) &\le \int_0^\infty 2P_x(\sup_{0\le s\le D^2t} B_s \ge (\frac{\log a}{\varepsilon t})^{\frac{1}{2}})da \\
&= 4\int_0^\infty P_x(B_{D^2t} \ge (\frac{\log a}{\varepsilon t})^{\frac{1}{2}})da \\
&= 4\int_0^\infty P_x(\exp(\varepsilon t(B_{D^2t})^2) \ge a)da \\
&= 4\mathbf{E}_x(\exp(\varepsilon t(B_{D^2t})^2)) \\
&= 4\mathbf{E}_x(\exp(\varepsilon t D^2 B_t^2)) < \infty,
\end{aligned}$$

wenn ε so klein ist, dass $\varepsilon t D^2\mathbf{E}_x(B_t^2) < \frac{1}{2}$ gilt. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^t V(X_\tau)d\tau)) &\le \exp(C_\varepsilon t)\mathbf{E}_x(\exp(\varepsilon t(\sup_{0\le s\le D^2t}|B_s|)^2)) \\
&\le 4\exp(C_\varepsilon t)\mathbf{E}_x(\exp(\varepsilon t D^2 B_t^2)) < \infty,
\end{aligned}$$

wenn ε so klein ist, dass $\varepsilon t D^2\mathbf{E}_x(B_t^2) < \frac{1}{2}$ gilt, wobei $B_t = X_{T_t}$ und $T_t = \inf\{\tau : \int_0^\tau \sigma^2(X_s)ds > t\}$ ist.

A. 16 *Sei X eine Itô-Diffusion auf $\mathbb{R}^n$, die die Form*

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t;\ X_0 = x$$

hat, wobei σ die Bedingung (39) erfüllt. Dann folgt aus A. 15 und F.Knights multidimensionaler Version des Satzes von Dambis und Dubins-Schwarz (siehe [WW90], Theorem 9.2.5)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(\exp(-\int_0^t V(X_\tau)d\tau)) &\le \exp(C_\varepsilon t)\mathbf{E}_x(\exp(\int_0^t \varepsilon\sum_i |X_\tau^i|^2 d\tau)) \\
&\le \exp(C_\varepsilon t)\prod_i \mathbf{E}_{x_i}(\exp(\varepsilon t(\sup_{0\le\tau\le D^2t}|B_\tau^i|)^2)) \\
&\le 4^n\exp(C_\varepsilon t)\prod_i \mathbf{E}_{x_i}(\exp(\varepsilon t D^2(B_t^i)^2)) < \infty,
\end{aligned}$$

wenn $\varepsilon > 0$ so klein ist, dass $\varepsilon t D^2\mathbf{E}_{x_i}((B_t^i)^2) < \frac{1}{2}$ für alle i gilt, wobei $B_t^i = X_{T_t}^i$ und $T_t = \inf\{\tau : \int_0^\tau \sigma^2(X_s)ds > t\}$ ist.

A. 17 *Sei der Prozess X wie in A. 15. Nun wollen wir zeigen, dass für $K > 0$*

$$\mathbf{E}_x(\exp(K|X_\tau|)) < \infty$$

ist. Wir wissen von A. 15, dass

$$|X_\tau| \le \sup_{0\le s\le D^2\tau}|B_s|$$

ist. Daraus folgt

$$\mathbf{E}_x(\exp(K|X_\tau|)) \le \mathbf{E}_x(\exp(K\sup_{0\le s\le D^2\tau}|B_s|)).$$

Aus (82) und dem Spiegelungsprinzip folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(\exp(K \sup_{0\le s\le D^2\tau} |B_s|)) &= \int_0^\infty P_x(\exp(K \sup_{0\le s\le D^2\tau} |B_s|) \ge a)da \\
&= \int_0^\infty P_x(\sup_{0\le s\le D^2\tau} |B_s| \ge \frac{\log a}{K})da \\
&\le \int_0^\infty 2P_x(\sup_{0\le s\le D^2\tau} B_s \ge \frac{\log a}{K})da \\
&= 4\int_0^\infty P_x(B_{D^2\tau} \ge \frac{\log a}{K})da \\
&= 4\int_0^\infty P_x(\exp(KB_{D^2\tau}) \ge a)da \\
&= 4\mathbf{E}_x(\exp(KB_{D^2\tau})) \\
&= 4\mathbf{E}_x(\exp(KDB_\tau)) < \infty.
\end{aligned}
$$

Folglich ist

$$
\mathbf{E}_x(\exp(K|X_\tau|)) \le 4\mathbf{E}_x(\exp(KDB_\tau)) = 4\exp(KDx + \frac{K^2D^2}{2}\tau) < \infty.
$$

A. 18 *Sei X eine Itô-Diffusion auf $\mathbb{R}^n$ wie in A. 16, dann folgt aus A. 17 und F.Knights multidimensionaler Version des Satzes von Dambis und Dubins-Schwarz (siehe [WW90], Theorem 9.2.5)*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_x(\exp(K\|X_\tau\|)) &\le \mathbf{E}_x(\exp(K\sqrt{n}\sum_i |X_\tau^i|)) \\
&\le \mathbf{E}_x(\exp(K\sqrt{n}\sum_i \sup_{0\le s\le D^2\tau} |B_s^i|)) \\
&\le \prod_i \mathbf{E}_{x_i}(\exp(K\sqrt{n} \sup_{0\le s\le D^2\tau} |B_s^i|)) \\
&\le 4^n \prod_i \mathbf{E}_{x_i}(\exp(K\sqrt{n}DB_\tau^i)) \\
&= 4^n \prod_i \exp(K\sqrt{n}Dx_i + \frac{K^2nD^2}{2}\tau) \\
&= 4^n \exp(\frac{(KnD)^2}{2}\tau) \exp(K\sqrt{n}D\sum_i x_i) < \infty.
\end{aligned}
$$

A. 19 *Sei Y_t eine Itô-Diffusion auf $\mathbb{R}^n$ mit*

$$
dY_t = V(X_t)dt + b(X_t)dB_t;\ Y_0 = y,
$$

wobei X_t wie in A. 16 ist und die Funktionen V und b die Bedingungen (42) und (39) erfüllen. Dann folgt

$$
\mathbf{E}_x(\exp(C\|Y_t\|)) \le \mathbf{E}_x(\exp(C\|y\|)\exp(C\|\int_0^t V(X_s)ds\|)\exp(C\|\int_0^t b(X_s)dB_s\|))
$$

für $C > 0$. *Aus A. 16 folgt*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x(\exp(C\|\int_0^t V(X_s)ds\|)) &\leq \mathbf{E}_x(\exp(C\int_0^t \|V(X_s)\|ds)) \\ &\leq \mathbf{E}_x(\exp(C\sqrt{n}\int_0^t \sum_i |V_i(X_s)|ds)) \\ &= \prod_i \mathbf{E}_{x_i}(\exp(Cn\int_0^t |V_i(X_s)|ds)) < \infty.\end{aligned}$$

Analog zu A. 18 haben wir

$$\mathbf{E}_x(\exp(C\|\int_0^t b(X_s)dB_s\|)) < \infty.$$

Diese Resultate zusammen mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung implizieren

$$\mathbf{E}_x(\exp(C\|Y_t\|)) < \infty.$$

A. 20 Definition *Eine Familie* $\{\frac{1}{t-t'}(f(t,x) - f(t',x))\}_{t\neq t',\, t,t'\in I}$ *heißt gleichmäßig integrierbar genau dann, wenn es für alle* $\eta > 0$, $\delta > 0$ *mit* $P(A) < \delta$ *gibt, so dass*

$$\mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t'}1_A|f(t,x) - f(t',x)|) < \eta$$

ist.

A. 21 Lemma *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein Interval. Wenn die Familie*

$$\{\frac{1}{t-t'}(f(t,x) - f(t',x))\}_{t\neq t',\, t,t'\in I}$$

gleichmäßig integrierbar ist, dann ist $\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)$ *integrierbar und*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int f(t,x)d\mu(x)) = \int(\frac{\partial}{\partial t}f(t,x))d\mu(x).$$

Beweis. *Definiere* $g_n(x) := \frac{1}{t_n-t}(f(t_n,x) - f(t,x))$, *dann folgt*

$$g_n(x) \to \frac{\partial}{\partial t}f(t,x), \text{ wenn } t_n \to t.$$

Ist die Familie

$$\{\frac{1}{t-t'}(f(t,x) - f(t',x))\}_{t\neq t',\, t,t'\in I}$$

gleichmäßig integrierbar, dann ist die Familie $\{g_n(x)\}_n$ *auch gleichmäßig integrierbar. Folglich ist*

$$\lim_{t_n\to t}\int(g_n(x))d\mu(x) = \int(\frac{\partial}{\partial t}f(t,x))d\mu(x).$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}\lim_{t_n\to t}\int(g_n(x))d\mu(x) &= \lim_{t_n\to t}\frac{1}{t_n-t}(\int f(t_n,x)d\mu(x) - \int f(t,x)d\mu(x)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\int f(t,x)d\mu(x)).\end{aligned}$$

Unmittelbar folgt
$$\frac{\partial}{\partial t}(\int f(t,x)d\mu(x)) = \int (\frac{\partial}{\partial t} f(t,x))d\mu(x).$$
■

A. 22 *Wir wollen zeigen, dass die Familie*
$$\{\frac{1}{t-t_0}(\int_{t_0}^{t} L_{V,\sigma} f(\xi_1(s))Z_s ds)\}_{t\neq t_0,\, t,\, t_0\in I}$$
gleichmäßig integrierbar ist, wobei $Z_t := e^{\int_0^t V(\xi_1(s))ds}$ *ist. Nach der Definition in A. 20 müssen wir zeigen: Für alle* $\eta > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$*, so dass für alle Ereignisse* A *mit* $P(A) < \delta$ *gilt*
$$\mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0} 1_A | \int_{t_0}^{t} L_{V,\sigma} f(\xi_1(s))Z_s ds|) < \eta.$$
Aus den Eigenschaften der Funktionen σ, V, f *und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir*
$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0} 1_A | \int_{t_0}^{t} L_{V,\sigma} f(\xi_1(s))Z_s ds|) \\
\leq\ & \frac{1}{t-t_0}\mathbf{E}_x(1_A \int_{t_0}^{t} |L_{V,\sigma} f(\xi_1(s))Z_s| ds) \\
\leq\ & \frac{1}{t-t_0}\mathbf{E}_x(1_A \int_{t_0}^{t} K^*K \exp(C^*\|\xi_1(s)\|)\exp(\int_0^s |V(\xi_1(u))|du)ds) \\
\leq\ & \frac{1}{t-t_0} K^*K \int_{t_0}^{t} \mathbf{E}_x(1_A \exp(C^*\|\xi_1(s)\|)\exp(\int_0^s |V(\xi_1(u))|du))ds \\
\leq\ & K^*K \max_{s\in(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)} \mathbf{E}_x(1_A \exp(C^*\|\xi_1(s)\|)\exp(\int_0^s |V(\xi_1(u))|du)) \\
\leq\ & K^*K \max_{s\in(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)} (\mathbf{E}_x(1_A^2))^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_x(\exp(4C^*\|\xi_1(s)\|)))^{\frac{1}{4}}(\mathbf{E}_x(\exp(\int_0^s 4|V(\xi_1(u))|du)))^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$
Sei jetzt $P(A) < \delta$*. Aus A. 18 und A. 16 bekommen wir*
$$\max_{s\in(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)} (\mathbf{E}_x(1_A^2))^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_x(\exp(4C^*\|\xi_1(s)\|)))^{\frac{1}{4}}(\mathbf{E}_x(\exp(\int_0^s 4|V(\xi_1(u))|du)))^{\frac{1}{4}} \leq \delta^{\frac{1}{2}} C_1 C_2$$
für $C_1, C_2 > 0$*. Nun haben wir*
$$\mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0} 1_A | \int_{t_0}^{t} L_{V,\sigma} f(\xi_1(s))Z_s ds|) \quad \leq \quad K^*K\delta^{\frac{1}{2}} C_1 C_2.$$
Daraus folgt, dass es für alle $\eta > 0$ *ein* $\delta \leq (\frac{\eta}{K^*KC_1C_2})^2$ *gibt mit* $P(A) < \delta$*, so dass*
$$\mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0} 1_A | \int_{t_0}^{t} L_{V,\sigma} f(\xi_1(s))Z_s ds|) < \eta$$
ist.

A. 23 *Wir wollen zeigen, dass die Familie*

$$\{\frac{1}{t-t_0}(\int_{t_0}^{t} L_{V,b,\sigma}Q(\xi_1(s),\xi_2(s))ds)\}_{t\neq t_0,\, t,\, t_0\in I}$$

gleichmäßig integrierbar ist. Nach der Definition in A. 20 müssen wir zeigen: Für alle $\eta > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$*, so dass für alle Ereignisse* A *mit* $P(A) < \delta$ *gilt*

$$\mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0}1_A|\int_{t_0}^{t} L_{V,b,\sigma}Q(\xi_1(s),\xi_2(s))ds|) < \eta.$$

Aus den Eigenschaften der Funktionen σ, b, V, Q *und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir*

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0}1_A|\int_{t_0}^{t} L_{V,b,\sigma}Q(\xi_1(s),\xi_2(s))ds|) \\
\leq\; & \frac{1}{t-t_0}\mathbf{E}_x(1_A\int_{t_0}^{t} |L_{V,b,\sigma}Q(\xi_1(s),\xi_2(s))|ds) \\
\leq\; & \frac{1}{t-t_0}\mathbf{E}_x(1_A\int_{t_0}^{t} (K^*+nK)\exp(C^*(\|\xi_1(s)\|+\|\xi_2(s)\|))ds) \\
\leq\; & \frac{1}{t-t_0}(K^*+nK)\int_{t_0}^{t} \mathbf{E}_x(1_A\exp(C^*\|\xi_1(s)\|)\exp(C^*\|\xi_2(s)\|))ds \\
\leq\; & (K^*+nK)\max_{s\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)} \mathbf{E}_x(1_A\exp(C^*\|\xi_1(s)\|)\exp(C^*\|\xi_2(s)\|)) \\
\leq\; & (K^*+nK)\max_{s\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)} (\mathbf{E}_x(1_A^2))^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_x(\exp(4C^*\|\xi_1(s)\|)))^{\frac{1}{4}}(\mathbf{E}_x(\exp(4C^*\|\xi_2(s)\|)))^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

Sei jetzt $P(A) < \delta$*. Aus A. 18 und A. 19 bekommen wir*

$$\max_{s\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)} (\mathbf{E}_x(1_A^2))^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_x(\exp(4C^*\|\xi_1(s)\|)))^{\frac{1}{4}}(\mathbf{E}_x(\exp(4C^*\|\xi_2(s)\|)))^{\frac{1}{4}} \leq \delta^{\frac{1}{2}}C_1C_3$$

für $C_1, C_3 > 0$*. Nun haben wir*

$$\mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0}1_A|\int_{t_0}^{t} L_{V,b,\sigma}Q(\xi_1(s),\xi_2(s))ds|) \leq (K^*+nK)\delta^{\frac{1}{2}}C_1C_3.$$

Daraus folgt, dass es für alle $\eta > 0$ *ein* $\delta \leq (\frac{\eta}{(K^*+nK)C_1C_3})^2$ *gibt mit* $P(A) < \delta$*, so dass*

$$\mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0}1_A|\int_{t_0}^{t} L_{V,b,\sigma}Q(\xi_1(s),\xi_2(s))ds|) < \eta$$

ist.

A. 24 *Wir wollen zeigen, dass die Familie*

$$\{\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} L_{V,b}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du + \int_0^s b(B(u))dB(u))ds\}_{t\neq t_0,\, t,\, t_0\in I}$$

gleichmäßig integrierbar ist. Nach der Definition in A. 20 müssen wir zeigen: Für alle $\eta > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$*, so dass für alle Ereignisse* A *mit* $P(A) < \delta$ *gilt*

$$\mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0}1_A|\int_{t_0}^{t} L_{V,b}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du + \int_0^s b(B(u))dB(u))ds|) < \eta.$$

Aus den Eigenschaften der Funktionen V, b, f und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x(\frac{1}{t-t_0}1_A|\int_{t_0}^t L_{V,b}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du+\int_0^s b(B(u))dB(u))ds|) \\
\le\ & \frac{1}{t-t_0}\mathbf{E}_x(1_A\int_{t_0}^t |L_{V,b}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du+\int_0^s b(B(u))dB(u))|ds) \\
\le\ & \frac{1}{t-t_0}\mathbf{E}_x(1_A\int_{t_0}^t (\frac{1}{2}|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(B(s))|+\frac{1}{2}K^2|f(B(s))|+K|\frac{\partial}{\partial x}f(B(s))| \\
& +(\varepsilon|B(s)|^2+C_\varepsilon)|f(B(s))|)\exp(\int_0^s |V(B(u))|du+|\int_0^s b(B(u))dB(u)|)ds) \\
\le\ & \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^t \mathbf{E}_x(1_A(\frac{1}{2}|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(B(s))|+\frac{1}{2}K^2|f(B(s))|+K|\frac{\partial}{\partial x}f(B(s))| \\
& +|f(B(s))|)\exp(\beta|B(s)|)\exp(\int_0^s |V(B(u))|du+|\int_0^s b(B(u))dB(u)|))ds \\
\le\ & \max_{s\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}\mathbf{E}_x(1_A(\frac{1}{2}|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(B(s))|+\frac{1}{2}K^2|f(B(s))|+K|\frac{\partial}{\partial x}f(B(s))| \\
& +|f(B(s))|)\exp(\beta|B(s)|)\exp(\int_0^s |V(B(u))|du+|\int_0^s b(B(u))dB(u)|)) \\
=\ & \max_{s\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}\mathbf{E}_x(1_A\frac{1}{2}|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(B(s))|\exp(\beta|B(s)|) \\
& \times\exp(\int_0^s |V(B(u))|du+|\int_0^s b(B(u))dB(u)|)) \\
& +\max_{s\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}\mathbf{E}_x(1_A\frac{1}{2}K^2|f(B(s))|\exp(\beta|B(s)|) \\
& \times\exp(\int_0^s |V(B(u))|du+|\int_0^s b(B(u))dB(u)|)) \\
& +\max_{s\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}\mathbf{E}_x(1_A K|\frac{\partial}{\partial x}f(B(s))|\exp(\beta|B(s)|) \\
& \times\exp(\int_0^s |V(B(u))|du+|\int_0^s b(B(u))dB(u)|)) \\
& +\max_{s\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}\mathbf{E}_x(1_A|f(B(s))|\exp(\beta|B(s)|) \\
& \times\exp(\int_0^s |V(B(u))|du+|\int_0^s b(B(u))dB(u)|))
\end{aligned}$$

Aus (61), (62), (63), der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, A. 16 und A. 18 folgt, dass die Familie

$$\{\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^t L_{V,\sigma}f(B(s))\exp(\int_0^s V(B(u))du+\int_0^s b(B(u))dB(u))ds\}_{t\neq t_0,t,t_0\in I}$$

gleichmäßig integrierbar ist.

Bezeichnungen

Im Folgenden fasse ich kurz die Bedeutungen einiger Symbole zusammen, die in der Arbeit verwendet werden. Die meisten Symbole werden auch im eigentlichen Text definiert.

$C^\infty(M)$	bezeichnet die beliebig oft differenzierbaren, stetigen Funktionen auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit M.
$C^2(M)$	bezeichnet die stetigen Funktionen auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit M, die darüberhinaus stetige zweite Ableitungen besitzen.
$C(\mathbb{R}^n)$	bezeichnet die stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$.
$C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ bzw. $C([0,\infty), \mathbb{R}^n)$	bezeichnet die stetigen Funktionen von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}^n$.
$C_b(\mathbb{R}^n)$	bezeichnet die stetigen beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}^n$.
$C_0(\mathbb{R}^n)$ bzw. $C_\infty(\mathbb{R}^n)$	bezeichnet die stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die im Unendlichen verschwinden.
$C^1(\mathbb{R}^n)$	bezeichnet die stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die darüberhinaus stetige erste Ableitungen besitzen.
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$	bezeichnet die beliebig oft differenzierbaren, stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$.
$C_c^2(\mathbb{R}^n)$	bezeichnet die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$, die darüberhinaus stetige zweite Ableitungen besitzen.
$C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$	bezeichnet die stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die darüberhinaus stetige erste Ableitungen bezüglich der ersten Variable und stetige zweite Ableitungen bezüglich der zweiten Variable besitzen.
$\mathbb{R}_+$	bezeichnet das Interval $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$.
P_x	bezeichnet die Verteilung bezüglich des Prozesses mit dem Startpunkt x.
$\mathbf{E}_x$	bezeichnet die Erwartung bezüglich des Prozesses mit dem Startpunkt x bzw. den Erwartungswert bezüglich P_x.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	bezeichnet die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$.
$L^2(\mathbb{R}^n)$	ist die Menge aller integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, d.h. genau dann ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, wenn $\int_{\mathbb{R}^n} \lvert f(x)\rvert^2 dx < \infty$ gilt.
$L^\infty(\mathbb{R}^n)$	ist die Menge aller meßbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, so dass für $M < \infty$, $\lvert f(x)\rvert \leq M$ fast überall bezüglich des Lebesguemaßes ist.
S_+^n	bezeichnet die Menge der symmetrischen, nicht-negativ definiten $n \times n$-Matrizen.
$\mathcal{F}_t,\ t > 0$	bezeichnet die kanonischen Filtrationen auf $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.
$\mathcal{F}_t^+,\ t > 0$	bezeichnet die rechts-stetigen kanonischen Filtrationen auf $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.
A_c	bezeichnet den Raum aller rechts-stetigen adaptierten Prozesse A, $A_0 = 0$ von lokal endlicher Variation, die fast sicher stetig sind.
M_c	bezeichnet den Raum aller fast sicher stetigen lokalen Martingale.

Literatur

[BLM04] K. Broderix, H. Leschke, and P. Müller, *Continuous Integral Kernels for Unbounded Schrödinger Semigroups and Their Spectral Projections*, J. Funct. Anal. **212** (2004), 287–323.

[Bor00] A.N. Borodin, *Version of the Feynman-Kac Formula*, Journal of Mathematical Sciences **99** (2000), no. 2, 1044–1052.

[CZ95] Kai Lai Chung and Zhongxin Zhao, *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1995.

[Fug78] B. Fuglede, *Harmonic Morphisms between Riemannian Manifolds*, Ann. Inst. Fourier **28** (1978), 107–144.

[KS91] I. Karatzas and S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, second ed., Springer, New York, 1991.

[LS77] R.S. Liptser and A.N. Shiryayev, *Statistics of Random Processes I. General Theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1977.

[Øks90] B. Øksendal, *When is a Stochastic Integral Time Change of a Diffusion ?*, J. Theor. Prob. **3** (1990), 207–226.

[Øks98] ______, *Stochastic Differential Equation : An Introduction with Applications*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1998.

[RS72] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics 1 : Functional Analysis*, Academic Press, New York-London, 1972.

[RS75] ______, *Methods of Modern Mathematical Physics 2 : Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1975.

[RW87] L.C.G. Rogers and D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, vol. 2: Ito Calculus, John Wiley & Sons, Inc., Chichester-New York-Brisbane-Toronto, 1987.

[RY91] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1991.

[Sim79] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1979.

[Sim00] ______, *A Feynman-Kac Formula for Unbounded Semigroups*, Canadian Math. Soc. Conf. Proc. **28** (2000), 317–321.

[Szn98] A.-S. Sznitman, *Brownian Motion, Obstacles and Random Media*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1998.

[Tay97] M.E. Taylor, *Partial Differential Equation I (Basic Theory)*, second ed., Springer, New York-Heidelberg, 1997.

[WA86] H. Werner and H. Arndt, *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung in Theorie und Praxis*, Springer, 1986.

[Wil79] D. Williams, *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, John Wiley & Sons, Inc., Chichester-New York-Brisbane-Toronto, 1979.

[Wit97] O. Wittich, *Eine Invarianzeigenschaft Brownscher Bewegung und Transformationen der Feynman-Kac-Formel*, Ph.D. thesis, mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultäten der Georg-August-Universität zu Göttingen, 1997.

[WW90] H.v. Weizsäcker and G. Winkler, *Stochastic Integrals*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1990.

Wissenschaftlicher Werdegang

08.05.1964	Geboren in Makassar (Indonesien)
1971-1976	Besuch der indonesischen Grundschule in Makassar
1977-1983	Besuch des Gymnasiums in Makassar
1983-1987	Studium an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Hasanuddin-Makassar
Seit 1988	Dozentin an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Hasanuddin-Makassar
1991-1993	Stipendiatin an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät im Institut Teknologi Bandung (Indonesien) für "Magister of Science"
1997-1999	Stipendiatin des Deutschen Akademischen Austauschdiensts (DAAD) an der Universität Kaiserslautern, Mathematics International mit den Abschluss "Master of Science"
Seit Oktober 1999	Promotionsstudium bei Prof. Dr. H.v. Weizsäcker im Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern
1999-2002	Stipendiatin des Deutschen Akademischen Austauschdiensts (DAAD) im Fachbereich Mathematik der Universität Kaiserslautern
2002-2003	Stipendiatin der Universität Kaiserslautern

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eidesstatt, dass ich die vorliegende Arbeit selbst und nur unter Verwendung der in der Arbeit genannten Hilfen und Literatur angefertigt habe.

Ong Mei Fang

Kaiserslautern, den 19 April 2004.

Lebenslauf

08.05.1964	Geboren in Makassar (Indonesien)
1971-1976	Besuch der indonesischen Grundschule in Makassar
1977-1983	Besuch des Gymnasiums in Makassar
1983-1987	Studium an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Hasanuddin-Makassar
Seit 1988	Dozentin an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Hasanuddin-Makassar
1991-1993	Stipendiatin an der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät im Institut Teknologi Bandung (Indonesien) für "Magister of Science"
1997-1999	Stipendiatin des Deutschen Akademischen Austauschdiensts (DAAD) an der technischen Universität Kaiserslautern, Mathematics International mit den Abschluss "Master of Science"
Seit Oktober 1999	Promotionsstudium bei Prof. Dr. H.v. Weizsäcker im Fachbereich Mathematik der technischen Universität Kaiserslautern
1999-2002	Stipendiatin des Deutschen Akademischen Austauschdiensts (DAAD) im Fachbereich Mathematik der technischen Universität Kaiserslautern
2002-2003 (7 Monate)	Stipendiatin der technischen Universität Kaiserslautern
21 Mai 2004	Disputation
Familienstand	verheiratet
Zahl der Kinder	2 (zwei)
Geburtsdaten der Kinder	19 Juni 1994 und 9 Oktober 1990

Kaiserslautern, den 19 Juli 2004

Mei Fang Ong