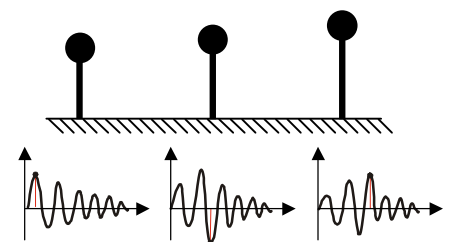
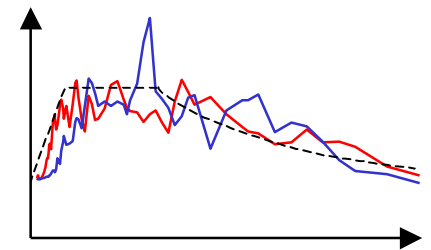
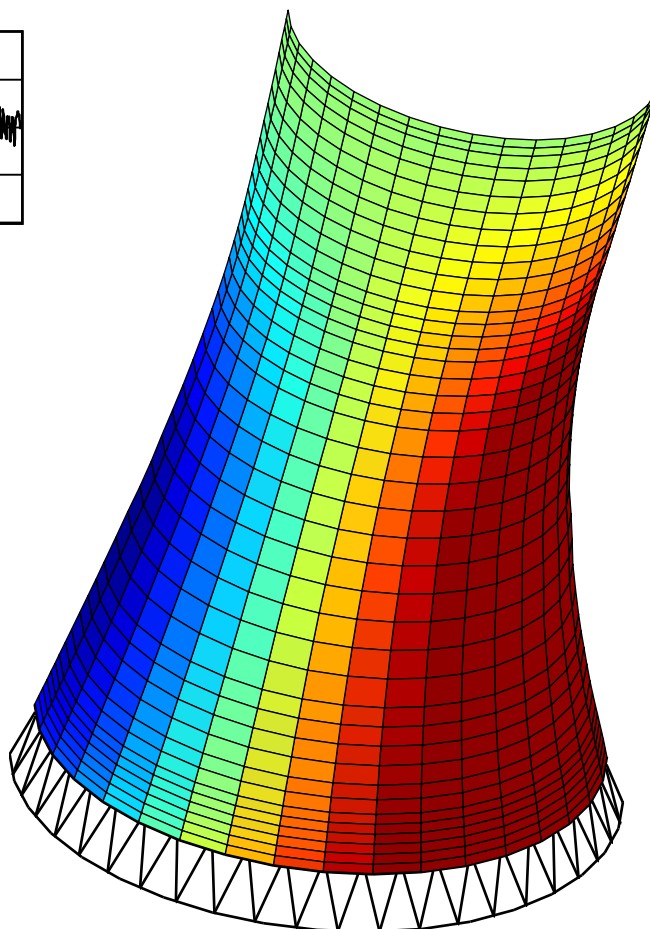
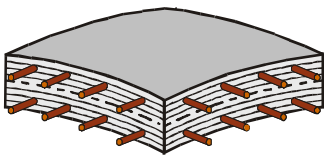
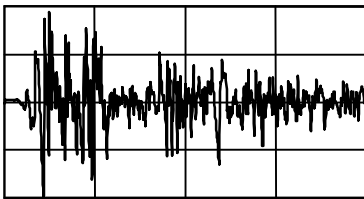


**Christian Lang**

**Beitrag zur Theorie, Numerik  
und Anwendung nichtlinearer  
Algorithmen zur statischen  
und dynamischen Analyse von  
Stahlbetonrotationschalen**



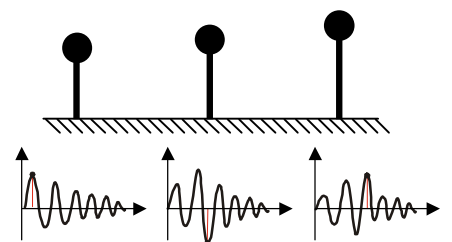
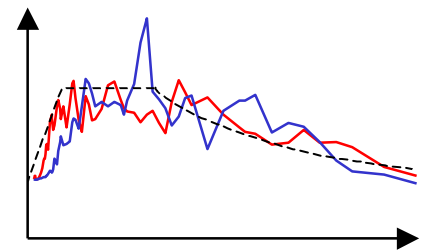
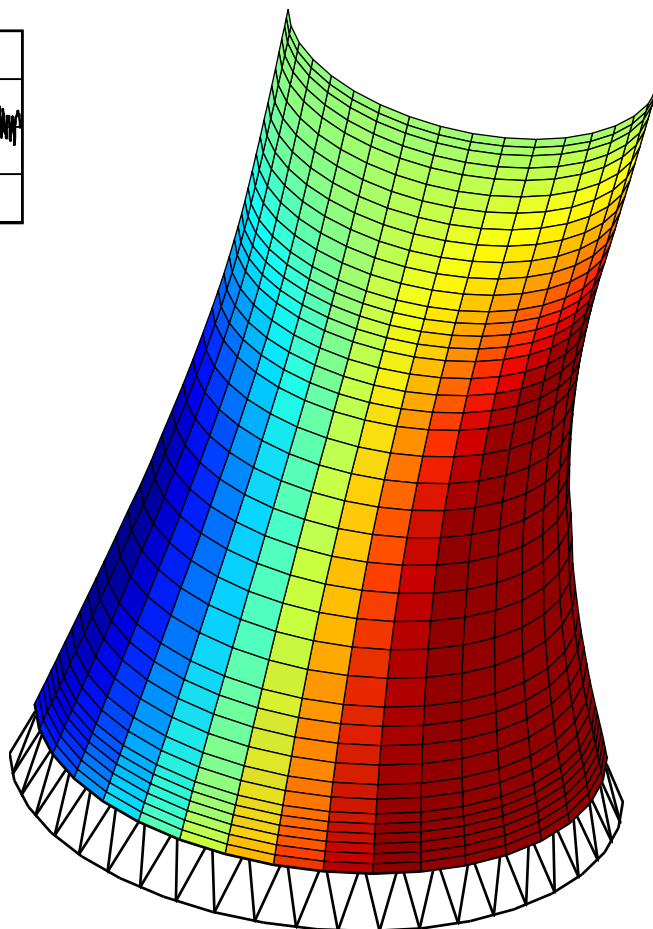
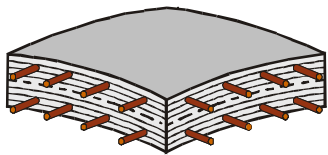
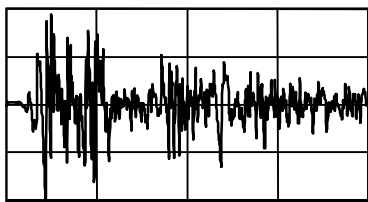






**Christian Lang**

**Beitrag zur Theorie, Numerik  
und Anwendung nichtlinearer  
Algorithmen zur statischen  
und dynamischen Analyse von  
Stahlbetonrotationschalen**



## **Herausgeber**

**Prof. Dr.-Ing. U. Wittek**

Fachgebiet Baustatik

Universität Kaiserslautern

Postfach 3049

67653 Kaiserslautern

Telefon: 0631 – 205-2931

Telefax: 0631 – 205-3901

e-mail: [wittek@rhrk.uni-kl.de](mailto:wittek@rhrk.uni-kl.de)

© **2003 Dr.-Ing. C. Lang**

Viernheimer Str. 1b

67227 Frankenthal

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen.

## **Zusammenfassung**

Die vorliegende Arbeit behandelt Algorithmen zur nichtlinearen statischen und dynamischen Analyse von rotationssymmetrischen Schalenstrukturen aus Stahlbeton. Hierzu werden die Grundlagen eines zwei axialen Stahlbetonmodells beschrieben, das die Erfassung von Vorschädigungen erlaubt. Dieses Modell findet Berücksichtigung innerhalb einer geometrisch und physikalisch nichtlinearen Flächentragwerkstheorie, die im Rahmen einer inkrementell iterativen FE-Formulierung für ein doppelt gekrümmtes Schalenringelement unter Herleitung sämtlicher Elementbeiträge umgesetzt wird. Somit wird ein wichtiger Beitrag zur allgemeinen Theorie und Numerik von Ringelementen geleistet. Ferner wird zur Lösung des nichtlinearen Bewegungsdifferentialgleichungssystems die Anpassung von bekannten Zeitintegrationsverfahren an das Ringelementkonzept vorgeführt; ein weiterer wesentlicher neuartiger Aspekt besteht darüber hinaus in der Verwendung modaler Lösungsverfahren mit Berücksichtigung von Nichtlinearitäten bei inkrementell iterativer Bestimmung der Beteiligungsfaktoren. Im Mittelpunkt der baupraktischen Anwendung der vorgestellten Elemente und Algorithmen steht die Auslegung von Rotationsschalen gegen Erdbebeneinwirkungen. Hierbei werden insbesondere an ausgewählten Beispielen des konstruktiven Ingenieurbaus wie am Spezialfall eines Naturzugkühlturms nichtlineare dynamische Effekte aufgezeigt und erläutert sowie deren Konsequenzen auf die Tragwerksauslegung erörtert.

## **Summary**

In this thesis, algorithms for non-linear static and dynamic analysis of RC shells of revolution are presented. Therefore, the basics of a constitutive model for reinforced concrete are described, which allows the consideration of damage effects as well as history variables. This model is introduced into a non-linear shell theory, from which a double curved finite shell ring element is derived. Thus, an important contribution to general theory and numerics of ring elements is given. Further, for solving the non-linear differential equations of motion an adaptation of incremental time integration schemes to ring elements is presented. Another significant new aspect is given by the formulation of modal superposition algorithms with inclusion of non-linear structural behaviour where participation factors are computed in linearised integration steps. The presented elements and algorithms are applied to analysis of shells of revolution under seismic ground acceleration. Here, non-linear dynamic effects are presented and explained for selected examples with discussion of consequences on required reinforcement amounts.

## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Baustatik der Universität Kaiserslautern sowie während meines einjährigen Aufenthalts an der University of California at Berkeley im Fachbereich SEMM (Structural Engineering, Mechanics and Materials) und wurde vom Fachbereich Architektur/Raum- und Umweltplanung/Bauingenieurwesen der Universität Kaiserslautern als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. U. Wittek als meinem langjährigen Lehrer und Doktorvater bin ich für meine wissenschaftliche Ausbildung, seine Anregungen zu dieser Arbeit sowie für die Unterstützung und Förderung zu besonderem Dank verpflichtet. Herrn Prof. F. C. Filippou als auswärtigem Berichtser möchte ich ebenso meinen herzlichen Dank für die Übernahme des zweiten Berichts, seine fortlaufende Unterstützung, die Ermöglichung meines Aufenthalts in Berkeley und nicht zuletzt für seine zuvorkommende Gastfreundschaft aussprechen. Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Wassermann danke ich herzlich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Mein besonderer Dank gilt auch den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Baustatik, die in kooperativer Zusammenarbeit viele Grundlagen zu dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders möchte ich in diesem Zusammenhang den ehemaligen Oberingenieur Herrn Dr.-Ing. R. Meiswinkel hervorheben, dem ich für seine wissenschaftliche Anleitung und Förderung danke.

Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst DAAD, dem Bundesland Rheinland-Pfalz sowie dem Evangelischen Studienwerk e.V. Villigst danke ich für die gewährte Unterstützung und den dadurch geschaffenen Freiraum bei der Bearbeitung meiner wissenschaftlichen Forschungsaufgaben und der vorliegenden Dissertation.

Kaiserslautern, im Juni 2003

Christian Lang

Tag der Einreichung: 29. Januar 2003

Tag der mündlichen Prüfung: 06. Juni 2003

Berichter: Prof. Dr.-Ing. U. Wittek  
Prof. F. C. Filippou, Ph.D.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Allgemeines . . . . .	1
1.2	Motivation und Zielsetzung . . . . .	2
1.3	Einführungsbeispiel zur nichtlinearen Dynamik . . . . .	5
1.4	Gliederung der vorliegenden Arbeit . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>15</b>
2.1	Vorbemerkungen . . . . .	15
2.2	Kinematik des Kontinuums . . . . .	17
2.2.1	Deformationsabbildung und Deformationsgradient . . . . .	17
2.2.2	Verzerrungsmaße . . . . .	21
2.3	Spannungsmaße . . . . .	22
2.3.1	CAUCHY Spannungen . . . . .	22
2.3.2	PIOLA-KIRCHHOFF Spannungen 1. Art . . . . .	24
2.3.3	PIOLA-KIRCHHOFF Spannungen 2. Art . . . . .	25
2.3.4	Spektralzerlegung, Invarianten und Oktaederdarstellung . . . . .	26
2.4	Bilanzsätze . . . . .	28

---

2.4.1	Massebilanz . . . . .	28
2.4.2	Impuls- und Drehimpulserhaltung . . . . .	29
2.5	Zusammenfassende Betrachtung des Systems der Grundgleichungen . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Modellierung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton</b>	<b>35</b>
3.1	Allgemeine Vorbemerkungen . . . . .	35
3.2	Zusammenhang Spannungen – Schnittgrößen . . . . .	36
3.3	Stoffgesetze für Beton . . . . .	39
3.3.1	Überblick . . . . .	39
3.3.2	Zweiachiales Werkstoffverhalten von Beton . . . . .	42
3.3.3	Zweiachiale Stoffgesetze für den ungeschädigten Beton . . . . .	44
3.3.4	Orthotrope elasto-plastische Stoffgesetzerweiterung . . . . .	45
3.4	Stoffgesetze für Stahl . . . . .	46
3.4.1	Allgemeines . . . . .	46
3.4.2	Einachiales elasto-plastisches Gesetz für Betonstahl . . . . .	47
3.5	Modellierung des Verbunds – Tension Stiffening . . . . .	48
3.5.1	Phänomenologische Beschreibung . . . . .	48
3.5.2	Konzept der äquivalenten Betonspannungen . . . . .	51
3.5.3	Entlastungsgesetz für den Beton im Zugbereich . . . . .	55
3.5.4	Zweiachiales Werkstoffgesetz für den Verbund . . . . .	56
3.6	Einordnung des verwendeten Werkstoffmodells . . . . .	58
3.7	Übersicht über die Dämpfungsarten . . . . .	59
3.7.1	Allgemeines . . . . .	59

---

3.7.2	LEHRsches Dämpfungsmaß . . . . .	61
3.7.3	RAYLEIGH Dämpfung . . . . .	63
3.8	Anwendungsbeispiel . . . . .	65
3.8.1	System und Belastung . . . . .	65
3.8.2	Eigenfrequenzen des ungeschädigten Systems . . . . .	66
3.8.3	Zeitverläufe der Antwortgrößen . . . . .	67
3.8.4	Vereinfachte Überprüfung der nichtlinearen Effekte . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Grundgleichungen einer nichtlinearen Flächentragwerkstheorie</b>	<b>77</b>
4.1	Annahmen und Voraussetzungen . . . . .	77
4.2	Differentialgeometrie . . . . .	78
4.3	Verformungszustand des Flächentragwerks . . . . .	82
4.4	Kinematische Beziehungen . . . . .	85
4.5	Schnittgrößen und konstitutive Beziehungen . . . . .	90
4.6	Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Herleitung und Umsetzung eines Schalenringelements</b>	<b>97</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	97
5.1.1	Übersicht über den aktuellen Stand der Forschung . . . . .	97
5.1.2	Allgemeines zum Programmsystem FEMAS, ROSHE . . . . .	100
5.2	Grundlegende Überlegungen und inkrementelle Betrachtungsweise . . . . .	101
5.2.1	Anforderungen an Finite Elemente . . . . .	101
5.2.2	Grundprinzip der Ringelemente . . . . .	104
5.2.3	Inkrementelle Formulierung . . . . .	105

---

5.3	Geometrische Beziehungen für das Schalenringelement . . . . .	115
5.3.1	Beschreibung der Geometrie . . . . .	115
5.3.2	Ansätze für die unbekanntes Feldverschiebungen . . . . .	116
5.3.3	Transformation der Freiwerte . . . . .	117
5.4	Herleitung der Elementmatrizen für das Schalenringelement . . . . .	123
5.4.1	Lineare Elementsteifigkeitsmatrix . . . . .	123
5.4.2	Vektor der äußeren Knotenkräfte . . . . .	125
5.4.3	Massenmatrix und Massenkräfte . . . . .	126
5.4.4	Vektor der inneren Knotenkräfte . . . . .	128
5.4.5	Tangentiale Steifigkeitsmatrix . . . . .	133
5.4.5.1	Elastische Steifigkeitsmatrix . . . . .	133
5.4.5.2	Geometrische Steifigkeitsmatrix . . . . .	135
5.4.6	Dämpfungskräfte und Dämpfungsmatrix . . . . .	137
5.4.6.1	Äußere Dämpfungskräfte . . . . .	137
5.4.6.2	Dämpfungsmatrix infolge äußerer Dämpfung . . . . .	138
5.4.6.3	Dämpfungsmatrix infolge innerer Dämpfung . . . . .	139
5.5	Numerische Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme . . .	140
5.5.1	NEWTON-RAPHSON Verfahren . . . . .	140
5.5.2	RIKS-WEMPNER-WESSELS Verfahren . . . . .	142
5.6	Anwendungsbeispiele für statische Berechnungen . . . . .	145
5.6.1	Kreiszylinderschale unter nicht-rotationssymmetrischer Belastung	147
5.6.2	Kühlturmschale unter Windbelastung . . . . .	150
5.6.3	Anmerkungen zur Konvergenz bei statischen Berechnungen . .	158

---

5.7	Zusammenfassung . . . . .	160
<b>6</b>	<b>Lösungsverfahren für die Bewegungsgleichungen</b>	<b>163</b>
6.1	Vorbemerkungen . . . . .	163
6.2	Überblick über direkte Zeitintegrationsverfahren . . . . .	164
6.3	Direkte Zeitintegration nach NEWMARK . . . . .	165
6.3.1	Allgemeine Ansätze . . . . .	165
6.3.2	Inkrementschritt . . . . .	168
6.3.3	Iterationsschritt . . . . .	169
6.3.4	Besonderheiten bei Ringelementen . . . . .	170
6.4	Modale Analyse . . . . .	172
6.4.1	Modale Analyse für lineare Problemstellungen . . . . .	173
6.4.2	Antwortspektrenverfahren – Bezug zur modalen Analyse . . . . .	176
6.4.3	Modale Analyse für nichtlineare Problemstellungen . . . . .	181
6.5	Anwendungsbeispiel zur nichtlinearen Dynamik . . . . .	187
6.6	Zusammenfassung . . . . .	197
<b>7</b>	<b>Rotationsschalen unter Erdbebeneinwirkung</b>	<b>199</b>
7.1	Vorbemerkungen und Zielsetzung . . . . .	199
7.2	Behälter auf elastischer Bettung . . . . .	201
7.2.1	System, Belastung und Fragestellung . . . . .	201
7.2.2	Ergebnisse der statischen Untersuchungen . . . . .	203
7.2.2.1	Entwicklung der abhebenden Bereiche und Bodenpres- sungen . . . . .	204

---

7.2.2.2	Auswirkung der Nichtlinearitäten auf Schnittgrößen sowie Aspekte zur Dimensionierung . . . . .	207
7.2.3	Ergebnisse der dynamischen Untersuchungen . . . . .	209
7.2.3.1	Eigenfrequenzen und Eigenformen . . . . .	210
7.2.3.2	Entwicklung der abhebenden Bereiche und Bodenpressungen . . . . .	212
7.2.3.3	Auswirkung der Nichtlinearitäten auf Schnittgrößen sowie Aspekte zur Dimensionierung . . . . .	214
7.2.4	Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	218
7.3	Untersuchungen an einem Naturzugkühlturm . . . . .	219
7.3.1	System, Rechenmodell und Definition der Einwirkungen . . . . .	219
7.3.2	Statische Auslegung nach BTR 97 und Bewehrungswahl . . . . .	224
7.3.3	Untersuchungen für horizontale Erdbebenbeschleunigungen . . . . .	225
7.3.3.1	Erläuterung des Sicherheitskonzepts . . . . .	225
7.3.3.2	Eigenschwingverhalten des Systems . . . . .	226
7.3.3.3	Übersicht über die durchgeführten Zeitverlaufsberechnungen . . . . .	230
7.3.3.4	Lineare Strukturanalysen (Fall a) . . . . .	232
7.3.3.5	Nichtlineare Strukturanalysen (Fall b) . . . . .	237
7.3.3.6	Nichtlineare Strukturanalysen (Fall c und Fall d) . . . . .	240
7.3.3.7	Nichtlineare Strukturanalysen (Fall e) . . . . .	243
7.3.4	Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	251
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>257</b>
8.1	Zusammenfassung der Schwerpunkte . . . . .	257

**Inhaltsverzeichnis** **VII**

---

8.2 Ausblick . . . . . **260**

**Literaturverzeichnis** **263**

**Anhang A Notation** **275**

**Anhang B Erdbebenakzelerogramme** **281**





# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Allgemeines

Die Berechnung und Dimensionierung dünnwandiger, schlanker Flächentragwerke aus Stahlbeton, von denen Rotationsschalen einen Sonderfall hinsichtlich ihrer Geometrie darstellen, kann auch heute noch als eine der Königsdisziplinen des konstruktiven Ingenieurbaus angesehen werden und bietet immer noch vielfältigen Anlass zu umfangreichen Studien und Forschungsaktivitäten.

Die Berechnungsverfahren der klassischen Baustatik in der ersten Hälfte des letzten Jahrhunderts waren im Wesentlichen auf die Anwendung grafischer Methoden, das Kraftgrößenverfahren oder iterative Momentenausgleichsverfahren bei Stabtragwerken und die analytische Lösung der Differentialgleichungen in Spezialfällen allgemeiner Flächentragwerke beschränkt. Das Werk „Theorie und Berechnung rotations-symmetrischer Bauwerke“ von MÁRKUS [85] aus dem Ungarischen behandelt neben der statisch bestimmten Membrantheorie der Rotationsschalen auch die Biegestörungen an deren Rändern. Dieses Werk beinhaltet eine umfangreiche Tabellensammlung analytischer Lösungen für den Kraftgrößen- und Verformungszustand ausgewählter Geometrien von Rotationsschalen unter der wesentlichen Voraussetzung linearer kinematischer Beziehungen und linear elastischen Werkstoffverhaltens und machte nach dessen Übersetzung und Veröffentlichung im deutschsprachigen Raum im Jahr 1967 [85] dieses Themengebiet einem weiten Ingenieurkreis für den praktischen Gebrauch zugänglich.

Mit der Erfindung der digitalen Rechenmaschine durch den deutschen Bauingenieur ZUSE (Rechenanlage Z3 im Jahr 1941) [107] und der damit verbundenen Schaffung einer Möglichkeit zur automatisierten Lösung großer algebraischer Gleichungssysteme-

me wurde der Weg für die Entwicklung komplexer numerischer Berechnungsverfahren geebnet, deren Entwicklung bis in die heutige Zeit anhält. Differenzenverfahren wurden dabei durch die Methode der Finiten Elemente aufgrund deren universellen Einsatzmöglichkeiten wie z.B. der Erfassung unterschiedlicher Teilstrukturen in einem Gesamtmodell weitestgehend verdrängt. Die Differentialgleichungen des strukturmechanischen Problems (wobei die Anwendung der FE-Methode auch auf andere Problemstellungen beispielsweise aus der Wärmeleitung, Fluidodynamik oder Elektrodynamik möglich ist) werden nach Überführung in ein Variationsproblem für ein Teilgebiet der Struktur, ein „Finites Element“, formuliert und durch die Einführung von Lösungsansätzen mit Ansatzfreiwerten innerhalb eines Elements algebraisiert (Anwendung des RITZ-GALERKIN Verfahrens auf ein Teilgebiet). Die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten im Gleichgewicht und in der Kinematik (geometrische Nichtlinearität) sowie im Werkstoffgesetz (physikalische Nichtlinearität) erfordert eine zusätzliche Linearisierung der Problemstellung im Rahmen einer inkrementell iterativen Betrachtungsweise, die auf ein Residuum (Abweichung zwischen Soll- und Istzustand) und einen Tangentenoperator (Richtungsableitungen des Residuums) führt, um das Problem wieder auf ein für den Computer lösbares linearisiertes algebraisches Gleichungssystem zurückzuführen.

## 1.2 Motivation und Zielsetzung

Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Theorie, Numerik und Anwendung nichtlinearer Algorithmen zur statischen und dynamischen Analyse schlanker Rotationschalen aus Stahlbeton leisten. Zu deren Modellierung und numerischen Simulation werden effiziente und robuste numerische Hilfsmittel benötigt. Hierfür werden im Rahmen dieser Arbeit Schalenringelemente eingesetzt, die sich für den linear elastischen Fall bereits als äußerst leistungsfähig hinsichtlich Diskretisierungsaufwand, Rechenzeit und Genauigkeit erwiesen haben. Die Entwicklung von Schalenringelementen stammt ursprünglich aus der Luft- und Raumfahrttechnik; dort wurden sie zur Berechnung von Trägerraketen eingesetzt. Im deutschsprachigen Raum ist in diesem Zusammenhang die grundlegende Arbeit von LEIMBACH [82] zu nennen. Weiterentwicklungen dieses Konzepts erfolgten durch ECKSTEIN et al. [42] sowie durch WUNDERLICH und RENSCH [133], [104] bzw. WUNDERLICH et al. [132]. Insbesondere letztere zeigten Ansätze auf, wie Schalenringelemente zur nichtlinearen statischen Berechnung von Stahlschalen unter Verwendung von J2-Plastizitätsmodellen umformuliert werden können, ohne jedoch eine tangentielle Beziehung zu verwenden. Nichtlinearen Effekten wurde dabei mit einem „Pseudo-Lastvektor“ Rechnung getragen, was bei starkem nichtlinearem Werkstoffverhalten allerdings zu Konvergenzproblemen führte. Eine

ausführlichere Zusammenstellung bezüglich des Stands der Forschung und der Entwicklung von Ringelementen ist Abschnitt 5.1.1 zu entnehmen.

Die Anfänge der Berücksichtigung nichtlinearer Stahlbetoneigenschaften in vorhandenen herkömmlichen Dreieck- und Viereckschalenelementen liegen ca. 10-15 Jahre zurück und sind eng mit den Namen KOMPFFNER [74], ZAHLTEN [134] und GROTE [58] verbunden. Ringelemente wurden zu diesem Zweck jedoch nicht in Betracht gezogen, da es offensichtlich an einem Konzept fehlte, geometrische und physikalische Nichtlinearitäten in einer inkrementell iterativen Betrachtungsweise für diese zu formulieren. Bei linearen Berechnungen mit Ringelementen wird vom Superpositionsprinzip Gebrauch gemacht; die Beiträge der einzelnen Fourierglieder werden unabhängig voneinander bestimmt und im Anschluss daran zur Gesamtlösung überlagert. Dies mag ein weiterer Grund gewesen sein, Ringelemente für die physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonrotationsschalen nicht weiter zu verwenden.

Der Modellierung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens des Stahlbetons kommt eine besondere Bedeutung zu. Durch die geringe Zugfestigkeit des Betons setzt das Reißen bereits bei relativ geringen Beanspruchungen ein, so dass diese Steifigkeitsminderungen infolge Reißens zu einer Änderung der Steifigkeitsverhältnisse und damit zu einer Umlagerung der Beanspruchungen innerhalb des Tragwerks führen. Für statische Vorgänge sind diese Effekte hinreichend bekannt [58], [88], [129]. Der Klärung des physikalisch nichtlinearen Verhaltens großer Stahlbetonrotationsschalen unter dynamischen Lasten ist in der Vergangenheit jedoch kaum Beachtung geschenkt worden. Dies mag wohl unter anderem auch daran gelegen haben, dass keine effizienten und geeigneten numerischen Werkzeuge zur Verfügung gestanden haben. Der numerische Aufwand einer nichtlinear dynamischen Erdbebenberechnung z.B. kann als ca. 100 – 200 mal so hoch wie derjenige einer statischen Berechnung angesehen werden, vergleicht man die Anzahl der Zeitschritte mit der Anzahl der Lastschritte. Einen wesentlichen Anteil an der Gesamtrechnenzeit besitzt die Auswertung der Materialgesetze des Werkstoffs Stahlbeton. Diese erfolgt für eine mit 40 Ringelementen modellierten Rotationsschale ca. 70000 mal pro Gleichgewichtsiteration (37 Integrationspunkte auf dem halben Umfang unter Ausnutzung der Symmetrie, 3 Integrationskreise in Meridianrichtung, ca. 16 Fasern in Dickenrichtung). Daran wird deutlich, dass im Rahmen der entwickelten Algorithmen der effizienten numerischen Modellierung des Werkstoffs Stahlbeton eine besondere Bedeutung zukommt. Hierzu wird aufbauend auf den Arbeiten von GROTE [58] und RAHM [101] ein explizites Stoffgesetz verwendet, das die wesentlichen Nichtlinearitäten im Zug- und im Druckbereich erfasst und eine Abspeicherung und Berücksichtigung der Dehnungsgeschichte bei der Spannungsberechnung unter Zugrundelegung eines ebenen Spannungszustands erlaubt.

Ein wesentliches Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, unter Verwendung der Fini-

ten Elemente Methode numerische Hilfsmittel zur nichtlinearen dynamischen Analyse und Simulation von Rotationsschalen aus Stahlbeton in einer praxisgerechten Form zu entwickeln und anzuwenden. Dazu wird die lineare Formulierung der im Programmsystem ROSHE [130] vorliegenden Ringelemente in eine inkrementell iterative Formulierung überführt und die für nichtlineare Berechnungen erforderlichen Elementbeiträge bereitgestellt. Dies erfolgt in der vorliegenden Arbeit im Speziellen am Beispiel eines doppelt gekrümmten Schalenringelements, wobei die Vorgehensweise vom Prinzip her auf beliebige andere Strukturringelemente übertragbar ist.

Hiermit soll die Möglichkeit geschaffen werden, nichtlinear dynamische Berechnungen größerer Rotationsschalen aus Stahlbeton, wobei die Elementformulierung natürlich vom Werkstoff unabhängig gehalten ist, mit vertretbarem Aufwand durchführen zu können und dabei die wesentlichen globalen nichtlinear dynamischen Effekte und Phänomene wirklichkeitsnäher, als dies mit linearen Verfahren möglich ist, erfassen zu können. Bei nichtlinear dynamischen Problemstellungen wird der Einsatz von Ringelementen sehr effektiv, da die vorhandene Kopplung der inkrementellen Zuwächse in den einzelnen Fouriertermen durch Dämpfungs- und Trägheitsanteile deutlich reduziert wird und somit nicht mehr zum Tragen kommt, wie an späterer Stelle ausführlich erläutert werden wird. In diesem Zusammenhang werden im Rahmen dieser Arbeit direkte Zeitintegrationsalgorithmen an die Ringelementformulierung angepasst und numerisch umgesetzt.

Ein weiterer neuartiger Aspekt dieser Arbeit besteht in der Umsetzung und Verwendung inkrementell iterativ formulierter modaler Berechnungsverfahren in Verbindung mit Ringelementen zur nichtlinearen dynamischen Strukturberechnung. Die modale Analyse, die ein klassisches lineares Verfahren darstellt, ist bereits von KHUDADA und GESCHWINDNER (Berechnung von Stahlrahmen) [70] sowie von BUCHER (Berechnung von Stoßeinwirkungen auf Betonwürfelproben) [17] auf nichtlineare Problemstellungen erfolgreich angepasst und angewendet worden. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendete nichtlineare Formulierung führt ebenfalls zu einer Reduktion des numerischen Aufwands. Die nichtlineare Lösung im Zeitbereich wird aus einer Kombination der Eigenformen des linearen Eigenschwingproblems, das als Ergebnis die Eigenschwingformen nach Umfangswellen sortiert liefert, repräsentiert, so dass eine Reduktion der Anzahl der Systemfreiheitsgrade auf die Zahl der beteiligten Schwingformen erfolgt. Die Beteiligungsfaktoren können jedoch nun aufgrund der Ungültigkeit des Superpositionsprinzips nicht mehr unabhängig voneinander bestimmt werden. Stattdessen kommt wiederum eine inkrementell iterative Formulierung zum Einsatz. Insbesondere zur Abbildung des globalen Strukturverhaltens kann mit dieser Methode eine deutliche Verringerung der Systemfreiheitsgrade und damit Verringerung des numerischen Aufwands erreicht werden.

## 1.3 Einführungsbeispiel zur nichtlinearen Dynamik

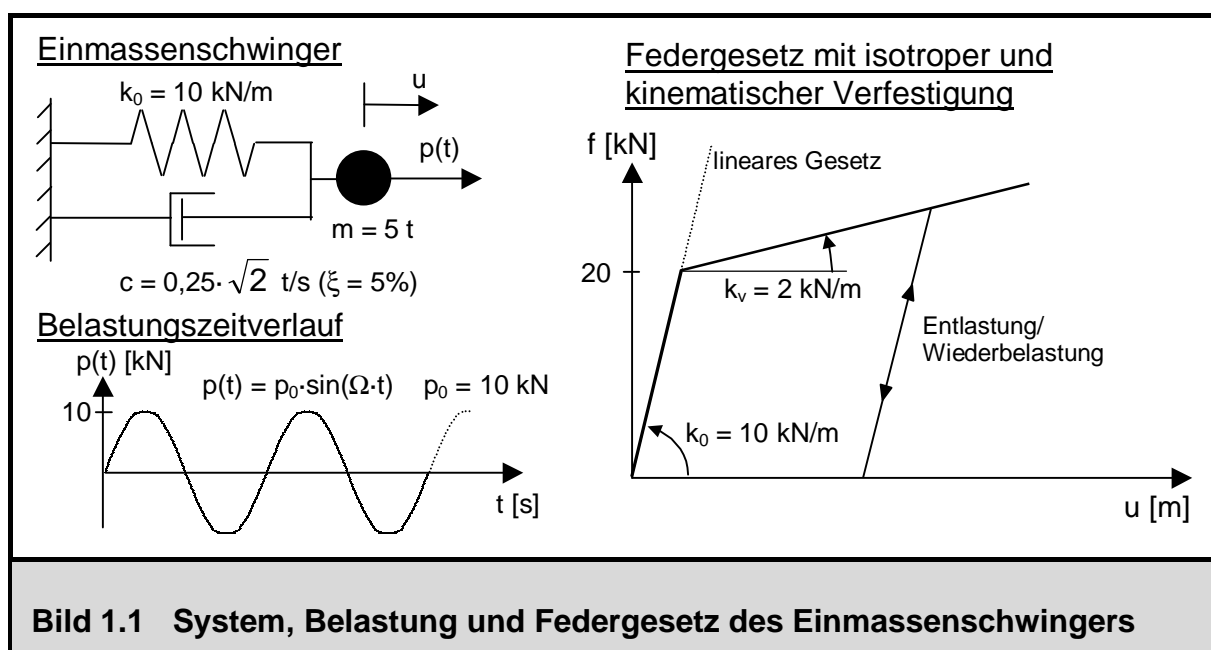
Die Analyse und das Verständnis dynamischer Vorgänge sind im Vergleich zu statischen Betrachtungen in der Regel um ein Vielfaches schwieriger. Um einen ersten Einblick in nichtlineare dynamische Vorgänge zu erhalten, soll im Rahmen einer Einführung das folgende Anwendungsbeispiel betrachtet werden:

Es wird der im Bild 1.1 dargestellte Einmassenschwinger unter einer harmonischen Sinusanregung untersucht, wobei die Systemeigenschaften  $k$  (Steifigkeit),  $c$  (Dämpfung) und  $m$  (Masse) bekannt sind. Der Bewegungsvorgang wird durch Gleichung (1.1) beschrieben. Diese gilt sowohl für ein lineares als auch für ein nichtlineares Federgesetz, da in Gleichung (1.1) nur die Federkraft  $f(t)$  auftaucht und noch keine Aussage zu deren Berechnung gemacht worden ist.

$$f(t) + c \cdot \dot{u}(t) + m \cdot \ddot{u}(t) = p_0 \cdot \sin(\Omega t) \quad (1.1)$$

Die statische Lösung (Vernachlässigung der Dämpfungs- und Trägheitsterme, d.h.  $\dot{u}(t) = 0$ ;  $\ddot{u}(t) = 0$ ) für das System ist trivial: Die Federkraft muss aus Gleichgewichtsgründen immer gleich der einwirkenden Kraft sein:  $f(t) = p(t) = p_0 \cdot \sin(\Omega t)$ ; da es sich um ein statisch bestimmtes Problem handelt, können auch keine Umlagerungen infolge nichtlinearen Federverhaltens eintreten.

Bei einer Zugrundelegung eines linearen Federgesetzes wird die Federkraft  $f(t)$  in Gleichung (1.1) durch das Produkt  $k \cdot u(t)$  ersetzt. Damit kann nach den bekannten Regeln



der Analysis die inhomogene, gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung nach dem Zeitverlauf der Verformung gelöst werden, wobei sich daraus die analytische Lösung für die Federkraft  $f(t)$  nach Gleichung (1.2) angeben lässt [26].

$$f(t) = [A \cdot \cos(\omega_D t) + B \cdot \sin(\omega_D t)] \cdot e^{-\xi \omega t} + p_0 \cdot \frac{[1 - \eta^2] \cdot \sin(\Omega t) - 2 \xi \eta \cdot \cos(\Omega t)}{[1 - \eta^2]^2 + [2 \xi \eta]^2} \quad (1.2)$$

$$\text{mit } A = p_0 \cdot \frac{2 \xi \eta}{[1 - \eta^2]^2 + [2 \xi \eta]^2} \quad \omega_D = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega$$

$$B = p_0 \cdot \frac{2 \xi^2 + \eta^2 - 1}{[1 - \eta^2]^2 + [2 \xi \eta]^2} \cdot \frac{\Omega}{\omega_D} \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega}$$

A und B stellen darin Integrationskonstanten dar, die an die speziellen Anfangsbedingungen anzupassen sind. Für den Spezialfall  $u(t=0) = 0$  und  $\dot{u}(t=0) = 0$  sind diese ebenso angegeben. Die Lösung besteht aus zwei Anteilen. Der erste Anteil repräsentiert den Einschwingvorgang, der mit der Zeit aufgrund der Dämpfung exponentiell abklingt. Nach einiger Zeit folgt die Bewegung somit der Anregung: Es stellt sich im stationären Zustand, der durch den zweiten Anteil in Gleichung (1.2) beschrieben wird, eine harmonische Schwingung mit gleicher Frequenz wie die Anregung ein, deren Phasenwinkel allerdings gegenüber demjenigen der Anregung verschoben ist. Die Amplitude der Antwortschwingung der Federkraft (und somit auch der dynamische Lastfaktor) im stationären Zustand ist durch Gleichung (1.3) gegeben.

$$\max f = \frac{p_0}{\sqrt{[1 - \eta^2]^2 + [2 \xi \eta]^2}} \quad (1.3)$$

Folgende Eigenschaften sind an der Lösung für die maximale Federkraft (1.3) im stationären Zustand zu erkennen:

- Grenzfall  $\eta \rightarrow 0$ :

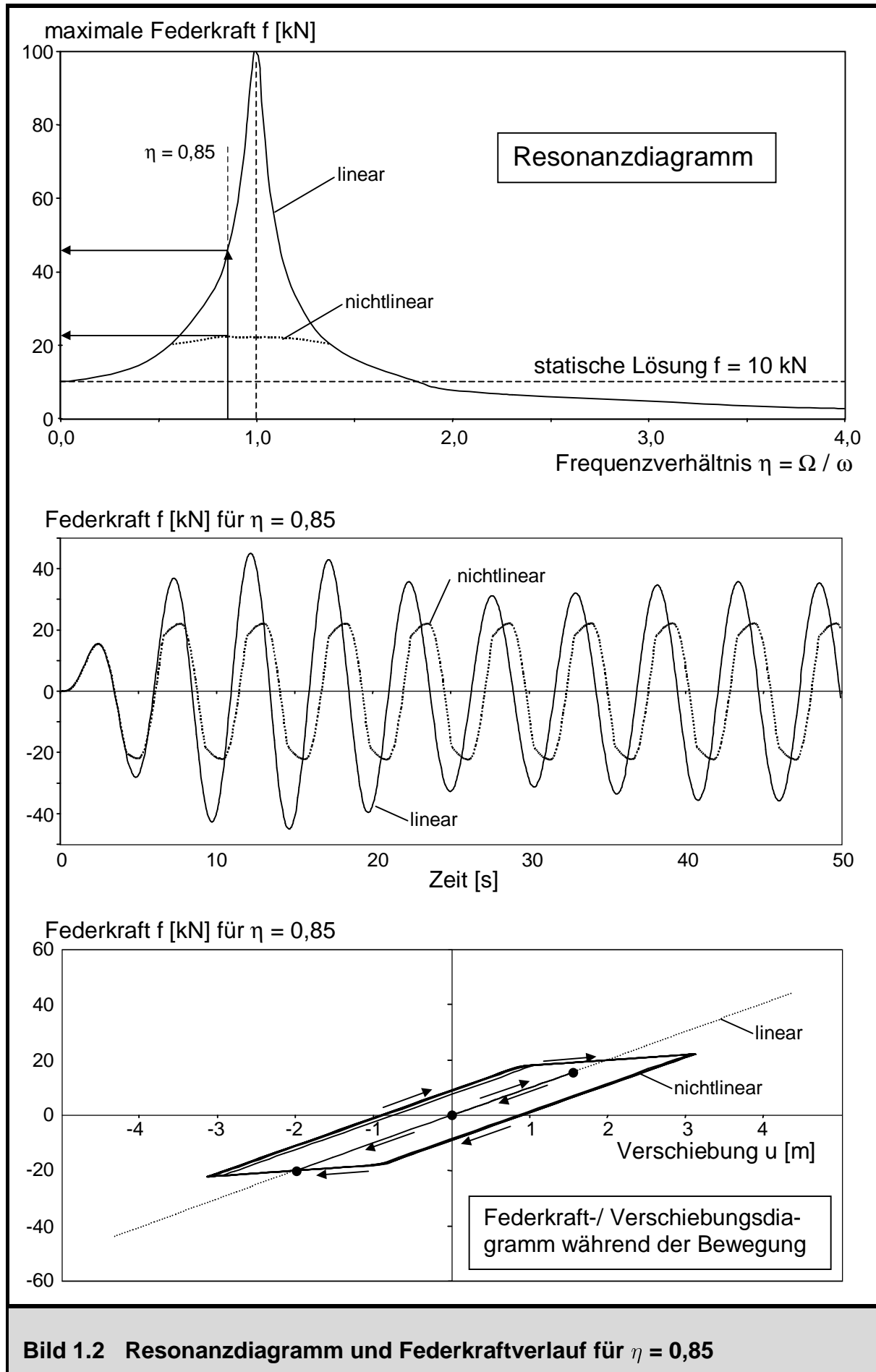
Die Anregungsfrequenz ist sehr klein, bezogen auf die Eigenfrequenz des Systems. Aus diesem Grund werden Trägheits- und Dämpfungskräfte nicht relevant, die Lösung für die Federkraft im Grenzfall lautet  $f(t) = p_0 \cdot \sin(\Omega t)$ . Somit ist die maximale Federkraft gleich der statischen Lösung.

- Resonanzfall  $\eta = 1$ :  
Die Frequenz der Anregung ist gleich der Eigenfrequenz des Systems. Die Phasenverschiebung ist Null; dem System wird somit kontinuierlich Schwingungsenergie zugeführt, so dass es im schlimmsten Fall bei einem ungedämpften System zur Resonanzkatastrophe kommt. Dies bedeutet, dass die Lösung für  $\max f$  gegen Unendlich strebt, bei gedämpften Systemen besitzt sie hier ihren endlichen Maximalwert.
- Grenzfall  $\eta \rightarrow \infty$ :  
Die Anregungsfrequenz ist sehr groß, bezogen auf die Eigenfrequenz des Systems. Das System kann der Anregung nicht folgen. Die Phasendifferenz strebt gegen  $\pi$  (Anregung und Antwortschwingung sind bei gleicher Frequenz um eine halbe Periode versetzt), die Amplitude der Antwortschwingung konvergiert streng monoton gegen Null.

Man erkennt schon an der linearen dynamischen Lösung dieses einfachen Problems, dass die dynamische Antwort auf die Lastanregung durch ein komplexes Zusammenspiel aus Federkraft, Dämpfungskraft und Trägheitskraft beschrieben wird, wobei im statischen Fall allein die Federkraft der einwirkenden Kraft das Gleichgewicht halten muss. In Abhängigkeit der Abstimmung  $\eta = \frac{\Omega}{\omega}$  treten unterschiedliche Phänomene, charakterisiert durch die drei beschriebenen Sonderfälle, auf.

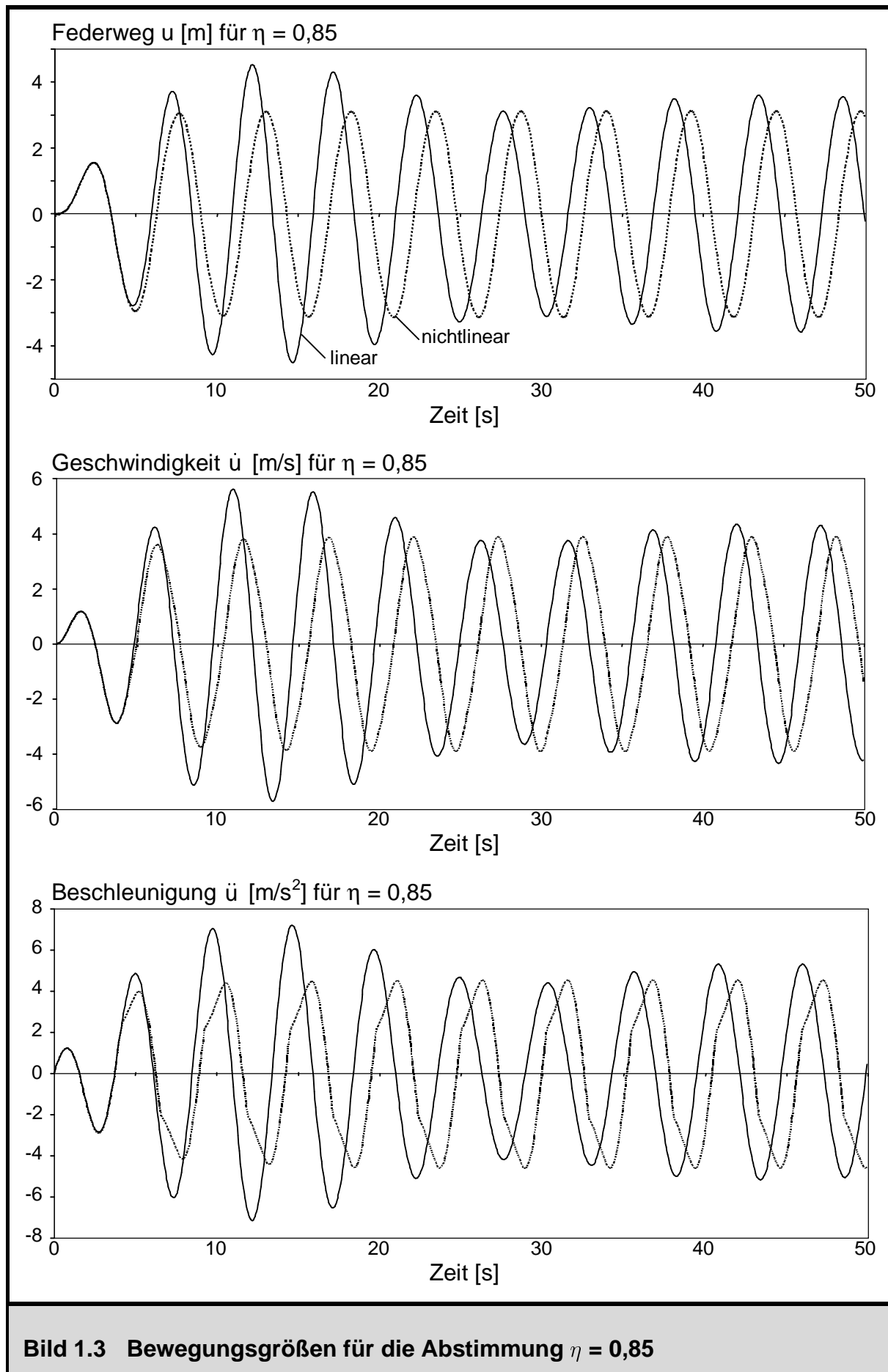
Gleichung (1.1) lässt sich unter Verwendung eines linearen Werkstoffgesetzes allgemein lösen, wie gerade gezeigt worden ist. Mit den im Bild 1.1 angegebenen speziellen Systemeigenschaften ( $k_0 = 10 \text{ kN/m}$ ,  $m = 5 \text{ t}$ ,  $\xi = 5\%$ ,  $p_0 = 10 \text{ kN}$ ,  $\Omega = \eta \cdot \sqrt{k_0/m}$ , nicht-lineares Federgesetz mit isotroper und kinematischer Verfestigung  $k_v = 2 \text{ kN/m}$ ) sollen nun die nichtlineare Lösung der linearen Lösung gegenüber gestellt und die nichtlinearen Effekte aufgezeigt werden. Die Bestimmung der maximalen Federkraft erfolgt zunächst für beliebige Abstimmungen  $\eta$ , für die Zeitverläufe der Bewegungsgrößen wird eine spezielle Abstimmung  $\eta = 0,85$  herausgegriffen.

Im oberen Drittel von Bild 1.2 ist die maximal auftretende Federkraft nach linearer und nichtlinearer dynamischer Berechnung in Abhängigkeit der Abstimmung  $\eta$  (Anregungsfrequenz bezogen auf die lineare Eigenfrequenz) aufgetragen. Für den linearen Fall sind die drei beschriebenen Grenzfälle ( $\eta \rightarrow 0$ ,  $\eta = 1$ ,  $\eta \rightarrow \infty$ ) gut zu erkennen. Im Fall  $\eta = 1$  beträgt die maximale Federkraft  $100 \text{ kN}$  (dynamische Überhöhung um den Faktor 10). Im Wesentlichen stimmt die berechnete Kurve gut mit der Lösung nach Gleichung (1.3) überein, mit dem geringfügigen Unterschied, dass Gleichung (1.3) den Einschwingvorgang nicht berücksichtigt. Die Lösung für die Federkraft im Zeitbereich für  $\eta = 0,85$  im mittleren Drittel des Bildes 1.2 bestätigt dies; die maximal auftreten-



**Bild 1.2** Resonanzdiagramm und Federkraftverlauf für  $\eta = 0,85$





de lineare Federkraft beträgt 45,1 kN, wohingegen Gleichung (1.3) einen Maximalwert von 34,5 kN liefert, der mit der berechneten Amplitude der stationären Schwingung für  $t > 40$  s übereinstimmt. Der Einschwingvorgang ist allerdings von untergeordnetem Interesse und dauert umso kürzer, je größer das Frequenzverhältnis  $\eta$  ist (Gleichung (1.2) zeigt den Einfluss von  $\eta$  auf die Konstanten A und B).

Die nichtlineare Lösung für die maximale Federkraft im Bild 1.2 weicht von der linearen Lösung lediglich im Bereich  $0,57 < \eta < 1,38$  ab, in dem die Fließgrenze von 20 kN überschritten wird. Die maximale Federkraft von 22,7 kN nach nichtlinearer Berechnung wird bei  $\eta = 0,85$  erreicht und liegt somit deutlich unterhalb des Maximalwerts der linearen Lösung. Nach Fließbeginn ist die weitere Laststeigerung nur noch geringfügig. Am Zeitverlauf der Federkraft ist zu erkennen, dass zunächst die lineare und nichtlineare Lösung bis zum erstmaligen Erreichen der Fließgrenze bei  $t = 4,2$  s den selben Pfad durchlaufen. Nach diesem Zeitpunkt stellt sich eine periodische Schwingung mit der berechneten Amplitude ein. Diese ist allerdings nicht harmonisch, da immer wieder nach erfolgter Entlastung oder Wiederbelastung gegensinnige plastische Bereiche durchlaufen werden. Im unteren Drittel des Bildes 1.2 ist auch die zugehörige Hystereseschleife dargestellt, indem die Wertepaare bestehend aus Federkraft und zugehörigem Federweg für sämtliche Zeitpunkte des Bewegungsvorgangs aufgetragen werden. Es erfolgt zunächst eine Belastung bis 15,5 kN, danach wird elastisch entlastet, bis die Streckgrenze zum ersten Mal bei -20 kN erreicht wird. Von diesem Punkt an wird die Hystereseschleife zyklisch durchlaufen, wobei immer gegensinnige Entlastungen aus dem aktuellen Verfestigungsbereich erfolgen. Die Fläche unter der Hystereseschleife beschreibt die geleistete Dissipationsarbeit. Der Vollständigkeit halber sind im Bild 1.3 noch die zugehörigen Verformungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufe angegeben. Auch hier zeigt sich, dass zum einen der stationäre Zustand bei Berücksichtigung des nichtlinearen Federverhaltens wesentlich schneller als nach linearer Lösung erreicht wird und sich zum anderen im stationären Zustand eine periodische, aber nicht harmonische Schwingung einstellt. Durch einfaches Einsetzen der gefundenen Bewegungsgrößen und Federkraft in Gleichung (1.1) kann gezeigt werden, dass beide Bewegungsvorgänge (lineare und nichtlineare Lösung) das dynamische Gleichgewicht zu jedem Zeitpunkt erfüllen.

Als wichtigste Erkenntnis bleibt festzuhalten, das durch die elastisch-plastische Eigenschaft des Werkstoffgesetzes der Feder das dynamische Verhalten des Einmassenschwingers entscheidend beeinflusst wird: Gegenüber dem linearen Fall tritt kein ausgeprägter Resonanzbereich mehr auf. Nach Erreichen der Fließgrenze erfolgt lediglich noch eine geringfügige Laststeigerung, weiterhin treten beim Bewegungsvorgang gegensinnige plastische Verformungen durch wiederholtes Durchlaufen der Hystereseschleife auf. Daraus kann schon an dieser Stelle eine wichtige Regel abgeleitet werden: Je früher das Fließen im Verhältnis zur maximal erreichten Federkraft nach

statischer Lösung erreicht wird, desto größer muss die plastische Verformbarkeit der Feder sein. Liegt die Fließgrenze höher als die maximal auftretende lineare Federkraft, ist theoretisch kein plastisches Verformungsvermögen erforderlich.

An diesem einfachen Beispiel mit einführendem Charakter werden demnach schon wesentliche nichtlineare dynamische Phänomene deutlich. Es hat bereits eindrucksvoll gezeigt, welche drastischen Auswirkungen die Nichtlinearität im Stoffgesetz auf das dynamische Verhalten eines Einmassenschwingers hat. Bei komplexen Systemen treten noch weitere nichtlineare Effekte auf wie z.B. Beanspruchungsumlagerungen bei statisch unbestimmten Systemen oder Auswirkungen der geometrischen Nichtlinearität (z.B. Theorie II. Ordnung). Im Rahmen dieser Arbeit sollen daher effiziente und robuste numerische Algorithmen entwickelt werden. Diese ermöglichen es, Rotationsschalen unter dynamischen Einwirkungen nichtlinear zu untersuchen und deren Beanspruchungszustand zuverlässig zu berechnen, um eine sichere und gleichzeitig wirtschaftliche Tragwerksauslegung im Rahmen des Sicherheitskonzepts der aktuellen europäischen Normengeneration der Eurocodes unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte zu gewährleisten. Am Beispiel von Erdbebenbeanspruchungen wird dies im Kapitel 7 dieser Arbeit aufgezeigt werden.

## 1.4 Gliederung der vorliegenden Arbeit

Zur Verwirklichung der zuvor genannten und beschriebenen Zielsetzungen und Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit soll in den weiteren Kapiteln die folgende Vorgehensweise verfolgt werden:

Im **Kapitel 2** erfolgt zunächst eine Übersicht über die Grundgleichungen einer nichtlinearen Theorie (große Verformungen und große Verzerrungen) des dreidimensionalen Kontinuums in LAGRANGEscher Betrachtungsweise. Es werden wichtige kontinuumsmechanische Grundgrößen wie Verzerrungs- und Spannungsmaße definiert. Die Zusammenhänge sämtlicher Grundgrößen und deren Kopplungen untereinander werden anschaulich für allgemeine dynamische Vorgänge unter Berücksichtigung von Trägheitskräften sowie inneren und äußeren Dämpfungskräften dargelegt.

Eine besondere Bedeutung im Rahmen dieser Arbeit kommt der wirklichkeitsnahen Stahlbetonmodellierung zu. Im **Kapitel 3** wird die zweiaxiale numerische Modellierung des Verbundwerkstoffes Stahlbetons behandelt, wobei eine Aufteilung in die drei wesentlichen Komponenten Betondruckverhalten, Bewehrungsstahl und Nachrissverhalten (Tension Stiffening) vorgenommen wird. Dieses Modell wird durch eine explizite Formulierung basierend auf der nichtlinearen Elastizitätstheorie mit Erweiterungen zur

Berücksichtigung der Spannungs- und Dehnungsvorgeschichten im Druck- und Zugbereich beschrieben. Ferner finden sich in diesem Kapitel Hinweise zur Dämpfung.

Die im Kapitel 2 erläuterten kontinuumsmechanischen Grundlagen werden im **Kapitel 4** zur Formulierung der Grundgleichungen einer nichtlinearen Flächentragwerkstheorie übertragen. Dabei werden einige Annahmen und Einschränkungen z.B. hinsichtlich der Geometrie, Größe der Verformungen und Querschnittskinematik getroffen, die im Abschnitt 4.1 zusammengestellt sind. Abschließend wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen angewendet, um eine integrale Gleichgewichtsaussage zu erhalten, auf der aufbauend eine numerische Weggrößenformulierung für Rotationsschalen erfolgen kann.

Auf der Grundlage der beschriebenen Flächentragwerkstheorie und Materialgesetze für Stahlbeton erfolgt im **Kapitel 5** die vollständige Herleitung eines doppelt gekrümmten Schalenringelements mit Angabe sämtlicher Elementbeiträge, dessen Implementierung im Programmsystem ROSHE [130] vorgenommen worden ist. Die inkrementell iterative Formulierung und Umsetzung des Ringelementkonzepts, die im Übrigen auch auf andere Strukturringelemente erweiterbar ist, stellt eine der wesentlichen neuen Aspekte im Rahmen dieser Arbeit dar. Die Verwendung dieses Elementkonzepts besitzt gerade bei dynamischen Berechnungen einige entscheidende Vorteile gegenüber herkömmlichen Schalenelementen. Dieses Kapitel wird mit Ergebnissen von Konvergenzstudien und statischen Vergleichsberechnungen zum Austesten der geschaffenen Elementerweiterungen abgerundet.

Zur nichtlinearen dynamischen Strukturberechnung sind geeignete Zeitintegrationsverfahren erforderlich. Im **Kapitel 6** werden diese erläutert und an die speziellen Eigenschaften von Ringelementen angepasst. Eine weitere Möglichkeit zur dynamischen Berechnung bietet das Verfahren der modalen Analyse, die eine klassische lineare Vorgehensweise darstellt. In diesem Kapitel erfolgt als weiterer neuartiger Aspekt eine Adaption dieses Verfahrens im Rahmen einer inkrementell iterativen Vorgehensweise für Ringelemente, so dass Nichtlinearitäten bei der Berechnung berücksichtigt werden können. Vergleichsrechnungen mit beiden Verfahren werden an einem Referenzbeispiel durchgeführt.

Die Anwendung und Demonstration der Leistungsfähigkeit der geschaffenen und weiter entwickelten numerischen Werkzeuge geschieht im **Kapitel 7**. Hierbei handelt es sich um zwei praxisnahe Problemstellungen von Rotationsschalen aus dem konstruktiven Ingenieurbau (zylindrischer Behälter mit Bodenplatte auf elastischer Bettung sowie Naturzugkühlturm). Es wird ein Beitrag zur Klärung des dynamischen Strukturverhaltens dieser Systeme unter horizontalen Erdbebenbeschleunigungen geleistet. Insbesondere werden hier baupraktische Aspekte wie Fragen der Schnittgrößenumlagerung,

Auswirkungen des Abhebens von der Bodenfuge und Bewehrungsdimensionierung behandelt.

Eine Zusammenfassung mit abschließender Beurteilung der aufgezeigten Vorgehensweisen und erzielten Ergebnisse sowie ein weiterführender Ausblick mit zukünftigen Fragestellungen und Forschungsmöglichkeiten findet sich im **Kapitel 8** und schließt die vorliegende Arbeit ab.



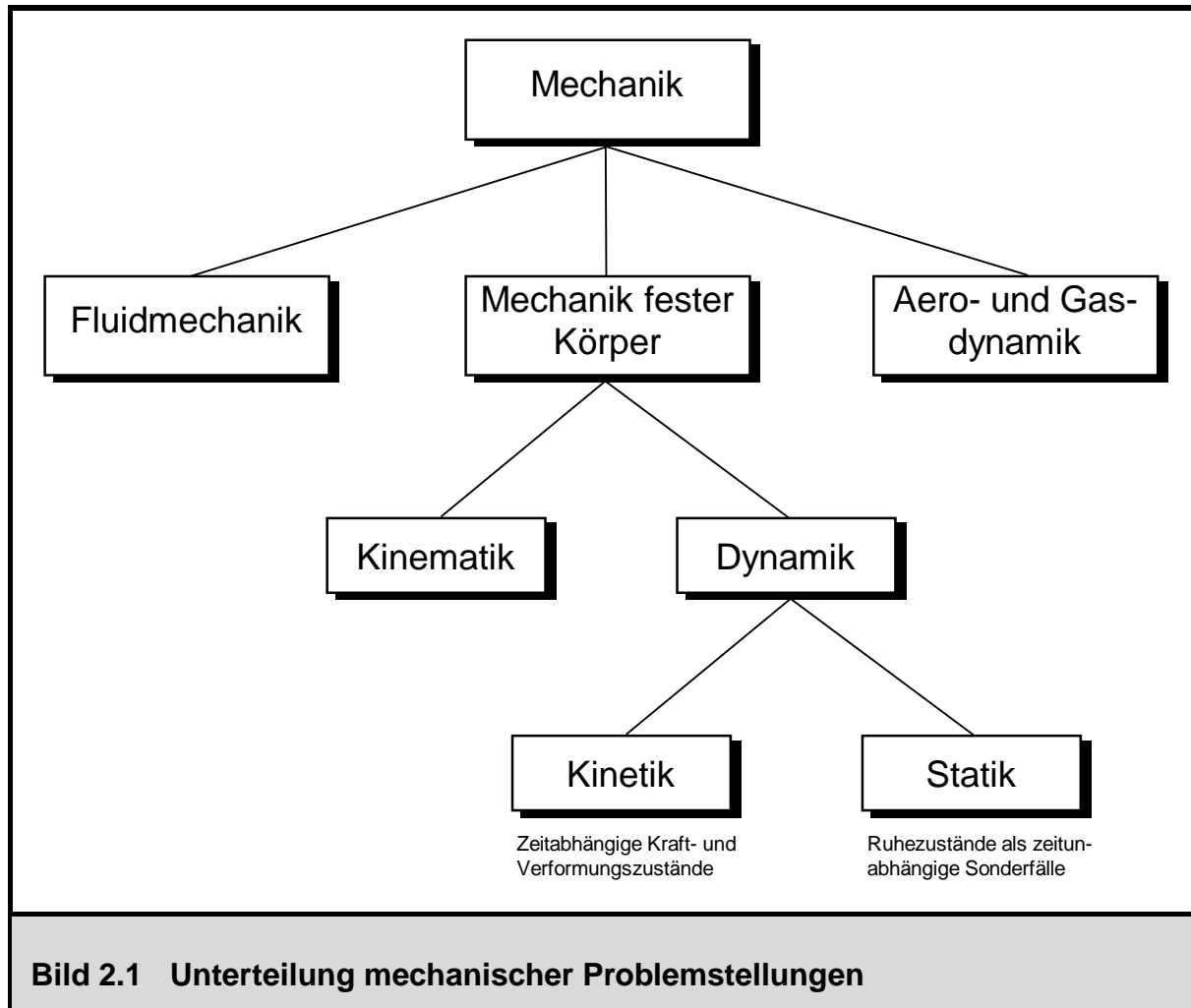
## Kapitel 2

# Grundlagen der Kontinuumsmechanik

### 2.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel sollen in einer einführenden Darstellung die grundlegenden Zusammenhänge der Kontinuumsmechanik erläutert werden. Ziel ist es, die Zustandsgrößen deformierbarer fester Körper zu definieren und deren Verknüpfungen in den Grundgleichungen aufzuzeigen. Diese Grundgleichungen führen auf das allgemeine Anfangs-Randwertproblem der Kontinuumsmechanik [2]: Für einen beliebigen Körper ist dessen Bewegung (Abfolge von Konfigurationen) gesucht, aus der sich die restlichen Zustandsgrößen bestimmen lassen. Der Körper unterliegt zusätzlich bestimmten Rand- und Anfangsbedingungen, die durch die gesuchte Lösung der Bewegung befriedigt werden müssen. So sind auf einem Teil der Körperfläche Verformungsrandbedingungen (DIRICHLET Randbedingungen) in Form von Auflagerbedingungen vorgegeben; auf der verbleibenden Oberfläche müssen im Allgemeinen Spannungsrandbedingungen (NEUMANN Randbedingungen) befriedigt werden, wie z.B. Gleichgewicht des Spannungsvektors in Richtung der Körperoberfläche mit einem dort eventuell einwirkenden Druck oder auch mit einer Bettung oder äußeren Dämpfung. Im Gegensatz zu diesen Randbedingungen ist unter Anfangsbedingungen der vorgeschriebene Zustand dieses Körpers zu einem bestimmten Anfangszeitpunkt zu verstehen (in der Regel Verformungs- und Geschwindigkeitszustand zum Zeitpunkt Null).

Eine systematische Einteilung mechanischer Problemstellungen, wie sie in [77] vorgenommen wird, zeigt Bild 2.1. Die Mechanik wird demnach in ihre drei Hauptgebiete Fluidmechanik, Aero- und Gasdynamik sowie in die Mechanik fester Körper unterteilt, von denen nur letztere im Rahmen der vorliegenden Arbeit von Interesse sein soll. Des Weiteren findet eine Unterteilung der Mechanik fester Körper in Kinematik und Dynamik statt. Die Kinematik umschreibt die Lehre von den Verformungen und



der Verformungsverträglichkeit, ohne dabei weiter auf Ursachen einzugehen. Auf der anderen Seite steht die Dynamik als Überbegriff für Kinetik und Statik. Die Aufgabe der Kinetik ist es, den Zusammenhang zwischen zeitabhängigen Kraft- und Verformungszuständen bewegter Körper (sowohl deformierbare, aber auch starre Körper als Sonderfall) herzustellen, wohingegen die Statik als Sonderfall diese Ziele für ruhende Körper verfolgt. Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass der Begriff Dynamik häufig entgegen seiner ursprünglichen Bedeutung gleichbedeutend mit dem Begriff Kinetik benutzt wird, obwohl der Oberbegriff Dynamik ja auch alle statischen Problemstellungen als Sonderfälle beinhaltet. Wie im allgemeinen Ingenieursprachgebrauch wird auch in vorliegender Arbeit von diesem Begriff zweckentfremdet Gebrauch gemacht.

Die im Rahmen dieses Abrisses in allgemeiner Form aufgezeigten Prinzipien und Grundgleichungen der Mechanik eines 3D-Kontinuums werden sich zum Teil später im Kapitel 4 im Rahmen der dort aufgezeigten Flächentragwerkstheorie für Rotationsschalen in modifizierter Form wiederholen, doch werden hierbei flächentragwerkspezifische Annahmen und Approximationen eingehen wie z.B. die idealisierte Trag-



werksbeschreibung über die Mittelfläche, auf die sämtliche mechanischen Größen der an späterer Stelle im Kapitel 4 eingeführten Flächentragwerkstheorie bezogen werden. Bei einigen Herleitungen in dieser Arbeit werden die Grundlagen des Tensorkalküls in allgemeinen krummlinigen Koordinaten als bekannt vorausgesetzt, welche in [72] nachzuvollziehen sind; als weiterführende Literatur zu diesem Themengebiet sind [13] und [30] zu nennen.

## 2.2 Kinematik des Kontinuums

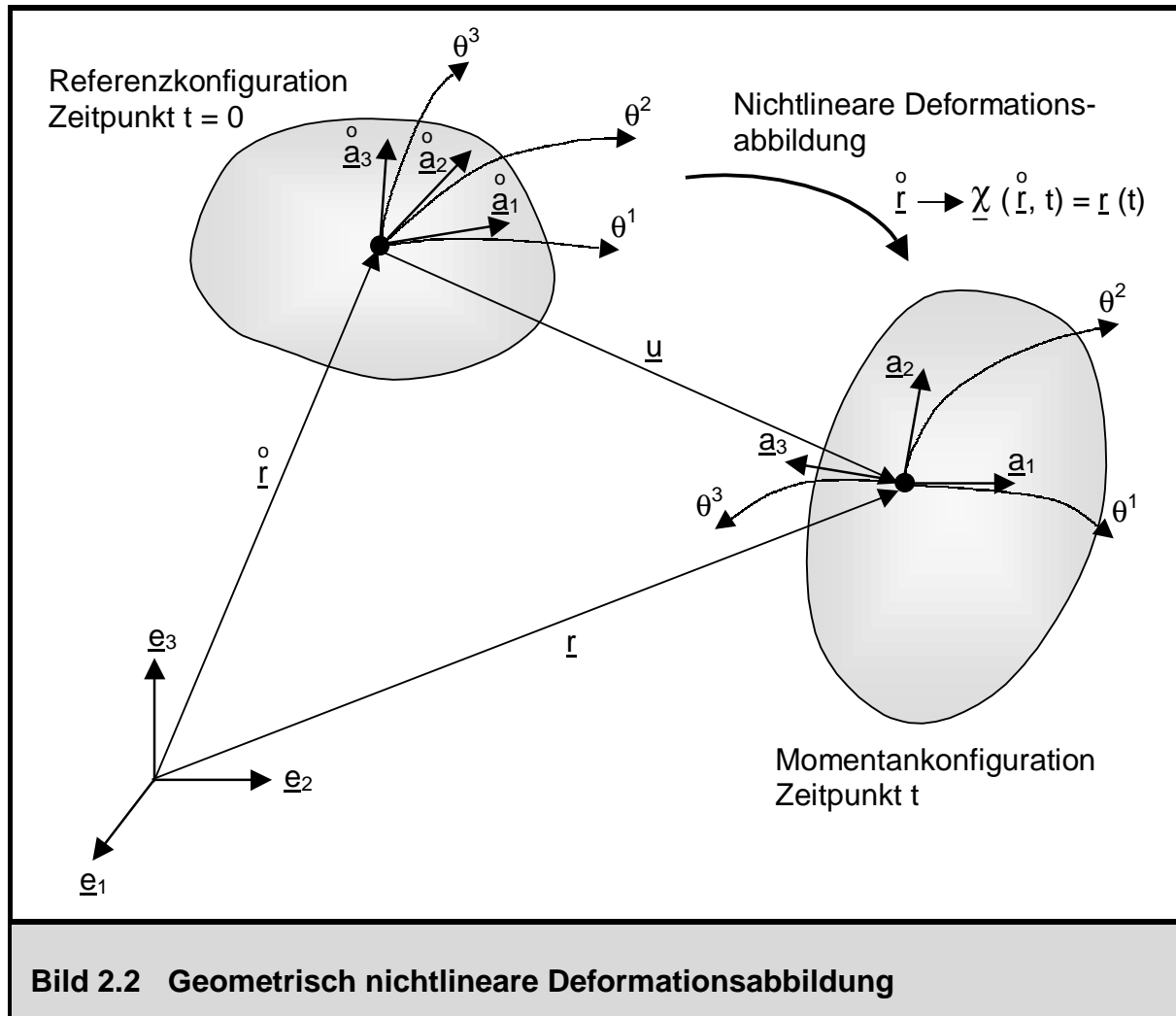
### 2.2.1 Deformationsabbildung und Deformationsgradient

Als Platzierung wird die Zuordnung eines beliebigen materiellen Punktes eines Körpers zu dessen Koordinaten im Raum bezeichnet, wobei alle materiellen Punkte des Körpers zusammengefasst eine Konfiguration bilden. Die Abfolge von Platzierungen stellt die Bewegung des Körpers dar. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich der Körper in seiner Referenzkonfiguration; eine Konfiguration zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t > 0$  ist eine Momentankonfiguration des Körpers. Die Ortsvektoren zu einzelnen Körperpunkten lassen sich in raumfesten Koordinaten nach Gleichung (2.1) für die Referenzkonfiguration sowie nach Gleichung (2.2) für eine bestimmte Momentankonfiguration eines Zeitpunktes angeben, wobei nach der EINSTEINschen Summenkonvention [30] über gleiche Indizes summiert werden muss. Durch Differentiation der Ortsvektoren in Richtung der Koordinatenlinien des Körpers erhält man die kovarianten (oder natürlichen) Basisvektoren der lokalen Vektorbasis für die Referenzkonfigurationen (2.3) sowie für beliebige Momentankonfigurationen (2.4), wobei die Richtungen dieser Basisvektoren im Allgemeinen nicht orthogonal sind und keine Einheitsvektoren vorliegen. Sämtliche geometrischen Beziehungen können Bild 2.2 entnommen werden.

$$\underline{\hat{r}} = \hat{x}^i \underline{e}_i \quad (2.1)$$

$$\underline{r} = x^i \underline{e}_i \quad (2.2)$$

$$\underline{\hat{a}}_i = \frac{\partial \underline{\hat{r}}}{\partial \hat{\theta}^i} \quad (2.3)$$



$$\underline{a}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^i} \quad (2.4)$$

Weiterhin wird eine duale Vektorbasis definiert, die so genannte kontravariante Vektorbasis. Diese kontravarianten Basisvektoren werden nach Gleichung (2.5) gebildet und sind mit den kovarianten Basisvektoren über die Beziehung (2.6) verknüpft. Demnach steht z.B. der kontravariante Basisvektor  $\underline{a}^3$  in einem beliebigen Punkt des Körpers senkrecht auf der Ebene, die in demselben Punkt durch die kovarianten Basisvektoren  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  aufgespannt wird. Darüber hinaus führen gemäß Gleichung (2.7) die Skalarprodukte zwischen einzelnen kovarianten Basisvektoren zu den kovarianten Metrikoeffizienten  $a_{ij}$ , sowie zwischen einzelnen kontravarianten Basisvektoren zu den kontravarianten Metrikoeffizienten  $a^{ij}$ .

$$\underline{a}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \underline{r}} \quad (2.5)$$

$$\underline{a}_i \cdot \underline{a}^j = \delta_i^j \quad (2.6)$$

$$a_{ij} = \underline{a}_i \cdot \underline{a}_j \quad a^{ij} = \underline{a}^i \cdot \underline{a}^j \quad (2.7)$$

Der Differenzvektor des Ortsvektors eines materiellen Punktes zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Momentankonfiguration und des Ortsvektors zu demselben Punkt in der Referenzkonfiguration ist als Verschiebungsvektor  $\underline{u}$  für diesen Zeitpunkt definiert (2.8). Der mathematische Zusammenhang zwischen der Referenzkonfiguration und den Momentankonfigurationen wird über eine im Allgemeinen nichtlineare Deformationsabbildung  $\underline{\chi}(\underline{r}, t)$  (2.9) hergestellt.

$$\underline{u}(t) = \underline{r}(t) - \underline{\dot{r}} \quad (2.8)$$

$$\underline{r}(t) = \underline{\chi}(\underline{\dot{r}}, t) \quad (2.9)$$

Durch Gradientenbildung eines Ortsvektors in der Momentankonfiguration  $\underline{r}$  nach dem Ortsvektor desselben Punktes in der Referenzkonfiguration  $\underline{\dot{r}}$  entsteht der Deformationsgradient  $\underline{E}$  in gekrümmten Koordinaten nach (2.10), oder für den Sonderfall kartesischer Koordinaten nach (2.11).

$$\underline{E} = \frac{\partial \underline{\chi}(\underline{\dot{r}}, t)}{\partial \underline{\dot{r}}} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\dot{r}}} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^i} \otimes \frac{\partial \theta^i}{\partial \underline{\dot{r}}} = \underline{a}_i \otimes \underline{\dot{a}}^i \quad (2.10)$$

$$\underline{E} = \frac{\partial x^i}{\partial \dot{x}^j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \quad (2.11)$$

Ebenso gebräuchlich ist die Darstellung des Deformationsgradienten mit Hilfe des Verschiebungsgradienten unter Ausnutzen von Beziehung (2.8), was letztendlich auf die Gleichung (2.13) führt.

$$\underline{E} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \underline{\dot{r}}} = \frac{\partial \underline{\dot{r}}}{\partial \underline{\dot{r}}} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{\dot{r}}} \quad (2.12)$$

$$\underline{E} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta^j} \otimes \frac{\partial \theta^j}{\partial \underline{r}} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta^j} \otimes \frac{\partial \theta^j}{\partial \underline{r}} = \underline{\dot{a}}_j \otimes \underline{\dot{a}}^j + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \theta^j} \otimes \underline{\dot{a}}^j \quad (2.13)$$

Beim Betrachten von Gleichung (2.10) wird deutlich, dass der Deformationsgradient ein Zweifeldtensor ist, denn der erste Basisvektor der Dyade liegt in der Momentankonfiguration, wohingegen der zweite auf die Referenzkonfiguration bezogen ist. Differentielle Linienelemente der Referenzkonfiguration werden in eine bestimmte Momentankonfiguration zu einem Zeitpunkt  $t$  über den Deformationsgradienten mit einer linearen Abbildungsvorschrift projiziert (2.14).

$$d\underline{s} = \underline{E} \cdot d\underline{s}^0 = (\delta_j^i \cdot \underline{a}_i \otimes \underline{\dot{a}}^j) \cdot (d\theta^k \cdot \underline{\dot{a}}_k) = d\theta^k \cdot \delta_j^i \cdot \delta_k^j \cdot \underline{a}_i = d\theta^i \cdot \underline{a}_i \quad (2.14)$$

Die Determinante des Deformationsgradienten lässt sich nach Gleichung (2.15) bestimmen. Sie muss ungleich Null sein, da die Existenz der Umkehrabbildung  $\underline{E}^{-1}$  gefordert wird, und weiterhin aus den positiven reellen Zahlen stammen; ansonsten würde eine Selbstdurchdringung des Körpers vorliegen. Die Determinante von  $\underline{E}$  stellt das Verhältnis des Volumens eines differentiellen Körperteilchens in der Momentankonfiguration bezogen auf das Volumen in der Referenzkonfiguration dar und ist unter der Bezeichnung JACOBI Determinante in der Literatur zu finden.

$$J = \det \underline{E} = \frac{dV}{d\dot{V}} = \sqrt{\frac{\det [a_{ij}]}{\det [\dot{a}_{ij}]}} > 0 \quad (2.15)$$

Der Deformationsgradient selbst kann als Verzerrungsmaß nicht fungieren, denn er enthält Anteile aus Starrkörperbewegungen (Rotationen). Aus diesem Grund werden im nächsten Abschnitt geeignete Verzerrungsmaße definiert, die diese Starrkörperverformungen eliminieren. Eine weitere wesentliche Eigenschaft des Deformationsgradienten ist seine Unsymmetrie, wie an Gleichung (2.10) unschwer zu erkennen ist.

Grundsätzlich können alle Betrachtungen und mechanische Größen entweder auf die Basisvektoren der Referenzkonfiguration oder der Momentankonfiguration bezogen werden. Ein Bezug dieser Größen auf die Referenzkonfiguration wird LAGRANGEsche Betrachtungsweise genannt, ein Bezug auf die Momentankonfiguration EULERSche Betrachtungsweise. Die Betrachtungsweise nach LAGRANGE hat gegenüber der EULERSchen Betrachtungsweise den Vorteil, dass die Basisvektoren im Vorfeld bekannt sind und sich zeitlich nicht ändern, was die Bildung von Ableitungen erheblich

vereinfacht, so dass diese Betrachtungsweise in der Kontinuumsmechanik bevorzugt zum Einsatz kommt. Die EULERSche Betrachtungsweise findet vor allem Anwendung in der Fluidmechanik, jedoch ist sie auch bei einigen Werkstoffen, deren Verhalten mit Hilfe von Spannungs- und Verzerrungstensenoren in der Momentankonfiguration beschrieben wird, anzuwenden. Eine weitere gängige Betrachtungsweise ist die updated LAGRANGESche Betrachtungsweise mit Bezug zum zuletzt aufgefundenen Verformungszustand.

### 2.2.2 Verzerrungsmaße

Als Maß für die Verzerrungen in einem Körper wird die Längenänderung von Linienelementen zwischen Referenz- und Momentankonfiguration herangezogen. Dazu werden die Quadrate der Längen vor und nach der Deformation und deren Differenz betrachtet (2.16), die sich mit den kovarianten Metrikgrößen beschreiben lässt. Der Verzerrungstensor nach GREEN-LAGRANGE wird genau mit Hilfe dieser Längenänderungen nach Gleichung (2.17) definiert. Eine wichtige Eigenschaft dieses Verzerrungstensors ist, dass sich seine Basisvektoren auf die Referenzkonfiguration beziehen, weiterhin ist seine Symmetrie erkennbar. Eine alternative Darstellung des GREEN-LAGRANGESchen Verzerrungstensors in Abhängigkeit des Verschiebungsgradienten zeigt die Beziehung (2.18), wie sie z.B. in [93] hergeleitet wird.

$$ds^2 - d\hat{s}^2 = d\theta^i \underline{a}_i \cdot d\theta^j \underline{a}_j - d\theta^i \underline{\hat{a}}_i \cdot d\theta^j \underline{\hat{a}}_j = (a_{ij} - \hat{a}_{ij}) \cdot d\theta^i d\theta^j \quad (2.16)$$

$$ds^2 - d\hat{s}^2 \stackrel{!}{=} 2 \cdot d\underline{r} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot d\underline{r}$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot [a_{ij} - \hat{a}_{ij}] \cdot \underline{\hat{a}}^i \otimes \underline{\hat{a}}^j \quad (2.17)$$

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}} \right) + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}} \right)^T + \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{r}} \right)^T \right] \quad (2.18)$$

Gleichung (2.18) lässt eine sehr anschauliche Aufspaltung der einzelnen Anteile im Verzerrungstensor erkennen: Er ist linear vom symmetrischen Verschiebungsgradienten sowie von einem im Verschiebungsgradienten quadratischen Term abhängig, allerdings sind die Verschiebungen im Allgemeinen nichtlinear vom Ortsvektor  $\underline{r}$  abhängig. Die Beziehung (2.18) gilt allgemein für große Verzerrungen und große Deformationen.

Es können außerdem eine Reihe weiterer Verzerrungstensoren definiert werden, die zum Teil nicht auf die Referenzkonfiguration bezogen sind. So entsteht z.B. der ALMANSI Verzerrungstensor aus einem Push-forward des GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensors aus der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration. Dazu müssen streng genommen nur die Basisvektoren der Dyade in der Referenzkonfiguration aus Gleichung (2.17) durch die Basisvektoren der Momentankonfiguration bei gleich bleibenden Tensorkomponenten ausgetauscht werden. Einzelheiten hierzu sind jedoch in [2], [86] oder [93] nachzulesen. Diese Fragen werden relevant bei der Behandlung großer Verzerrungen, wo strikt zwischen der LAGRANGEschen und EULERSchen Betrachtungsweise unterschieden werden muss.

## 2.3 Spannungsmaße

### 2.3.1 CAUCHY Spannungen

Im Bild 2.3 ist ein Körper dargestellt, der durch Anwendung des Schnittprinzips beliebig in zwei Teile getrennt wird, so dass ein Feld von Spannungsvektoren  $\underline{t}$  im Körperinneren freigelegt wird, die ihre Ursache in Einwirkungen haben, die an dieser Stelle nicht von näherem Interesse sein sollen. Führt man nun bei der Betrachtung den Grenzübergang auf ein differentielles Flächenelement nach Gleichung (2.19) durch, so wirkt in diesem infinitesimal kleinen Flächenelement der Spannungsvektor  $\underline{t}$ . Die CAUCHY Spannung ist demnach eine differentielle Kraft, die auf einem differentiellen Flächenelement im Inneren eines Körpers in seiner aktuellen Konfiguration, der Momentankonfiguration, wirkt. Die Fläche  $\underline{A}$  ist als vektorielle Größe gekennzeichnet, da sie durch ihren Betrag und die Orientierung ihres Normalenvektors definiert ist. Sie ist somit eine wahre Spannung, da sie auf die Schnittfläche der aktuellen Konfiguration bezogen ist.

$$\underline{t} = \lim_{\Delta \underline{A} \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{f}}{\Delta \underline{A}} = \frac{d \underline{f}}{d \underline{A}} \quad (2.19)$$

Der so definierte Spannungsvektor  $\underline{t}$  ist nach dem Postulat von CAUCHY (2.20) nur vom Ortsvektor  $\underline{r}$ , der Zeit  $t$  und der Orientierung der Tangentialfläche mit Normalenvektor  $\underline{n}$  an die im Allgemeinen nicht ebene Schnittfläche abhängig.

$$\underline{t} = \underline{t}(\underline{r}, t, \underline{n}) \quad (2.20)$$

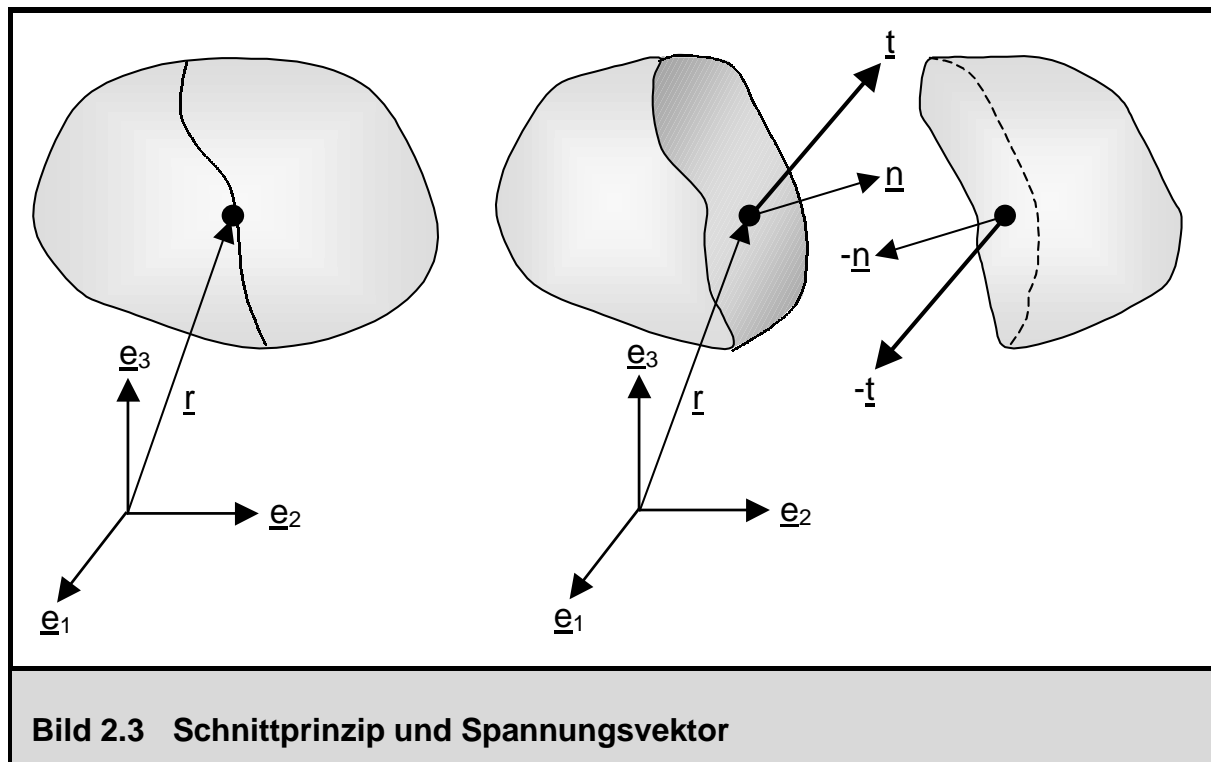
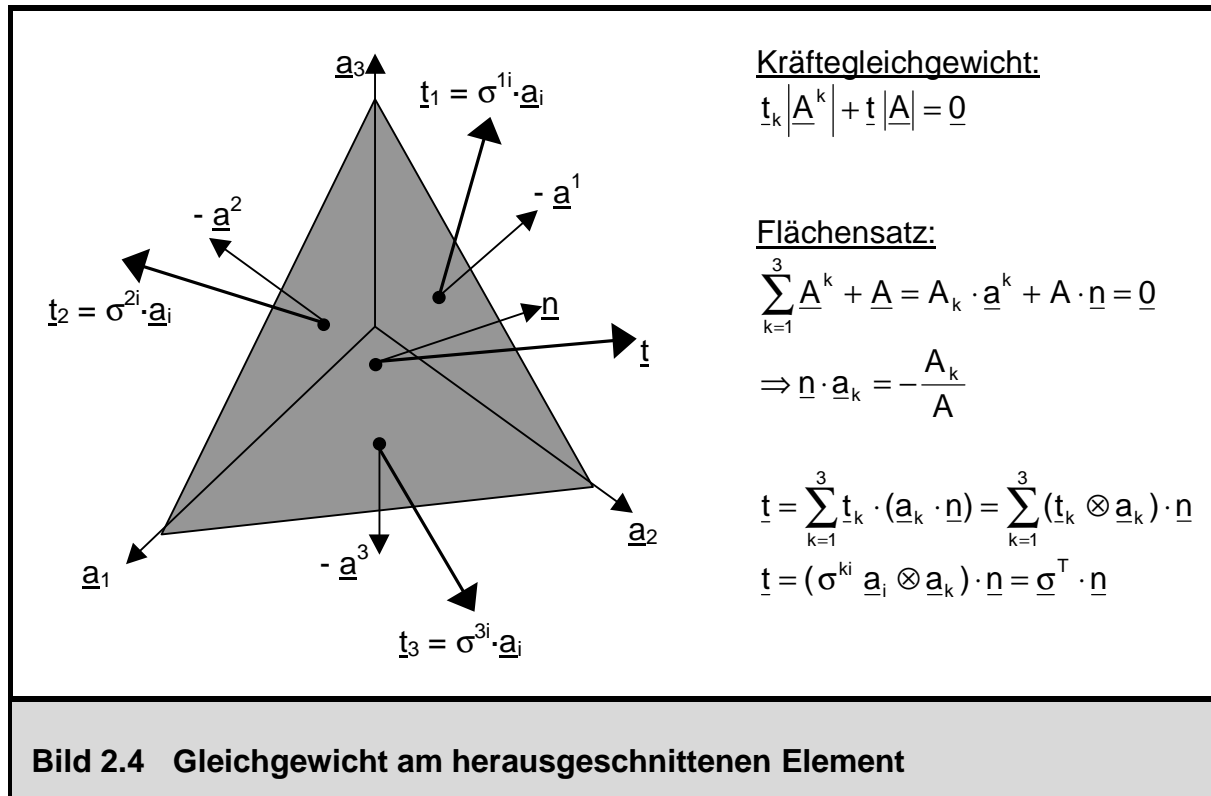


Bild 2.3 Schnittprinzip und Spannungsvektor

Bild 2.4 zeigt ein aus einem Körper herausgeschnittenes Element. Es kann durch Anschreiben der Gleichgewichtsbedingungen und einige mathematische Umformungen unter Beachtung des Flächensatzes gezeigt werden, dass der Spannungsvektor, der in einer beliebig orientierten Schnittfläche wirkt, gleich der Überschiebung des Vektors der Flächennormalen  $\underline{n}$  mit der Transponierten des CAUCHY Spannungstensors ist (2.21). Diese Beziehung ist in der Literatur als CAUCHY Theorem zu finden.

$$\underline{t} = \underline{\sigma}^T \cdot \underline{n} \quad (2.21)$$

Der CAUCHY Spannungstensor als Tensor zweiter Stufe besitzt demnach 9 Komponenten, wie aus Bild 2.4 hervorgeht. Der erste Index gibt dabei die Schnittfläche (dargestellt durch ihren Normalenvektor) an, in der die Spannungskomponente wirkt, wohingegen der zweite Index die Wirkungsrichtung der betrachteten Spannungskomponente bezeichnet. Mit diesen 9 Komponenten ist der Spannungszustand im Inneren eines Körpers ausreichend beschrieben, wobei der Spannungsvektor in eine beliebig orientierte Raumrichtung nun über das CAUCHY Theorem (2.21) berechnet werden kann. Wie bei der Herleitung der Bilanzgleichungen gezeigt werden wird, ist der CAUCHY Spannungstensor aufgrund der Erfüllung der Drehimpulsbilanz symmetrisch, so dass die 9 Komponenten unter Ausnutzen der Symmetrieeigenschaften auf 6 unabhängige Komponenten reduziert werden. Als wichtigste Erkenntnis ist festzuhalten, dass die CAUCHY Spannungen wahre Spannungen im Inneren eines Körpers darstellen, die sich auf die aktuelle Geometrie und damit auf die verformte Momentankonfiguration



zur aktuellen Zeit beziehen. Die Basisvektoren der Dyade des CAUCHY Spannungstensors sind die kovarianten Basisvektoren in der Momentankonfiguration, wie den Beziehungen im Bild 2.4 zu entnehmen ist.

### 2.3.2 PIOLA-KIRCHHOFF Spannungen 1. Art

Die Unterschiede zwischen der LAGRANGEschen und EULERSchen Betrachtungsweise sind im Abschnitt 2.2.1 in knapper Form diskutiert worden. Bei der Aufstellung von Arbeitsausdrücken müssen energiekonforme Größen verwendet werden. Aus diesem Grund ist es wünschenswert, den CAUCHY Spannungstensor aus der Momentankonfiguration in die Referenzkonfiguration zu transformieren, was auf den 1. und 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor führt. Startpunkt der folgenden Herleitung ist die NANSON Formel, die Flächenelemente von der Referenzkonfiguration ( $\underline{\dot{n}} d\dot{A}$ ) in die Momentankonfiguration ( $\underline{n} dA$ ) transformiert (2.22).

$$\underline{n} dA = J \cdot \underline{E}^{-T} \cdot \underline{\dot{n}} d\dot{A} \quad (2.22)$$

Durch Anwenden des CAUCHY Theorems (2.21) zur Darstellung eines beliebigen differentiellen Kraftvektors, der unabhängig von der betrachteten Konfiguration durch sei-



nen Betrag und Richtung definiert ist, und anschließender Substitution des Normalenvektors in der Momentankonfiguration mit Hilfe der NANSON Formel (2.22) lässt sich ein neuer Spannungstensor nach Gleichung (2.23) definieren, der Nennspannungstensor  $\underline{\Pi}$ , dessen Transponierte  $\underline{\Pi}^T$  als 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor in der Literatur zu finden ist.

$$\underline{\sigma}^T \cdot \underline{n} \, dA = \underline{t} = \underbrace{\underline{\sigma}^T \cdot J \cdot \underline{F}^{-T}}_{\underline{\Pi}^T} \cdot \underline{\dot{n}} \, d\dot{A}$$

$$\underline{\Pi}^T = J \cdot \underline{\sigma}^T \cdot \underline{F}^{-T} = J \cdot (\sigma^{ij} \underline{a}_j \otimes \underline{a}_i) \cdot (\delta_l^k \underline{a}^l \otimes \underline{\dot{a}}_k) = J \cdot \sigma^{ij} \underline{a}_j \otimes \underline{\dot{a}}_i \quad (2.23)$$

Anhand der Darstellung nach Gleichung (2.23) werden zwei wichtige Eigenschaften des 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensors deutlich: Erstens ist er wie der Deformationsgradient ein Zweifeldtensor, die Basisvektoren der Dyade beziehen sich auf unterschiedliche Konfigurationen, zweitens ist er im Gegensatz zum CAUCHY Spannungstensor unsymmetrisch.

### 2.3.3 PIOLA-KIRCHHOFF Spannungen 2. Art

Um die störende Eigenschaft der Unsymmetrie im 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor zu beseitigen und beide Basisvektoren auf die Referenzkonfiguration zu beziehen, wird durch eine Transformation mit Hilfe des Deformationsgradienten der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor  $\underline{\Sigma}$  definiert (2.24).

$$\underline{\Sigma} = \underline{\Pi} \cdot \underline{F}^{-T} = J \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T} = \underline{\Sigma}^T \quad (2.24)$$

Die unerwünschten Eigenschaften des 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensors treten nach dieser Transformation im 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor nicht mehr auf. Die physikalische Bedeutung des 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensors geht allerdings verloren, er ist als reine Rechengröße anzusehen und lässt sich als Pull-back des Cauchy Spannungstensors aus der Momentankonfiguration in die Referenzkonfiguration multipliziert mit der JACOBI Determinante deuten. Deswegen wird er auch vielfach als Pseudo-Spannungstensor bezeichnet. Eine wesentliche Eigenschaft des 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensors liegt darin, dass er energiekonjugiert zum GREEN-LAGRANGEschen Verzerrungstensor ist, durch doppelte Kontraktion dieser beiden Tensoren können konsistente Arbeitsausdrücke gebildet werden.

### 2.3.4 Spektralzerlegung, Invarianten und Oktaederdarstellung

In diesem Abschnitt werden am Beispiel des CAUCHY Spannungstensors die spektrale Zerlegung von Tensoren 2. Stufe und deren physikalische Bedeutung aufgezeigt, weiterhin die Berechnung und Bedeutung der Invarianten, sowie die Darstellungen der Spannungen in der Oktaederebene.

Zunächst wird das Eigenwertproblem des CAUCHY Spannungstensors (2.25) gelöst. Gesucht sind diejenigen Richtungsvektoren, die über den Spannungstensor in einen Spannungsvektor abgebildet werden, der gerade ein Vielfaches der Richtung ist, also kollinear zu dem Richtungsvektor verläuft. Daraus ergeben sich im allgemeinen Fall 3 Hauptrichtungen  $\underline{n}_{(i)}$ , zu denen 3 Eigenwerte, die Hauptspannungen  $\sigma_{(i)}$ , gehören.

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_{(i)} = \sigma_{(i)} \cdot \underline{n}_{(i)} \iff (\underline{\sigma} - \sigma_{(i)} \cdot \underline{\mathcal{I}}) \cdot \underline{n}_{(i)} = \underline{0} \quad (2.25)$$

Die Bildung der Determinante zur Lösung des Eigenwertproblems führt auf das charakteristische Polynom (2.26) zur Bestimmung der Hauptspannungen  $\sigma_{(i)}$ , in diesem Polynom treten die Invarianten des Spannungstensors als Koeffizienten auf:

$$(\sigma_{(i)})^3 - \mathcal{I}_1^\sigma \cdot (\sigma_{(i)})^2 + \mathcal{I}_2^\sigma \cdot \sigma_{(i)} - \mathcal{I}_3^\sigma = 0 \quad (2.26)$$

mit:

$$\mathcal{I}_1^\sigma = \text{tr } \underline{\sigma} = \underline{\sigma} : \underline{\mathcal{I}} = \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)} \quad (2.27)$$

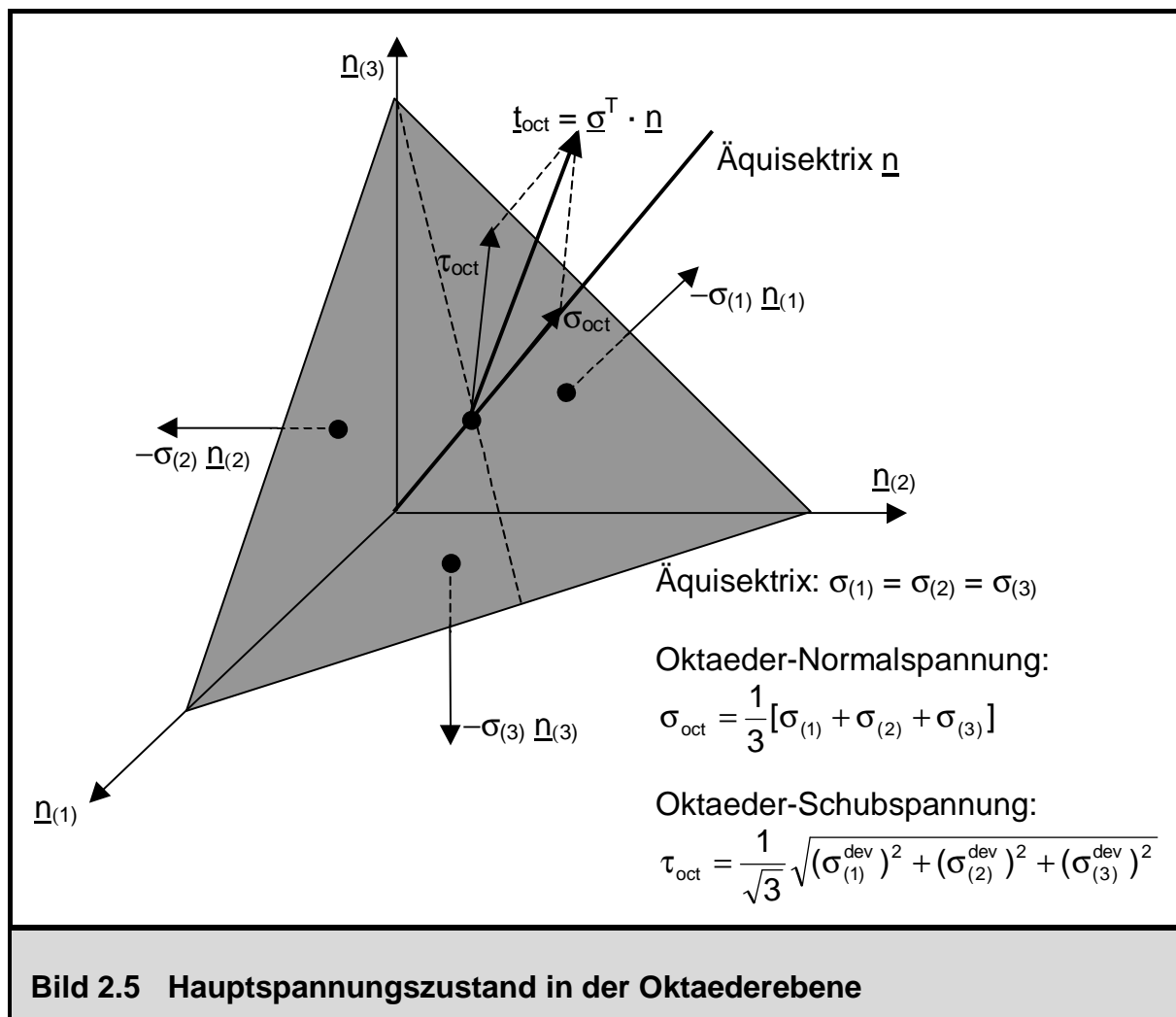
$$\mathcal{I}_2^\sigma = \frac{1}{2}[(\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \text{tr}(\underline{\sigma}^2)] = \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)} + \sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3)} + \sigma_{(3)} \cdot \sigma_{(1)} \quad (2.28)$$

$$\mathcal{I}_3^\sigma = \det \underline{\sigma} = \sigma_{(1)} \cdot \sigma_{(2)} \cdot \sigma_{(3)} \quad (2.29)$$

Wie der Name schon sagt, sind diese Invarianten (2.27)-(2.29) wie auch die Eigenwerte und Richtungen unabhängig von der Darstellung des Tensors in beliebigen Koordinatensystemen. Ferner kann der Tensor nun in einem neuen Basissystem, das

durch seine drei Eigenrichtungen gebildet wird, mit Hilfe der Spektraldarstellung (2.30) ausgedrückt werden:

$$\underline{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{(i)} \underline{n}_{(i)} \otimes \underline{n}_{(i)} \quad (2.30)$$



Darüber hinaus lässt sich der Spannungstensor in einen Kugeltensor, der einen hydrostatischen Spannungszustand beschreibt, und einen Deviator als Restanteil zerlegen. Der hydrostatische Druck beträgt ein Drittel der ersten Invarianten (also gleich dem Mittelwert der Hauptspannungen), und der deviatorische Restanteil wird aus der Differenz des Spannungstensors und seinem hydrostatischen Anteil gebildet. Ähnliche Überlegungen gelten für Verzerrungen, sie lassen sich ebenso in volumetrische (Volumen ändernde) und deviatorische (Gestalt ändernde) Anteile aufspalten, nur dass hierbei der volumetrische Anteil nicht mit dem Faktor ein Drittel behaftet ist. Im Bild 2.5 ist ein Spannungszustand, der durch seine drei Hauptspannungen und Hauptrichtungen

definiert ist, abgebildet. Es wird nun mit Hilfe des CAUCHY Theorems der Spannungsvektor für die gegebene Oktaederfläche bestimmt, welche durch ihren Normalenvektor, die Äquisektrix, festgelegt ist. Die Äquisektrix beschreibt im Hauptspannungsraum die Menge aller hydrostatischen Spannungszustände  $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_{(3)}$ . Das Ergebnis der Abbildung des Richtungsvektors der Äquisektrix mit dem Spannungstensor ist ein Spannungsvektor, der zunächst beliebig im Raum orientiert ist. Eine Zerlegung dieses Vektors liefert einen Normalspannungsanteil senkrecht zur Oktaederebene, der den hydrostatischen Anteil bildet, sowie einen Schubspannungsanteil in der Oktaederebene, der die deviatorische Komponente des Spannungszustands beschreibt. Die Gleichungen (2.31) und (2.32) geben die Beziehungen zu deren Bestimmung an.

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)}) = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{I}_1^\sigma \quad (2.31)$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(\sigma_{(1)}^{\text{dev}})^2 + (\sigma_{(2)}^{\text{dev}})^2 + (\sigma_{(3)}^{\text{dev}})^2} = \sqrt{-\frac{2}{3} \cdot \mathcal{I}_2^{\sigma^{\text{dev}}}} \quad (2.32)$$

## 2.4 Bilanzsätze

### 2.4.1 Massebilanz

Die Masse als Erhaltungsgröße ist eine charakteristische Eigenschaft eines Körpers. Bei fehlendem Masseaustausch über dessen Oberfläche und fehlendem Masseverlust bzw. Massezuwachs im Inneren bleibt dessen Gesamtmasse für alle Zeiten konstant. Durch sie werden Gravitationskräfte (Kräfte zwischen zwei Massen) sowie Trägheitskräfte hervorgerufen. Gleichung (2.33) beschreibt die Massenerhaltung in lokaler Form durch Übergang von der integralen Größe auf eine punktweise Aussage; dabei wird die Beziehung zwischen der Massendichte in der Referenzkonfiguration und einer Momentankonfiguration hergestellt, wobei die JACOBI Determinante  $J$  nach Gleichung (2.15) als Verhältnis eines Volumeneilchens in einer Momentankonfiguration zur Referenzkonfiguration eingeht.

$$m = \int_{\dot{V}} \rho \, dV = \int_{\dot{V}} \rho \cdot J \, d\dot{V} = \int_{\dot{V}} \dot{\rho} \, d\dot{V} \iff 0 = \int_{\dot{V}} [\dot{\rho} - \rho \cdot J] \, d\dot{V}$$

$$\dot{\rho} = \rho \cdot J \quad (2.33)$$

Beziehung (2.33) stellt also die Bilanz der Masse zwischen der Referenzkonfiguration und einer Momentankonfiguration zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  dar. Weiterhin muss die materielle Zeitableitung der Körpermasse verschwinden, wenn die oben aufgeführten Voraussetzungen (keine Massenzufuhr oder Abnahme) eingehalten sind. Die Betrachtung der zeitlichen Unveränderlichkeit eines differentiellen Massenelements führt auf die zweite lokale Form der Massenerhaltung, die in Gleichung (2.34) in der EULERSchen Darstellungsweise (Divergenzbildung in räumlichen Koordinaten) angegeben ist.

$$(\dot{d}m) = (\dot{\rho} \cdot dV) = (\dot{\rho} \cdot J) d\dot{V} = 0$$

$$(\dot{d}m) = [\dot{\rho} \cdot J + \rho \cdot \dot{J}] d\dot{V}$$

$$= \left[ \frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial \underline{r}} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} + \rho(\underline{r}, t) \cdot \operatorname{div} \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} \right] \cdot J d\dot{V} = 0$$

$$\frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \left[ \rho(\underline{r}, t) \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} \right] = 0 \quad (2.34)$$

Der Massenerhaltungssatz nach (2.34) beschreibt die Stetigkeit der Massenverteilung für ein Kontinuum und ist allgemein für den geometrisch nichtlinearen Fall gültig. Ein materieller Punkt kann demnach sein Volumen und seine Dichte bei einer Deformation ändern, seine Masse jedoch ist eine Erhaltungsgröße. Liegen kleine Verzerrungen vor (keine Volumenänderungen,  $J = 1$ ), vereinfacht sich diese Beziehung erheblich zu  $\rho = \dot{\rho} = \text{const.}$

## 2.4.2 Impuls- und Drehimpulserhaltung

Als Gesamtimpulsvektor eines Körpers ist das Integral über das Produkt der differentiellen Masseteilchen mit ihren Geschwindigkeitsvektoren definiert. Die zeitliche Änderung des Impulsvektors (sowohl Betrag als auch Richtung) entspricht der Summe aller einwirkenden Kräfte, die in Volumenkräfte und Oberflächenkräfte zu unterteilen sind. Zu den Oberflächenkräften zählen z.B. alle einwirkenden Drücke, aber

auch Bettungs- und äußere Dämpfungskräfte (wie Luft- oder Fluidreibung), sie stehen über das CAUCHY Theorem mit der Projektion des Spannungstensors in Richtung der Oberflächennormalen im Gleichgewicht. Gleichung (2.35) beschreibt die Impulsbilanz bezüglich der Referenzkonfiguration (LAGRANGEsche Darstellungsweise).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\dot{V}} \frac{\partial}{\partial t} \underline{u}(\underline{r}, t) \cdot \dot{\rho}(\underline{r}) d\dot{V} = \underbrace{\int_{\dot{V}} \underline{b}(\underline{r}, t) \cdot \dot{\rho}(\underline{r}) d\dot{V}}_{\text{Volumenkräfte}} + \underbrace{\oint_{\dot{A}} \underline{\Pi}^T(\underline{r}, t) \cdot \underline{\dot{n}}(\underline{r}) d\dot{A}}_{\text{Oberflächenkräfte}} \quad (2.35)$$

Die Umwandlung des Integralausdrucks über die Oberflächenkräfte aus (2.35) in ein Volumenintegral mit Hilfe des GAUSSschen Integralsatzes [115] und Übergang von der integralen auf eine lokale Betrachtung der Impulserhaltung führt zu der Bewegungsgleichung (2.36) in LAGRANGEscher Formulierung. Der tensoriellen Beziehung entsprechen jeweils 3 Gleichungen in Komponentenform, die die LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes in die 3 Raumrichtungen darstellen.

$$\text{DIV } \underline{\Pi} + \dot{\rho} \cdot \underline{\dot{b}} = \dot{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} \quad (2.36)$$

Neben dem Impulsvektor wird weiterhin der Drehimpulsvektor bezüglich eines ortsfesten Punktes definiert, der sich aus dem Vektorprodukt des Ortsvektors zu einem materiellen Körperpunkt und dessen Impulsvektor ergibt. Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses bezüglich eines gewählten Referenzpunktes ist gleich dem Gesamtmoment aller einwirkenden Kräfte (Volumen- und Oberflächenkräfte) bezüglich dieses Punktes. Als Bezugspunkt ist in Gleichung (2.37), die die Impulsbilanz in LAGRANGEscher Darstellung wiedergibt, der Ursprung des globalen ortsfesten Koordinatensystems gewählt worden, was jedoch keine Einschränkung bezüglich einer beliebigen Wahl darstellen soll.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\dot{V}} \underline{r}(\underline{r}, t) \times \frac{\partial}{\partial t} \underline{u}(\underline{r}, t) \cdot \dot{\rho}(\underline{r}) \, d\dot{V} = & \underbrace{\int_{\dot{V}} \underline{r}(\underline{r}, t) \times \underline{b}(\underline{r}, t) \cdot \dot{\rho}(\underline{r}) \, d\dot{V}}_{\text{Volumenkräfte}} \\
 & + \underbrace{\oint_{\dot{A}} \underline{r}(\underline{r}, t) \times (\underline{\Pi}^T(\underline{r}, t) \cdot \underline{\dot{n}}(\underline{r})) \, d\dot{A}}_{\text{Oberflächenkräfte}} \quad (2.37)
 \end{aligned}$$

Wie in der Standardliteratur (z.B. [2]) gezeigt wird, kann die Drehimpulsbilanz mit Hilfe einiger mathematischer Umformungen auf die Symmetrieaussage für den 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor reduziert werden. Gleichung (2.37) ist somit äquivalent mit der Beziehung (2.38).

$$\underline{F} \cdot \underline{\Pi} = \underline{\Pi}^T \cdot \underline{F}^T \quad \iff \quad \underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}^T \quad (2.38)$$

Die Herleitung der Impulsbilanz und der Drehimpulsbilanz bezogen auf die Momentankonfiguration erfolgt analog, worauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird. Die Impulsbilanz mit Bezug zur Momentankonfiguration führt zur 1. Bewegungsgleichung nach EULER, die das dynamische Kräftegleichgewicht in der aktuellen Konfiguration darstellt, wohingegen der Drehimpulssatz auf die 2. Bewegungsgleichung nach EULER führt, aus der die Symmetrie des CAUCHY Spannungstensors  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T$  hergeleitet werden kann, was bei den Ausführungen des Abschnitts 2.3 stillschweigend vorausgesetzt worden ist.

## 2.5 Zusammenfassende Betrachtung des Systems der Grundgleichungen

In diesem Kapitel sind in einführender Form die Grundgleichungen der geometrisch nichtlinearen Kontinuumsmechanik dargestellt worden, als Standardliteratur hierzu sei [2] genannt, fortgeschrittene Abhandlungen können [86] und [93] entnommen werden. Die Zusammenhänge zwischen äußeren Verformungen und den Verzerrungen sind aufgezeigt worden, sowie die Definition der Spannungsmaße und ihre Verknüpfungen in den Gleichgewichtsbeziehungen, die aus der Impulsbilanz abgeleitet werden

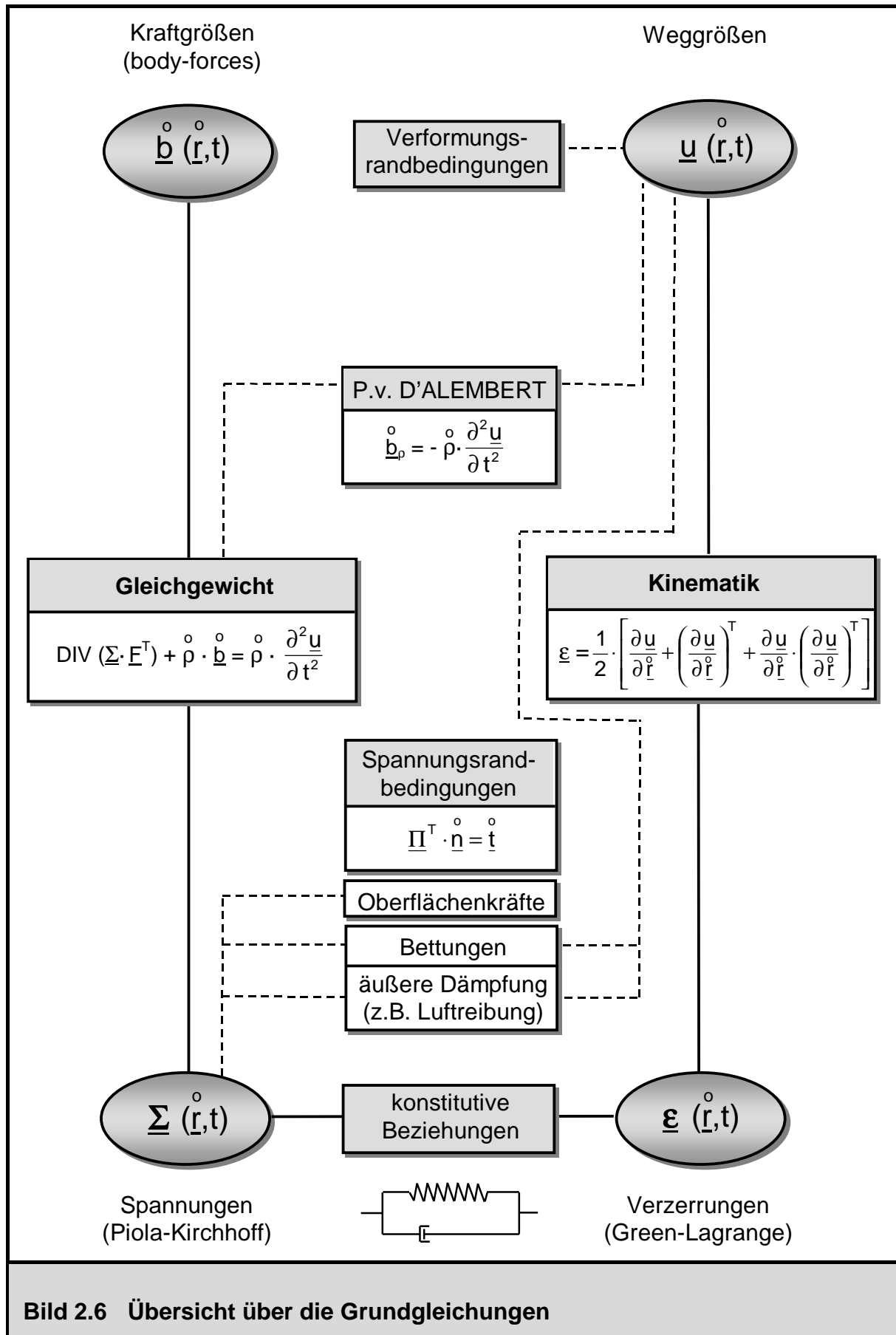


Bild 2.6 Übersicht über die Grundgleichungen



können. Die Problematik großer Deformationen und großer Verzerrungen erfordert eine differenzierte Betrachtungsweise zwischen Referenzkonfiguration und Momentankonfiguration. Die mechanischen Gleichungen können sowohl in der Referenzkonfiguration (LAGRANGEsche Formulierung) als auch in der Momentankonfiguration (EULERSche Formulierung) angeschrieben werden, wobei erstere Vereinfachungen mit sich bringt, auf die bereits hingewiesen worden ist. Mechanische Zustandsgrößen können mit Hilfe spezieller Transformationsbeziehungen, Pull-back und Push-forward, zwischen den Konfigurationen transformiert werden, ein Beispiel dafür ist die Transformation vom CAUCHY Spannungstensor (wahre Spannungen) zum 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor. Die allgemeine Behandlung von konstitutiven Beziehungen sollte an dieser Stelle nicht interessieren, da gesondert auf die speziell im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Werkstoffgesetze im Kapitel 3 eingegangen wird.

Abschließend ist im Bild 2.6 eine zusammenfassende Darstellung der Struktur der Grundgleichungen in LAGRANGEscher Formulierung gegeben, die die Beziehungen zwischen den mechanischen Variablen herstellen. Zur Lösung dieser Grundgleichungen nach den unbekanntem Weggrößen und deren Zeitableitungen werden im Rahmen dieser Arbeit FE-Weggrößenmodelle zusammen mit Lösungsverfahren für den Zeitbereich hergeleitet und angewendet. Die Bewegungsgleichungen für die 3 Raumrichtungen ergeben sich nach den Ausführungen dieses Kapitels aus der Impulsbilanz; formal auf das gleiche Ergebnis führt ebenso die Berücksichtigung der Massenträgheitskräfte nach dem Prinzip von D’ALEMBERT als Körperkräfte in den Gleichgewichtsbeziehungen. Diese Betrachtungsweise ist im Bild 2.6 verwendet worden, um die Kopplung zwischen den Gleichgewichtsbeziehungen und den Verformungen (bzw. deren Zeitableitungen) zu verdeutlichen. Darüber hinaus sind im Bild 2.6 Oberflächenkräfte eingetragen, zu denen auch äußere Dämpfungskräfte und Bettungskräfte gezählt werden können, die natürlich mit den Verformungen verknüpft sind; diese Oberflächenkräfte stehen als NEUMANN Randbedingungen im Gleichgewicht mit der Projektion des Spannungstensors in Richtung der Oberflächennormalen.



---

## Kapitel 3

# Modellierung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton

### 3.1 Allgemeine Vorbemerkungen

Gemäß den Ausführungen des Kapitel 2 wird bei der Behandlung mechanischer Problemstellungen zwischen drei verschiedenen Arten von Grundgleichungen unterschieden – den Gleichgewichtsbeziehungen, den kinematischen Beziehungen und den konstitutiven Beziehungen (Werkstoffgesetze). Letztere stellen nach Bild 2.6 den Zusammenhang zwischen den inneren mechanischen Variablen, nämlich den inneren Weggrößen (Verzerrungen) und den inneren Kraftgrößen (Spannungen bzw. nach Querschnittsintegration Spannungsergebnissen), her. In diesem Kapitel wird auf die Modellierung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton im Rahmen der im Kapitel 4 vorgestellten Flächentragwerksapproximation, die einen zweiaxialen Spannungszustand voraussetzt, eingegangen. Trotz der Tatsache, dass auf Mesoebene ein heterogener Werkstoff bestehend aus Zuschlagskörnern, Zementleim und Bewehrungsstäben vorliegt, der zudem noch im Allgemeinen von Rissen durchsetzt ist, kommt als Rechenmodell ein makroskopisch homogenes Werkstoffmodell zum Einsatz. Die Beschreibung des Riss- und Nachrissverhaltens des Betons nimmt dabei eine zentrale Rolle ein. Die Überschreitung der Zugfestigkeit des Betons, die etwa ein Zehntel seiner Druckfestigkeit beträgt, erfolgt bereits im Allgemeinen auf Gebrauchslastniveau. Dadurch entsteht eine Diskontinuität in Form eines diskreten Risses, der streng genommen durch eine Anpassung des vorhanden Modells (z.B. neue Diskretisierung) zu berücksichtigen ist; diese Vorgehensweise ist in der Literatur als diskretes Rissmodell zu finden [64]. Bei numerischen Simulationen von komplexen Strukturen ist dieses Verfahren jedoch praktisch nicht mit vertretbarem Aufwand einzusetzen, da jeder neu entstehende diskrete

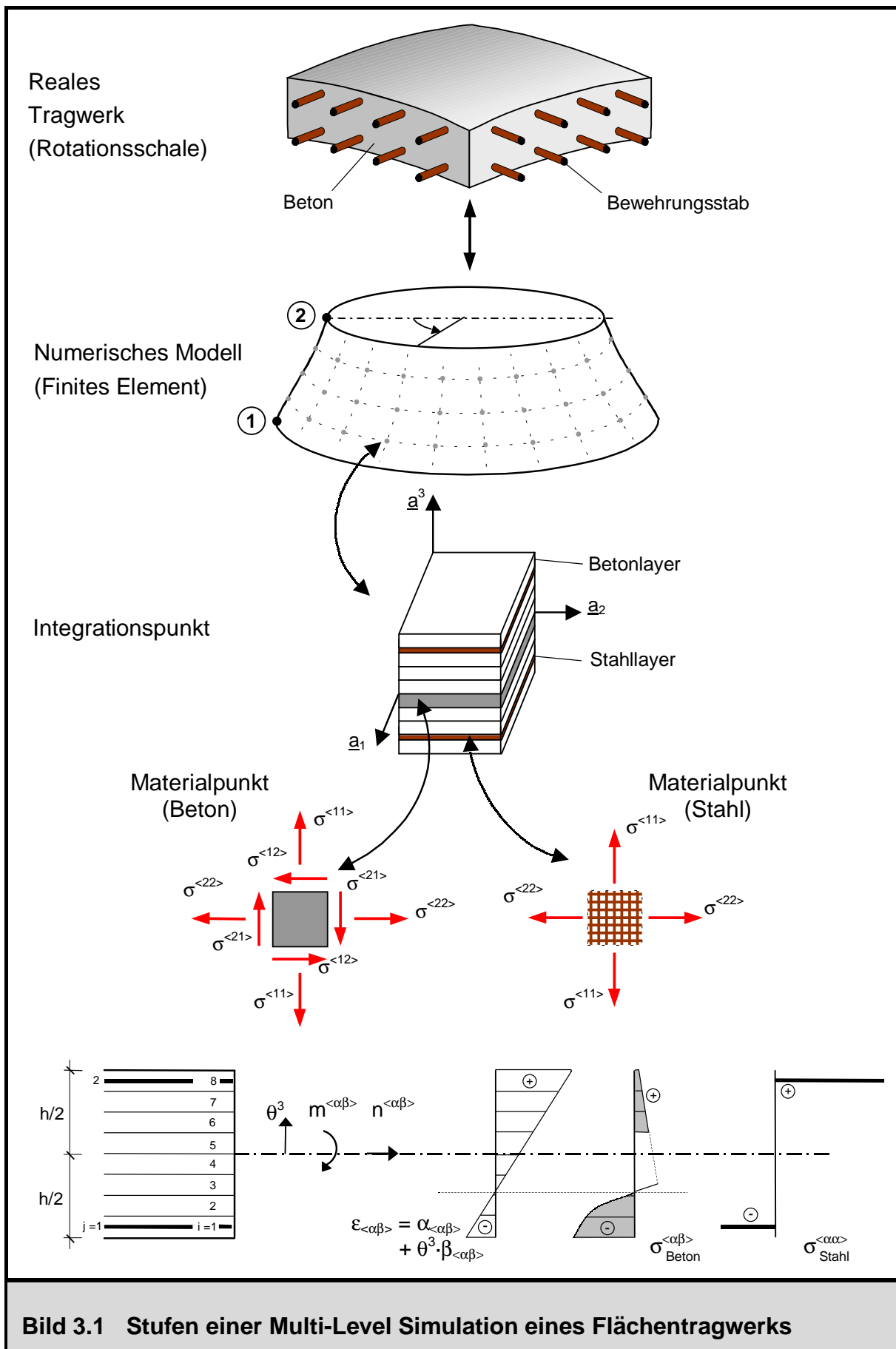
Riss bei dieser Vorgehensweise ein „Remeshing“ zur Folge hat und somit die Anzahl der Elemente und Freiheitsgrade ins Unermessliche ansteigt. Stattdessen kommt im Rahmen dieser Arbeit eine vielfach bewährte verschmierte Rissmodellierung zum Einsatz, die die Verbundeigenschaften zwischen Beton und Bewehrungsstahl mit Hilfe einer integralen Betrachtung (mittlere Dehnungen, mittlere Spannungen, mittlere Rissabstände) beschreibt. Die wesentlichen nichtlinearen Eigenschaften des Werkstoffes Stahlbeton für kurzzeitige Beanspruchungen infolge dynamischer Einwirkungen sind im Folgenden kurz zusammengefasst, wobei auf eine Betrachtung von Langzeiteffekten im Rahmen dieser Arbeit verzichtet wird:

- Nichtlinearität zwischen Dehnungen und Spannungen
- Druckversagen
- Festigkeitssteigerung bei zwei- oder dreiaxialem Druck sowie bei hohen Dehngeschwindigkeiten
- Elasto-plastisches Verhalten des Bewehrungsstahls mit BAUSCHINGER Effekt
- Bewehrungsreißen
- Bildung von Rissen bei Überschreitung der Zugfestigkeit
- Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (Tension Stiffening)

Die genannten nichtlinearen Werkstoffeigenschaften können somit den drei Komponenten Beton, Bewehrungsstahl und Verbundwirkung zwischen Beton und Bewehrungsstahl zugewiesen werden. Die Behandlung dieser Einzelbeiträge und deren Zusammenführung in einem Werkstoffmodell für Stahlbeton werden in den weiteren Abschnitten dieses Kapitels aufgezeigt.

## 3.2 Zusammenhang Spannungen – Schnittgrößen

Im Bild 3.1 sind die verschiedenen Stufen einer Multi-Level Simulation nach [76] dargestellt. Ein reales Tragwerk oder Bauteil wird zunächst durch eine Idealisierung in ein numerisches Rechenmodell überführt, wobei entsprechende Überlegungen bezüglich der Tragwerksgeometrie wie z.B. Idealisierung als Balken (1D), Scheibe/ Platte/ Schale (2D) oder Kontinuum (3D) erforderlich sind. Bei einer Diskretisierung mit der FE-Methode, wie sie im Rahmen dieser Arbeit für rotationssymmetrische Strukturen behandelt wird, wird das idealisierte Tragwerk in einzelne Elemente (in diesem Fall Ring-



elemente) unterteilt, die an Knoten auf der Meridiankurve  $\theta^1 = 0^\circ$  miteinander verknüpft sind. Generell sind bei der Formulierung von Finiten Elementen Arbeitsintegrale über das Elementvolumen zu berechnen, was im Allgemeinen nur numerisch durchgeführt werden kann. Im Rahmen einer Flächentragwerkstheorie geschieht dies über eine Auswertung von einzelnen Integrationspunkten mit gewichteter Summation über die Elementfläche, wobei alle mechanischen Zustandsvariablen auf die Mittelfläche bezogen sind. In jedem einzelnen Flächenintegrationspunkt wird zusätzlich eine Integration über die Querschnittshöhe durchgeführt. Somit werden aus dem Verzerrungszustand der Mittelfläche arbeitskonforme Spannungsergebnisse (Schnittgrößen) gewonnen. Ein Stahlbetonquerschnitt wird demnach in einzelne Betonschichten und Bewehrungslagen unterteilt. Für jede Schicht wird aus der Querschnittskinetik der zugehörige Dehnungszustand ermittelt, mit dem wiederum der ebene Spannungszustand unter Auswerten des Werkstoffgesetzes (evtl. unter Berücksichtigung der Spannungsvorgeschichte bei nicht elastischen Werkstoffen) ermittelt wird.

$$n^{<\alpha\beta>} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu [\delta_\rho^\beta - \theta^3 b_\rho^\beta] \sigma^{<\alpha\rho>} \sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}}{a_{\alpha\alpha}^* a_{\rho\rho}^*}} d\theta^3 \quad (3.1)$$

$$n_{\text{Beton}}^{<\alpha\beta>} = \sum_i \Delta\theta^3 \mu [\delta_\rho^\beta - \theta^3 b_\rho^\beta] \sigma_{\text{Beton}}^{<\alpha\rho>} \sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}}{a_{\alpha\alpha}^* a_{\rho\rho}^*}} \quad (3.2)$$

$$n_{\text{Stahl}}^{<\alpha\alpha>} = \sum_j a_{sj} \mu [\delta_\rho^\alpha - \theta^3 b_\rho^\alpha] \sigma_{\text{Stahl}}^{<\alpha\rho>} \sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha} a_{\alpha\alpha}}{a_{\alpha\alpha}^* a_{\rho\rho}^*}} \quad (3.3)$$

$$m^{<\alpha\beta>} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \theta^3 \sigma^{<\alpha\beta>} \sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}}{a_{\alpha\alpha}^* a_{\beta\beta}^*}} d\theta^3 \quad (3.4)$$

$$m_{\text{Beton}}^{<\alpha\beta>} = \sum_i \Delta\theta^3 \mu \theta^3 \sigma_{\text{Beton}}^{<\alpha\beta>} \sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}}{a_{\alpha\alpha}^* a_{\beta\beta}^*}} \quad (3.5)$$

$$m_{\text{Stahl}}^{<\alpha\alpha>} = \sum_j a_{sj} \mu \theta^3 \sigma_{\text{Stahl}}^{<\alpha\alpha>} \sqrt{\frac{a_{\alpha\alpha} a_{\alpha\alpha}}{a_{\alpha\alpha}^* a_{\alpha\alpha}^*}} \quad (3.6)$$

Die Spannungen aus allen Schichten eines Flächenintegrationspunkts werden mit einem numerischen Integrationsverfahren zu Schnittgrößen aufintegriert. Für eine orthogonale Metrik lassen sich nach Gleichung (3.1) die physikalischen Komponenten des

Dehnungskrafttensors einführen, wobei in den Gleichungen (3.2) und (3.3) die analytische Integration durch eine numerische Schichtenintegration ersetzt worden ist und sich somit durch Summation über alle Betonschichten und Bewehrungslagen die entsprechenden Anteile ergeben. Analog werden nach Gleichung (3.4) die physikalischen Komponenten des Momententensors eingeführt, wobei wiederum eine numerische Integration über alle Betonschichten und Bewehrungslagen nach Gleichung (3.5) und (3.6) erfolgt. Die Auswertung des Werkstoffgesetzes in einer Schicht eines Integrationspunkts eines Finiten Elements stellt somit nach Bild 3.1 die unterste Stufe einer Multi-Level Simulation eines Tragwerks dar.

## 3.3 Stoffgesetze für Beton

### 3.3.1 Überblick

Nachfolgende Aufzählung gibt einen Überblick über die verschiedenen Theoriestufen zur Formulierung der Spannungs-Dehnungsbeziehung des unbewehrten Betons [113]:

- lineare oder nichtlineare Elastizitätstheorie
- Plastizitätstheorie
- plastische Bruchtheorie
- endochrone Theorie

Der vierstufige Elastizitätstensor besitzt im allgemeinen räumlichen Fall 81 Komponenten. Durch Ausnutzen der großen und kleinen Symmetrien, die in der zweifachen Ableitung der Verzerrungsenergiedichtefunktion (bei hyperelastischen Werkstoffen) nach dem Verzerrungstensor sowie in der Symmetrie des Verzerrungstensors selbst begründet liegen, können diese 81 Komponenten auf 21 unabhängige Komponenten für den Fall der allgemeinen Anisotropie reduziert werden (9 Komponenten für Orthotropie, 5 Komponenten für transversale Isotropie) [2]. Bei einem isotropen elastischen Werkstoff wie ungerissenem Beton reduzieren sich die 21 Komponenten des allgemeinen anisotropen vierstufigen Verzerrungstensors auf 2 unabhängige Materialparameter wie z.B. Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl respektive Kompressionsmodul und Schubmodul. Für den Fall der linearen Elastizität sind diese Werkstoffparameter konstant, für den Fall der nichtlinearen Elastizität hängen sie vom aktuellen Verzerrungszustand ab. Nach der Elastizitätstheorie besteht somit ein eindeutiger, pfadunabhängiger

Zusammenhang zwischen Verzerrungstensor und Spannungstensor; Belastung, Entlastung und Wiederbelastung erfolgen allesamt auf dem selben Weg.

Die Plastizitätstheorie ist die sinngemäße Übertragung des Materialverhaltens, das bei metallischen Werkstoffen beobachtet werden kann, auf Beton. Der elastische Bereich wird durch eine Fließfunktion (doppelt gekrümmte, zigarrenförmige Fläche um die Äquisektrix im dreidimensionalen Hauptspannungsraum) abgegrenzt. Für Spannungszustände innerhalb dieses Bereiches herrscht linear elastisches Verhalten, bei Zuständen auf der Fließfläche liegt plastisches Verhalten mit Verfestigung und entsprechenden Zuwächsen in den plastischen Verzerrungen vor. Probleme bereitet dabei die Erfassung des Nachbruchverhaltens (Strain-Softening), für dessen Beschreibung die plastische Bruchtheorie herangezogen wird.

Die endochrone Theorie nach VALANIS [118] und deren Umsetzung für Beton nach BAŽANT [9] beschreibt das inelastische Materialverhalten im Gegensatz zur Plastizitätstheorie ohne Fließfläche und ohne rein elastisches Verhalten. Sie stellt eine besondere Form der Viskoplastizität dar; die plastischen Verzerrungsinkremente und die Spannungsinkremente sind nun nicht mehr ausschließlich vom aktuellen Verzerrungs- und Spannungszustand, sondern darüber hinaus noch von den Verzerrungsraten selbst abhängig. Dies führt zu einer Nichtlinearität im Inkrement [74], [113]. Auch die Anzahl der benötigten Materialparameter und die damit verbundene aufwendige Kalibrierung an Versuchen lässt diese Theoriestufe für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Simulationen als nicht praktikabel und auch nicht erforderlich erscheinen.

Spezielle dehnratenabhängige Betonstoffgesetze sind bei hochdynamischen Beanspruchungen wie z.B. Anpralllasten oder Geschosseindringungen zu verwenden. Hier-

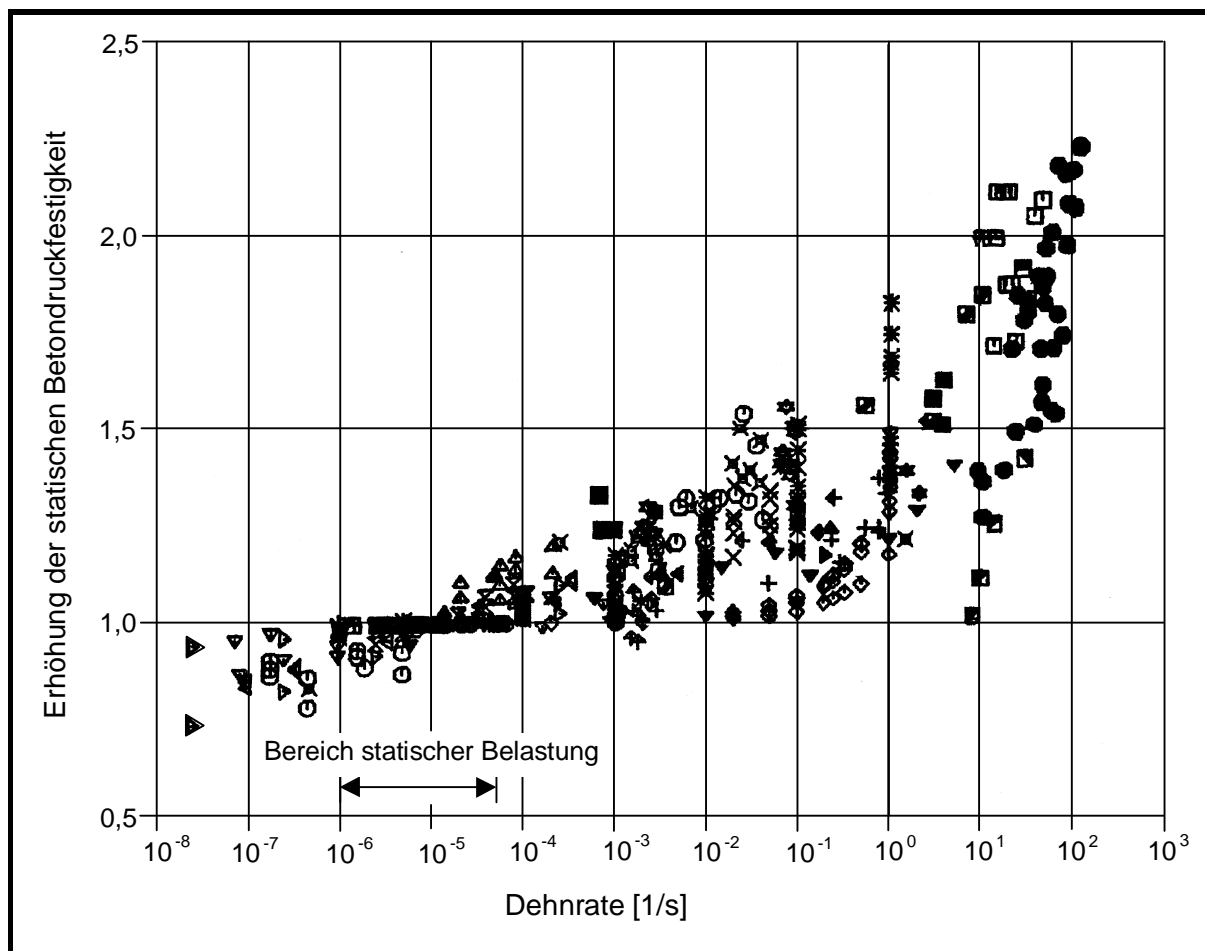
Einwirkungsart	max. Geschwindigkeit [m/s]	Dauer [s]	Dehnrate [1/s]	max. Spannung [MPa]
Statische Last	0	$10^9$	$10^{-5}$	20
Schlag mit Pressluft-hammer	5	$5 \cdot 10^{-3}$ / Schlag	1	150
Fahrzeugcrash	20	$5 \cdot 10^{-2}$	300	500
Bombenpenetration	300	$10^{-3}$	$10^4$	500
Geschosseindringung	2000	$10^{-3}$	$10^5$	5000
Hohlladungsbeschuss/ Meteoriteneinschlag	10000	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^6$	50000

**Tabelle 3.1 Überblick über Größenordnung von Dehnraten**



zu sind insbesondere die Veröffentlichungen von EIBL und Mitarbeitern zu nennen [44], [45], [135]. Die wesentlichste Eigenschaft des Betons unter hohen Dehngeschwindigkeiten ist dessen Festigkeitssteigerung. Die physikalische Begründung dieses Effekts ist in der Trägheit beim Vorgang der Mikrorissbildung zu suchen, die eine kurzzeitige Festigkeitssteigerung zur Folge hat. Bei einer sehr kurzen Belastungsdauer und somit hohen Dehngeschwindigkeiten treten im Gegensatz zu einer statischen Belastung mit gleicher Intensität nur geringfügige Mikrorisschädigungen und somit Schadensakkumulationen auf, was z.B. mit Schallemissionsmessungen während des Belastungsvorgangs nachgewiesen werden kann. Die Festigkeit ist darüber hinaus nicht nur von der aktuellen Dehngeschwindigkeit, sondern auch von deren Vorgeschichte aus dem Belastungsvorgang abhängig, da die Zeitpunkte der maximalen Verzerrung und der maximalen Verzerrungsgeschwindigkeit im Allgemeinen nicht zusammenfallen.

Tabelle 3.1 gibt einen Überblick über die Größenordnung von Dehnraten verschiedener Belastungsprozesse nach [105], im Bild 3.2 ist die zugehörige Festigkeitserhöhung in Abhängigkeit der Dehnrates aufgetragen. Eine nennenswerte Festigkeitssteigerung auf das Doppelte der statischen Druckfestigkeit ist ab Dehnraten von 100 1/s zu erkennen,



**Bild 3.2 Druckfestigkeit in Abhängigkeit der Dehnrates**

wobei jedoch die große Streuung der Versuchsergebnisse auffällt. Diese Stoffgesetze werden vorrangig zur Simulation von lokalen Effekten wie z.B. das Eindringen von Projektilen in Stahlbetonkörper benötigt und finden im Rahmen dieser Arbeit keine Berücksichtigung. Bei zyklischen Beanspruchungen erfolgt eine Schädigung des Betons auf Mikrorissebene, so dass keine Festigkeitssteigerung eintritt. Von statischer Belastung kann gemäß Tabelle 3.1 und Bild 3.2 gesprochen werden, wenn Dehnraten kleiner als  $10^{-4}$  vorliegen. Hierbei erfolgt die Lastaufbringung derart langsam, dass Trägheits- und Dämpfungsterme vernachlässigt werden können.

Grundsätzlich ist bei der Verwendung von Stoffgesetzen im Rahmen von nichtlinearen FE-Analysen die rechnerische Effizienz im Verhältnis zu den Ergebnissen in Frage zu stellen, so dass im Allgemeinen möglichst einfache Materialgesetze zum Einsatz kommen sollten [113], [49]. Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Untersuchungen sind die wesentlichen Ursachen des nichtlinearen Verhaltens im Reißen des Betons, in der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen sowie im Fließen des Bewehrungsstahls zu suchen. Das nichtlineare Druckverhalten ist – wenn überhaupt – in lokalen Zonen nur von untergeordneter Bedeutung und hat auf das globale Strukturverhalten keinen nennenswerten Einfluss. Aus diesem Grund kommt für den ungerissenen bzw. druckbeanspruchten Beton ein finites Stoffgesetz auf der Basis der nichtlinearen Elastizitätstheorie mit einer orthotropen elasto-plastischen Erweiterung zur Berücksichtigung von plastischen Druckvorschädigungen zum Einsatz.

### 3.3.2 Zweiaxiales Werkstoffverhalten von Beton

In den derzeit gültigen Vorschriften des Stahlbetonbaus [33], [37] finden sich ausschließlich Angaben zu einaxialen, nichtlinear elastischen Stoffgesetzen für Beton. Zur Modellierung des Verhaltens von Flächentragwerken, insbesondere auch unter dynamischen Beanspruchungen, sind diese normativen Vorgaben jedoch unzureichend, so dass auf weiterführende Versuchsergebnisse und Veröffentlichungen zurückgegriffen werden muss. Die Grundlage für das in dieser Arbeit verwendete zweiaxiale elasto-plastische Werkstoffmodell bilden die experimentellen Arbeiten von KUPFER/ HILSDORF/ RÜSCH [80]. Deren Versuche liefern Kurvenscharen von Spannungsdehnungsbeziehungen, die im Bild 3.3 dargestellt sind, wobei als Scharparameter das Hauptspannungsverhältnis  $\sigma_{(1)}/\sigma_{(2)}$  variabel ist. Durch Auftragen der beiden Spannungen  $\sigma_{(1)}$  und  $\sigma_{(2)}$  im Versagenszustand ergibt sich die zweiaxiale Versagenskurve im Hauptspannungsraum, die symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden verläuft. Für zweiaxialen Druck ist eine Festigkeitserhöhung gegenüber der einaxialen Druckfestigkeit um ca. 20% zu erkennen, deren Ursache in der Behinderung der Mikrorissbildung im Gefüge durch den einwirkenden Querdruck begründet liegt. Grundsätzlich erfolgt ei-

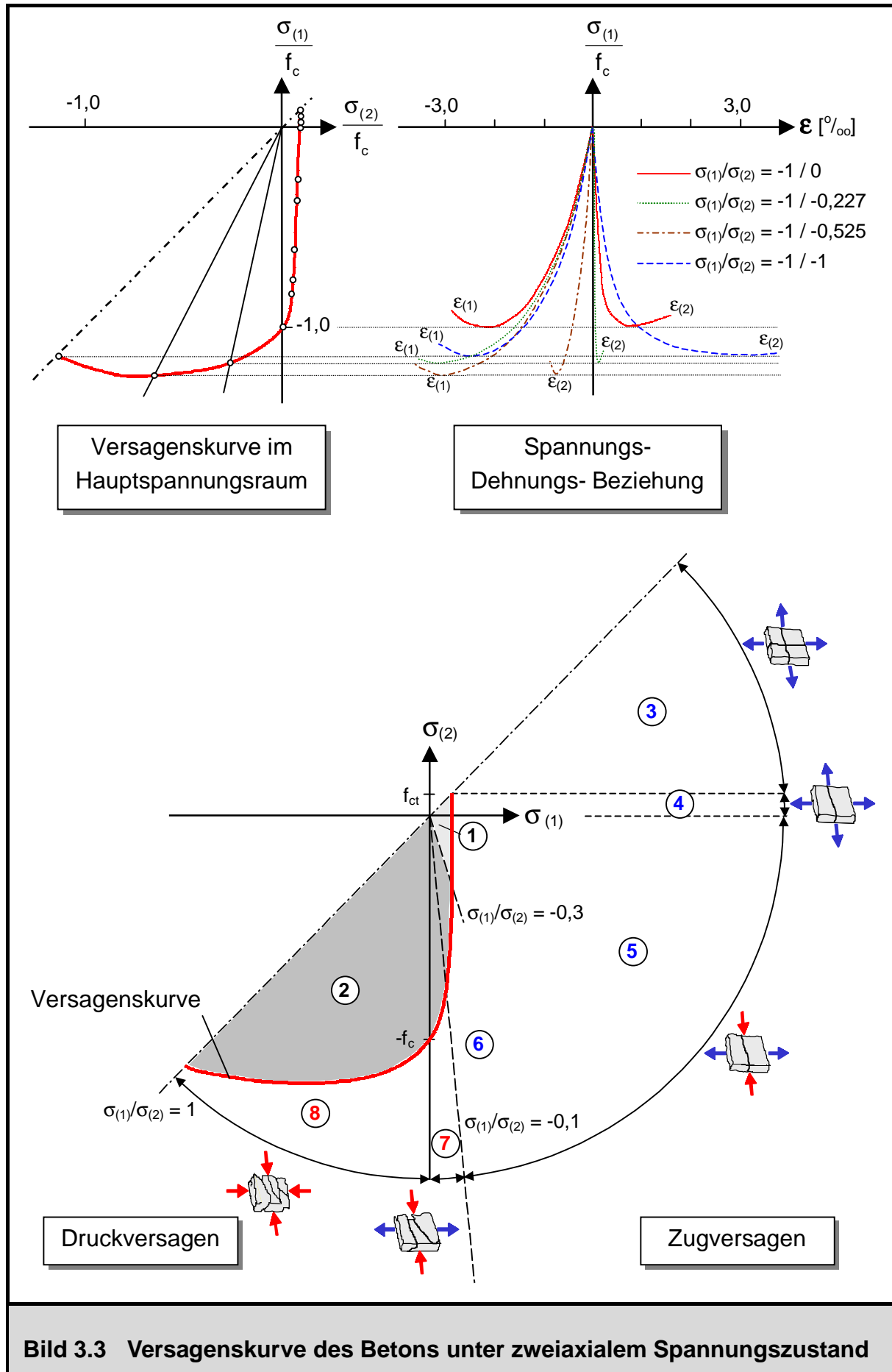


Bild 3.3 Versagenskurve des Betons unter zweiachialem Spannungszustand

ne Unterteilung der Bereiche des Hauptspannungsraums in Druckversagensbereiche, Zugversagensbereiche und ungeschädigte Bereiche mit isotropem Werkstoffverhalten. Eine feinere Einteilung der genannten Bereiche führt zu folgenden 8 Unterbereichen: Die Bereiche 1 und 2 beschreiben den ungeschädigten Beton. Er ist weder gerissen, noch liegt Druckversagen vor. Sein Verhalten ist linear elastisch (Bereich 1) bzw. nicht-linear elastisch (Bereich 2). Im Bereich 3 liegt ein Zugversagen in beide Richtungen vor, in den Bereichen 4 – 6 nur in einer Richtung. Das Verhalten des Betons nach dem Reißen ist orthotrop, in der gerissenen Richtung wirkt der Beton auf Zug zwischen den Rissen begrenzt mit. In den Bereichen 7 und 8 findet eine Gefügezerstörung durch Betondruckbruch statt, so dass keine Spannungen mehr übertragen werden können und sämtliche Steifigkeitswerte zu Null werden.

In den folgenden Abschnitten wird die Modellierung der Bereiche 1 und 2 des ungeschädigten Betons erläutert. Die Behandlung der Bereiche 3 – 6 nach Überschreiten der Zugfestigkeit erfolgt im Abschnitt 3.5 mit der Beschreibung der Werkstoffgesetze für den Verbund zwischen Beton und Betonstahl.

### 3.3.3 Zweiaxiale Stoffgesetze für den ungeschädigten Beton

Im Bereich 1 des Werkstoffmodells aus Bild 3.3 liegt linear elastisches, isotropes Verhalten des ungeschädigten Betons vor. Nach der Transformation des Dehnungstensors auf seine Hauptrichtungen beschreibt Gleichung (3.7) das zugehörige Werkstoffgesetz in Hauptrichtung mit den Ursprungselastizitätskonstanten  $E_{c0}$  und  $\nu_{c0}$ . Die Hauptspannungen sind kollinear zu den Hauptdehnungen und werden nach der Auswertung des Werkstoffgesetzes wieder auf die ursprüngliche Koordinatenrichtung zurücktransformiert. Gleichung (3.7) gilt sowohl für die Auswertung der aktuellen Spannungen wie auch der Spannungsinkremente.

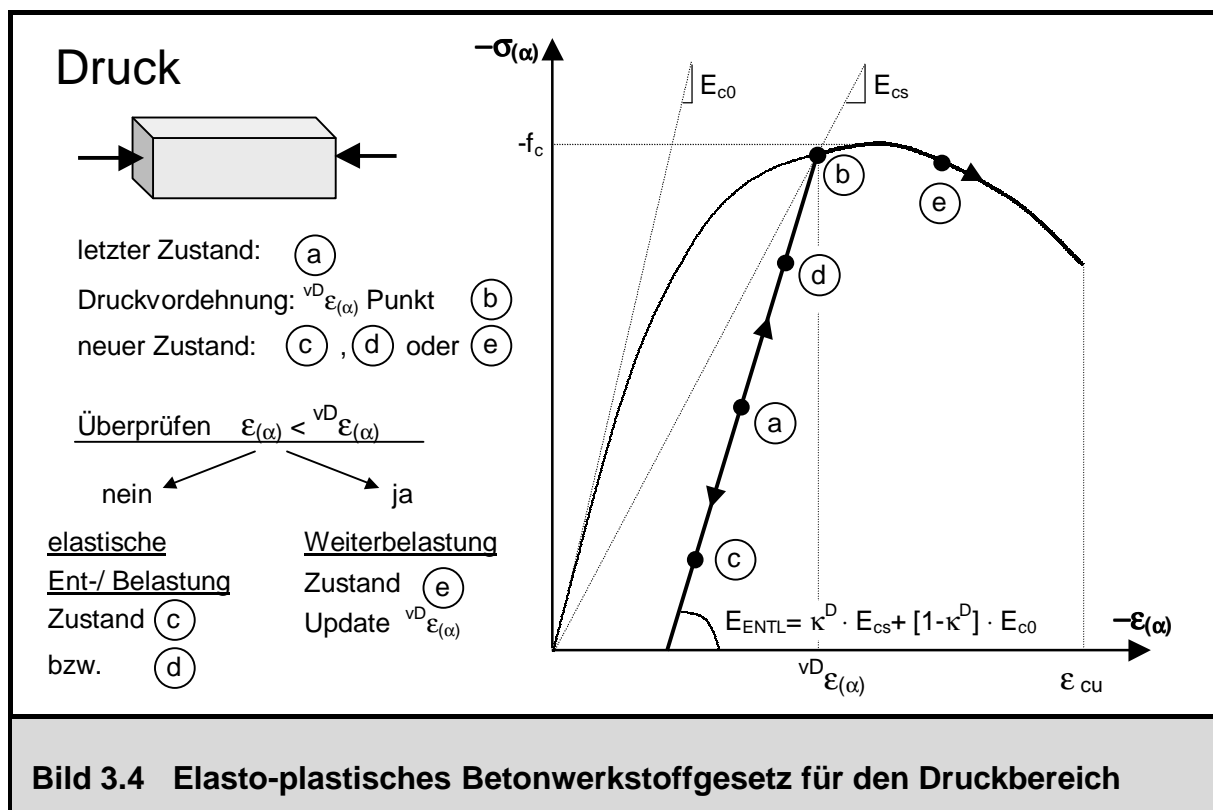
$$\begin{bmatrix} \sigma_{(1)} \\ \sigma_{(2)} \end{bmatrix} = \frac{E_{c0}}{1 - \nu_{c0}^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_{c0} \\ \nu_{c0} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{(1)} \\ \varepsilon_{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Eine Umsetzung der Versuchsergebnisse von KUPFER/ HILSDORF/ RÜSCH [80] in ein mathematisches Modell führten CEDOLIN/ MULAS [22], [43] durch. Deren isotropes Stoffgesetz zur Modellierung des nichtlinear elastischen Bereichs 2 stellt einen expliziten Zusammenhang zwischen dem aktuellen Dehnungszustand und zugehörigen Spannungszustand her. Über empirische Beziehungen wird zunächst aus den Eigenwerten  $\varepsilon_{(1)}$  und  $\varepsilon_{(2)}$  des flächenhaften Verzerrungszustands die zugehörige Transversaldehynung  $\varepsilon_{(3)}$  in der Art bestimmt, dass nach Auswerten des Werkstoffgesetzes

ein ebener Spannungszustand vorliegt. Mit diesen drei Hauptdehnungen erfolgt eine Berechnung der Oktaederdehnung und Oktaedergleitung nach Kapitel 2, die ein Maß für den volumetrischen und deviatorischen Anteil des Dehnungstensors darstellen. In Abhängigkeit dieser beiden Verzerrungsgrößen geben CEDOLIN/ MULAS empirische Beziehungen zur Bestimmung des Sekantenkompressionsmoduls und des Sekantenschubmoduls, die in dazugehörige Sekantenwerte des Elastizitätsmoduls  $E_{cs}$  und der Querdehnzahl  $\nu_{cs}$  umgerechnet werden können. Mit diesen Sekantengrößen ergibt sich die nichtlineare isotrope Elastizitätsbeziehung für den Bereich 2 in völliger Analogie zu Gleichung (3.7). Zur Bestimmung der Spannungsinkremente aus den Verzerrungsinkrementen müssen die tangentialen Werte des Kompressionsmoduls und des Schubmoduls verwendet werden. Diese werden durch Differentiation der Sekantengrößen nach dem aktuellen Verzerrungszustand gewonnen [22], [58].

### 3.3.4 Orthotrope elasto-plastische Stoffgesetzerweiterung

Die Berücksichtigung von plastischen Vordehnungen im Druckbereich erfolgt mit den von RAHM [101] durchgeführten Erweiterungen des nichtlinear elastischen Betonstoffgesetzes nach CEDOLIN/ MULAS [22]. Diese Erweiterung basiert auf einer orthotropen Berücksichtigung der Vorschädigung: Aus dem Dehnungstensor  $\varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle}$  eines Materialpunkts werden dessen Eigenwerte  $\varepsilon_{(\alpha)}$  bestimmt. Die zugehörigen Haupttrichtun-



gen sind gegenüber dem ursprünglichen Koordinatensystem im Allgemeinen gedreht. Die in Koordinatenrichtung abgespeicherten Druckvordehnungen  ${}^{vD}\varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle}$ , die dieser Punkt bereits erfahren hat, werden nun auf die zuvor berechneten Hauptrichtungen des Dehnungstensors  $\varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle}$  transformiert, so dass sich die Vorschädigungen in den beiden betrachteten orthogonalen Richtungen ergeben. Für jede Hauptrichtung des Dehnungstensors  $\varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle}$  erfolgt eine Auswertung der Werkstoffgesetze, wie im Bild 3.4 dargestellt ist.

$\varepsilon_{(\alpha)} > {}^{vD}\varepsilon_{(\alpha)}$  : elastische Ent-/ Wiederbelastung, orthotropes  
Gesetz bezüglich der Hauptrichtungen

$\varepsilon_{(\alpha)} < {}^{vD}\varepsilon_{(\alpha)}$  : Weiterbelastung, plastische Zuwächse, isotropes  
Gesetz nach Cedolin, Update  ${}^{vD}\varepsilon_{(\alpha)} = \varepsilon_{(\alpha)}$

Zunächst wird entschieden, ob die aktuelle Druckdehnung  $\varepsilon_{(\alpha)}$  im Verlauf der Dehnungsgeschichte bereits schon einmal überschritten worden ist. Ist dies nicht der Fall, liegt eine Ent- bzw. Wiederbelastung auf der durch die Parameter  ${}^{vD}\varepsilon_{(\alpha)}$  und  $\kappa^D$  definierten Geraden vor, ansonsten erfolgt eine Weiterbelastung auf dem ursprünglichen Gesetz, wobei in diesem Fall ein Update der Vordehnung  ${}^{vD}\varepsilon_{(\alpha)}$  durch die aktuelle Hauptdehnung  $\varepsilon_{(\alpha)}$  erfolgt, die wiederum auf die ursprüngliche Koordinatenrichtung zurück transformiert wird. Für  $\kappa^D = 0$  liegt eine Ent- oder Belastung mit der Ursprungssteifigkeit  $E_{c0}$ , für  $\kappa^D = 1$  mit der Sekantensteifigkeit  $E_{cs}$  vor. Nachdem aus den Dehnungen in beiden Hauptrichtungen die Hauptspannungen  $\sigma_{(1)}$  und  $\sigma_{(2)}$  ausgewertet worden sind, erfolgt deren Rücktransformation in die Komponenten des Spannungstensors  $\sigma_{\langle\alpha\beta\rangle}$  bezogen auf das ursprüngliche Koordinatensystem.

## 3.4 Stoffgesetze für Stahl

### 3.4.1 Allgemeines

Die wesentlichen charakteristischen Eigenschaften elasto-plastischer Werkstoffe wie Stahl können mit den folgenden Stichpunkten kurz umschrieben werden.

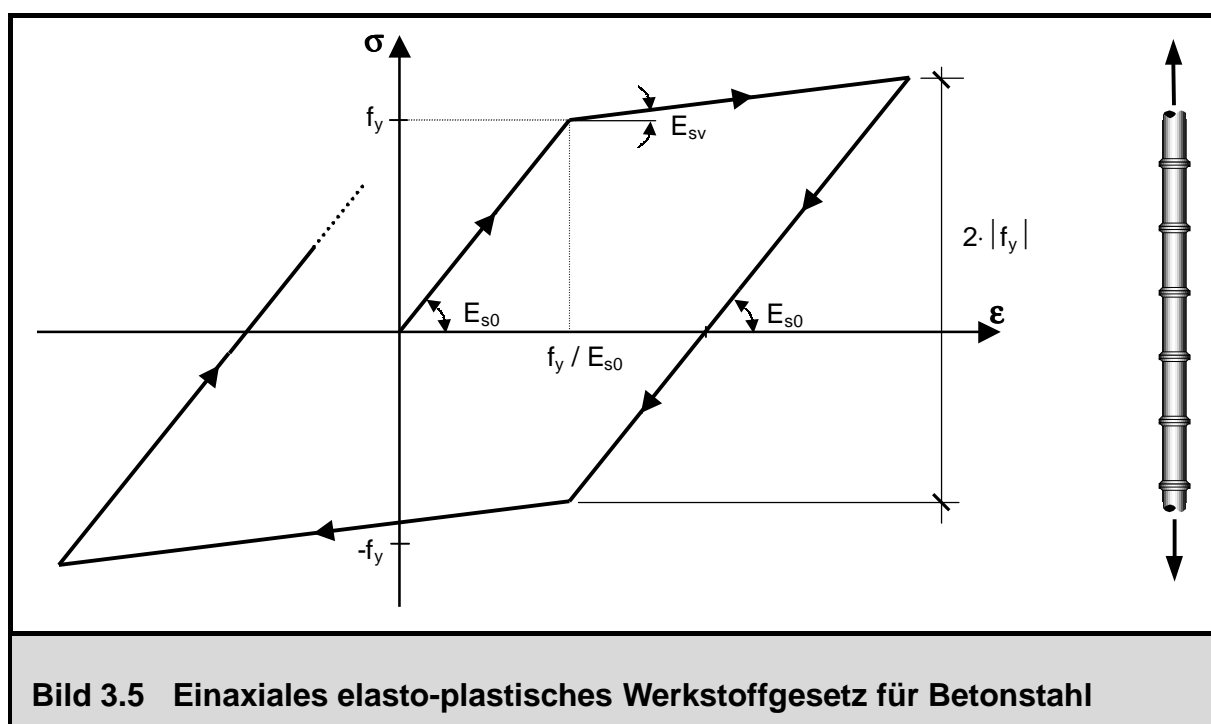
- Linear elastisches Verhalten bis zum Fließen
- Verfestigung nach Überschreitung der Streckgrenze

- BAUSCHINGER Effekt

Die Formulierung der konstitutiven Gesetze elasto-plastischer Werkstoffe für den allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustand ist in [111], [23] beschrieben. Im Rahmen eines dehnungsbasierten Vorgehens werden aus den aktuellen Gesamtdehnungen, den plastischen Vordehnungen und den Dehnungsinkrementen der neue Spannungszustand und die Zuwächse der plastischen Dehnungen berechnet. Man spricht hierbei von einem „Return-Mapping“-Algorithmus: Der gesuchte Spannungszustand wird zunächst elastisch abgeschätzt; falls sich dieser außerhalb der Fließfläche befindet und somit unzulässig ist, erfolgt eine Rückprojektion auf die Fließfläche mit einer Zunahme der plastischen Verzerrungen. Zur Beschreibung der Fließfläche als skalarwertige Funktion der Invarianten des Spannungstensors liegen verschiedene Festigkeitshypothesen vor, die auf das Konzept der Vergleichsspannung führen. Für den einaxialen Spannungszustand in einem Bewehrungsstahl lässt sich ein plastisches Werkstoffgesetz mit isotroper und kinematischer Verfestigung sehr leicht beschreiben, wie im Folgenden gezeigt wird.

### 3.4.2 Einaxiales elasto-plastisches Gesetz für Betonstahl

Die Ausbildung der Stahleinlagen von Flächentragwerken erfolgt im Allgemeinen mit orthogonalen Bewehrungsnetzen. Zur Modellierung des Werkstoffverhaltens des Betonstahls kommen aus diesem Grund einaxiale Werkstoffgesetze in Richtung der Be-



wehrungsstäbe zum Einsatz. Der Dehnungstensor  $\varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle}$  eines Materialpunkts wird auf die Richtung der eingelegten Bewehrungsstäbe transformiert. In Richtung der Bewehrungsstäbe erfolgt eine Auswertung der einaxialen Werkstoffgesetze, wobei die Spannungen im Anschluss daran wieder auf die ursprüngliche Koordinatenrichtung zurückgedreht werden.

Für zyklische Beanspruchungen ist das in Versuchen beobachtete Verhalten des Bewehrungsstahls in [64], [99] zu finden. Zu dessen idealisierter Beschreibung im Rahmen dieser Arbeit wird eine bilineare Vereinfachung des Stahlwerkstoffgesetzes verwendet, wie sie im Bild 3.5 dargestellt ist. Bis zum Erreichen der Streckgrenze  $f_y$  liegt linear elastisches Verhalten vor. Nach dem Überschreiten der Fließdehnung ist weiterhin eine Spannungssteigerung im Verfestigungsbereich, gekennzeichnet durch den Verfestigungsmodul  $E_{sv}$ , zu beobachten. Eine Entlastung aus dem Verfestigungsbereich heraus erfolgt mit dem Ursprungselastizitätsmodul  $E_{s0}$ . Das Fließen setzt nun jedoch bereits bei einer geringeren Streckgrenze ein (BAUSCHINGER Effekt). Dieser Effekt ist jedoch bei Bewehrungsstahl von untergeordneter Bedeutung, da im Allgemeinen keine gegensinnigen plastischen Verzerrungen zu erwarten sind; bei einer Stauchung des Betonstahls in den plastischen Druckbereich ist der umgebende Beton bereits zerstört [99].

Das im Bild 3.5 dargestellte Werkstoffgesetz gilt für den reinen Betonstahl ohne Verbund. Die Modellierung der Verbundwirkungen geschieht über äquivalente Betonspannungen, wie im folgenden Abschnitt dieses Kapitels erläutert wird.

## 3.5 Modellierung des Verbunds – Tension Stiffening

### 3.5.1 Phänomenologische Beschreibung

Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen soll zunächst phänomenologisch erläutert werden. Dazu wird das Werkstoffgesetz des im Bild 3.6 dargestellten Stahlbetonzugstabs näher betrachtet, das im CEB-FIP Model Code 90 [21] zu finden ist und ebenso die Grundlage der neuen DIN 1045 [33] bildet. Da von einem verschmiereten Rissmodell ausgegangen wird, wird die Stahlspannung im Riss in Abhängigkeit einer mittleren Stabdehnung als integrale Größe über gerissene und ungerissene Bereiche betrachtet. Zunächst liegt bis zum Erreichen der Betonzugfestigkeit lineares Verhalten vor. Beton und Bewehrungsstahl liegen im Verbund und erfahren somit gleiche Dehnungen über die gesamte Stablänge. Die Rissnormalkraft beim erstmaligen Erreichen der Zugfestigkeit berechnet sich nach Gleichung (3.8).



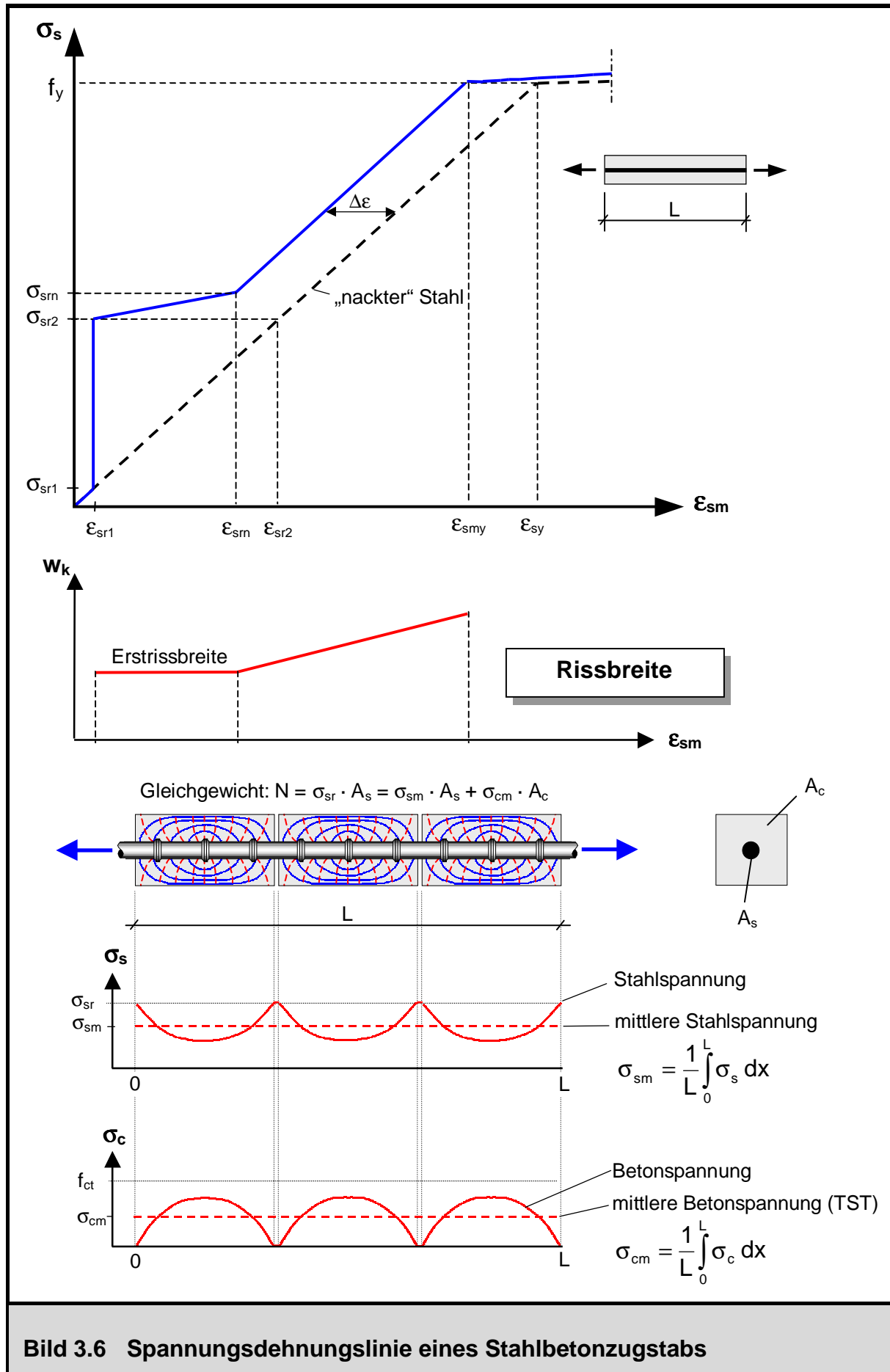


Bild 3.6 Spannungsdehnungslinie eines Stahlbetonzugstabs

Da die Zugfestigkeit einer stochastischen Streuung unterliegt, entsteht ein diskreter Riss an derjenigen Stelle mit der geringsten Querschnittszugtragfähigkeit. Im Riss selbst werden die Betonspannungen zu Null, und die Stahlspannung springt dort von  $\sigma_{sr1}$  auf  $\sigma_{sr2}$ . Die Größe der Stahlspannung im Riss lässt sich aus einer Gleichgewichtsbetrachtung zwischen einem gerissenen und ungerissenen Querschnitt nach Gleichung (3.9) bestimmen.

$$\begin{aligned} N_r &= f_{ct} \cdot [A_c - A_s] + f_{ct} \cdot \frac{E_{s0}}{E_{c0}} \cdot A_s \\ &= f_{ct} \cdot A_c \cdot \left[ 1 + \frac{A_s}{A_c} \cdot \left[ \frac{E_{s0}}{E_{c0}} - 1 \right] \right] \approx f_{ct} \cdot A_c \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\sigma_{sr2} = \frac{N_r}{A_s} = f_{ct} \cdot \left[ \frac{A_c}{A_s} + \left[ \frac{E_{s0}}{E_{c0}} - 1 \right] \right] \approx f_{ct} \cdot \frac{A_c}{A_s} \quad (3.9)$$

Durch Verbundwirkungen in unmittelbarer Umgebung des Risses werden die Spannungen aus dem Stahl in den Beton zurück geleitet, so dass in einem Abstand, der gleich der Krafterleitungslänge ist, die Betonspannung wieder die Zugfestigkeit erreicht und die Stahlspannung auf den Wert  $\sigma_{sr1} = f_{ct} \cdot E_{s0}/E_{c0}$  abgefallen ist. Im Augenblick des Reißens stellt sich direkt eine Erstrissbreite ein. Bei einer sehr geringen Lasterhöhung entsteht nun ein Folgeriss durch Überschreiten der Zugfestigkeit in einem Nachbarquerschnitt. Der Abstand zu einem bereits vorhandenen Riss ist dabei größer als die Krafterleitungslänge selbst, da erst in diesem Abstand die Zugfestigkeit im Beton wieder erreicht wird. Dieser Vorgang der erneuten Rissbildung wiederholt sich so oft, bis sich das Erstrissbild vollständig eingestellt hat. Dieses zeichnet sich durch einen Rissabstand zwischen der einfachen und der doppelten Krafterleitungslänge aus, man spricht vom abgeschlossenen Erstrissbild. Der leichte Anstieg der Spannungsdehnungslinie im Bereich der Erstrissbildung ist Folge der streuenden Zugfestigkeit. In Fällen, in denen die im Querschnitt vorhandene Bewehrung die erforderliche Mindestbewehrung unterschreitet, ist das dargestellte Werkstoffgesetz natürlich ungültig, da der Stahl mit dem Reißen des Betons direkt ins Fließen gerät oder schlimmstenfalls versagt. Die Risslast des Betonquerschnitts kann dann vom Bewehrungsstahl nicht aufgenommen werden; daher ist in diesem Spezialfall die Bezeichnung „Stahlbeton“ eigentlich unangebracht, da die eingelegte Bewehrung ihrer Aufgabe nicht nachkommen kann und somit wirkungslos ist.

Wird nun die Zugkraft über den Bereich der abgeschlossenen Erstrissbildung hinaus weiter gesteigert, so vergrößern sich die Rissbreiten und es kommt ggf. zur Bildung von Zwischenrissen, wenn zwischen zwei Rissen des abgeschlossenen Erstrissbilds die Zugfestigkeit im Beton nochmals erreicht wird. Diese Phase wird als sukzessive Rissbildung bezeichnet. Die Spannungsdehnungslinie des Betonzugstabs verläuft dort parallel zu derjenigen des nackten Stahlstabs ohne umgebenden Beton. Diese konstante Dehnungsminderung  $\Delta\varepsilon$  ist auf das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen – Tension Stiffening – zurückzuführen. Bei gleicher Stahlspannung im Riss verhält sich der einbetonierte Stab somit deutlich steifer. Aus diesem Grund wird auch das Stahlfließen im Riss bei einer mittleren Dehnung erreicht, die geringer als die Fließdehnung des nackten Stahlstabs ist.

Je stärker der Mitwirkungseffekt des Betons auf Zug zwischen den Rissen ausfällt, desto geringere Rissbreiten entstehen, die von der mittleren Stahldehnung abhängen, und desto geringere Bauteilverformungen stellen sich ein. Im Gegensatz dazu ist im Grenzzustand der Tragfähigkeit jedoch eher eine schlechte Verbundwirkung und somit schwache Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen erwünscht; nur so ist eine ausreichende Duktilität gewährleistet. Bei einer starken Mitwirkung des Betons entstehen die plastischen Stahldehnungen in sehr begrenzten lokalen Bereichen und nicht über die gesamte Stablänge, wie es idealerweise sein sollte; es tritt somit ein Versagen des einbetonierten Zugstabs bei einer mittleren Dehnung auf, die deutlich geringer als die Bruchdehnung des nackten Bewehrungsstabs ist [46]. Um diese negativen Eigenschaften der Verbundwirkungen im Grenzzustand der Tragfähigkeit zu kompensieren, ist der Verwendung hochduktiler Bewehrungsstähle, die eine ausreichende plastische Verformbarkeit aufweisen, im Stahlbetonbau Vorzug zu geben.

### 3.5.2 Konzept der äquivalenten Betonspannungen

Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen ist am Beispiel eines Stahlbetonzugstabs durch Vergleich mit einem nackten Bewehrungsstab erläutert worden. Gegenüber dessen Werkstoffverhalten führt die Berücksichtigung der versteifenden Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen zu einem modifizierten Werkstoffgesetz für den Bewehrungsstahl. Bei der numerischen Umsetzung im Rahmen einer Querschnittsdiskretisierung in einzelne Schichten wird zweckmäßigerweise eine Umrechnung des Tension Stiffening Effekts in ein Werkstoffgesetz auf Betonseite vorgenommen, was in den folgenden Vorteilen begründet liegt:

- Die zwischen den Rissen entstehenden Betonzugspannungen werden tatsächlich dem Beton zugewiesen (und nicht im Rahmen einer modifizierten Stahlkennlinie

berücksichtigt).

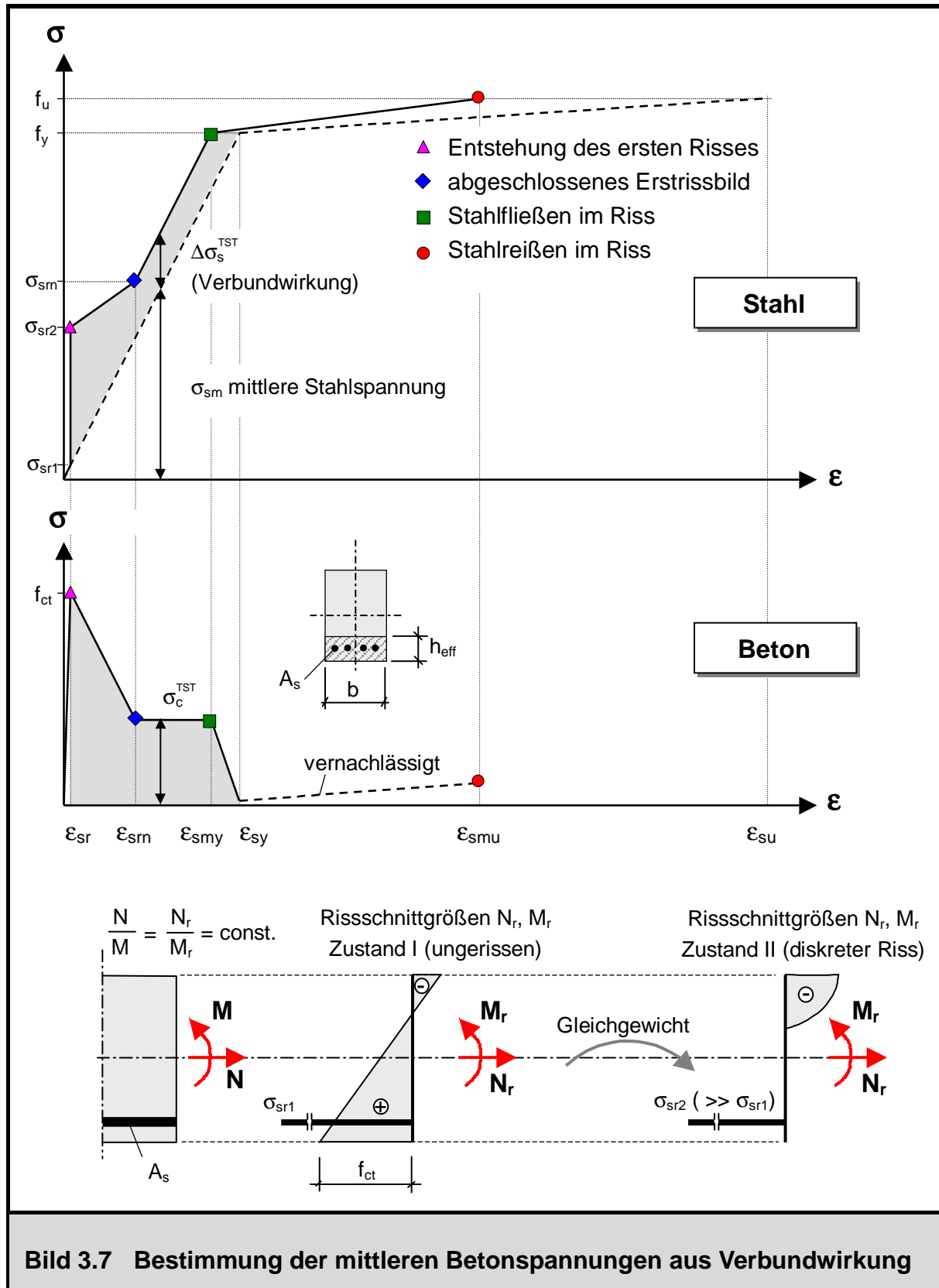
- Es wird eine klare Trennung zwischen den Werkstoffgesetzen für den Betonstahl und für den Verbund erreicht.
- Durch die Einführung einer Mitwirkungszonehöhe  $h_{\text{eff}}$ , in der die Tension Stiffening Gesetze nach dem Reißen als äquivalente Betonspannungen ausgewertet werden, werden die Konvergenzeigenschaften verbessert, da ein kompletter Schichtenausfall der Betonfasern über die gesamte Zugzonehöhe beim Reißen auf diese Art vermieden wird.
- Die Übertragung auf ein orthotropes zweiachiales Werkstoffmodell für Flächen-tragwerke mit Berücksichtigung von Ent- und Wiederbelastungsgesetzen ist mit dieser Vorgehensweise leicht möglich.

Wie bereits erläutert, erfährt bei einer vorgegebenen Stahlspannung im Riss der nackte Bewehrungsstab größere Dehnungen als ein im Verbund mit Beton liegender Bewehrungsstab. Dieser Effekt lässt sich jedoch auch von einer anderen Seite her beschreiben: Bei gleicher mittlerer Dehnung besitzt der nackte Bewehrungsstab eine geringere Spannung als der Stahlbetonstab im Riss. Daher liegt es nahe, dem Beton eine äquivalente mittlere Spannung zuzuweisen, die genau diesem Effekt Rechnung trägt. Der Umrechnungsvorgang ist im Bild 3.7 beschrieben. Die effektive Höhe der Mitwirkungszone, in der die äquivalenten mittleren Betonspannungen nach dem Reißen wirken, berechnet sich aus einer Gleichgewichtsbetrachtung unmittelbar nach dem Reißen gemäß Gleichung (3.10), wonach die Differenzzugkraft zwischen nacktem Betonstahl und im Verbund liegenden Betonstahl dem Beton zugewiesen wird. Für jeden weiteren charakteristischen Punkt des Werkstoffgesetzes des im Verbund liegenden Bewehrungsstabs wird gemäß Gleichung (3.11) über die festgelegte effektive Wirkungsfläche die zugehörige äquivalente Betonspannung bestimmt.

$$b \cdot h_{\text{eff}} \cdot f_{\text{ct}} = A_s \cdot [\sigma_{\text{sr}2} - \sigma_{\text{sr}1}] \approx A_s \cdot \sigma_{\text{sr}2}$$

$$h_{\text{eff}} = \frac{A_s \cdot [\sigma_{\text{sr}2} - \sigma_{\text{sr}1}]}{b \cdot f_{\text{ct}}} \approx \frac{A_s \cdot \sigma_{\text{sr}2}}{b \cdot f_{\text{ct}}} \quad (3.10)$$

$$\sigma_c^{\text{TST}} = \frac{\Delta \sigma_s^{\text{TST}} \cdot A_s}{b \cdot h_{\text{eff}}} \quad (3.11)$$



Mit den Gleichungen (3.10) und (3.11) können für alle markanten Punkte des im Bild 3.7 dargestellten Werkstoffgesetzes die aus dem Verbund herrührenden Differenzstahlspannungen  $\Delta\sigma_s^{TST}$  in äquivalente Betonspannungen  $\sigma_c^{TST}$  umgerechnet werden,

die in der effektiven Wirkungszone mit der Höhe  $h_{\text{eff}}$  auftreten. Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen nach Eintreten des Stahlfließens wird vernachlässigt, wie weiterhin Bild 3.7 zu entnehmen ist.

Eine zentrale Bedeutung bei der Festlegung des Tension Stiffening Gesetzes kommt der Stahlspannung im diskreten Riss  $\sigma_{\text{sr}2}$  unter der Erstrisslast zu. Diese ist abhängig vom Beanspruchungszustand im Querschnitt unmittelbar vor dem Reißen; die gesamte Betonzugkraft im ungerissenen Zustand wird nach dem Reißen auf den Bewehrungsstahl umgesetzt. So berechnet sich die Erstrissspannung für einen symmetrisch bewehrten Querschnitt (Bewehrungsmenge  $A_s$  pro Seite) unter zentrischem Zug nach Gleichung (3.12) und für einen Querschnitt unter reiner Biegung bei einem abgeschätzten inneren Hebelarm von 0,85-facher Querschnittshöhe nach Gleichung (3.13), wobei sich daraus sofort die zugehörigen effektiven Mitwirkungshöhen  $h_{\text{eff}}$  des Betons ergeben.

Zentrischer Zug:  $\sigma_{\text{sr}2} \cdot A_s \approx f_{\text{ct}} \cdot b \cdot h/2$

$$\sigma_{\text{sr}2} \approx \frac{0,5 \cdot f_{\text{ct}} \cdot b \cdot h}{A_s} \implies h_{\text{eff}} \approx \frac{A_s \cdot \sigma_{\text{sr}2}}{b \cdot f_{\text{ct}}} = \frac{h}{2} \quad (3.12)$$

Reine Biegung:  $\sigma_{\text{sr}2} \cdot A_s \cdot 0,85 h \approx f_{\text{ct}} \cdot b \cdot h/4 \cdot \frac{2}{3} h$

$$\sigma_{\text{sr}2} \approx \frac{0,2 \cdot f_{\text{ct}} \cdot b \cdot h}{A_s} \implies h_{\text{eff}} \approx \frac{A_s \cdot \sigma_{\text{sr}2}}{b \cdot f_{\text{ct}}} = \frac{h}{5} \quad (3.13)$$

Die Bestimmung der Erstrissspannung  $\sigma_{\text{sr}2}$  und der zugehörigen Mitwirkungshöhe  $h_{\text{eff}}$  ist nur in Sonderfällen bei statisch bestimmten Tragwerken direkt möglich. Für ein gegebenes M/N-Verhältnis wird diejenige Kombination  $M_r/N_r$  bei konstanter Exzentrizität herangezogen, die den Querschnitt gerade zum Reißen bringt. Im Allgemeinen müssen die Werkstoffgesetze bei dieser Vorgehensweise jedoch bereits vor der Schnittgrößenberechnung bekannt sein, da die Schnittgrößen von der Steifigkeitsverteilung im Tragwerk abhängen und die Spannungsauswertung und Integration zu Resultierenden nur mit Kenntnis der Werkstoffgesetze möglich ist. Daher wird die in [101] vorgeschlagene Vorgehensweise verwendet, bei der die Mitwirkungshöhe  $h_{\text{eff}}$  und die

zugehörige Erstrissspannung  $\sigma_{sr2}$  aus der aktuellen Druckzonenhöhe  $x$  und somit aus dem aktuellen Verzerrungszustand des Querschnitts nach Gleichung (3.14) und (3.15) abgeschätzt werden.

$$h_{\text{eff}} = \frac{h - x}{3} \leq \frac{h}{2} \quad (3.14)$$

$$\sigma_{sr2} \approx \frac{h - x}{3} \cdot \frac{b \cdot f_{ct}}{A_s} \leq \frac{h}{2} \cdot \frac{b \cdot f_{ct}}{A_s} \quad (3.15)$$

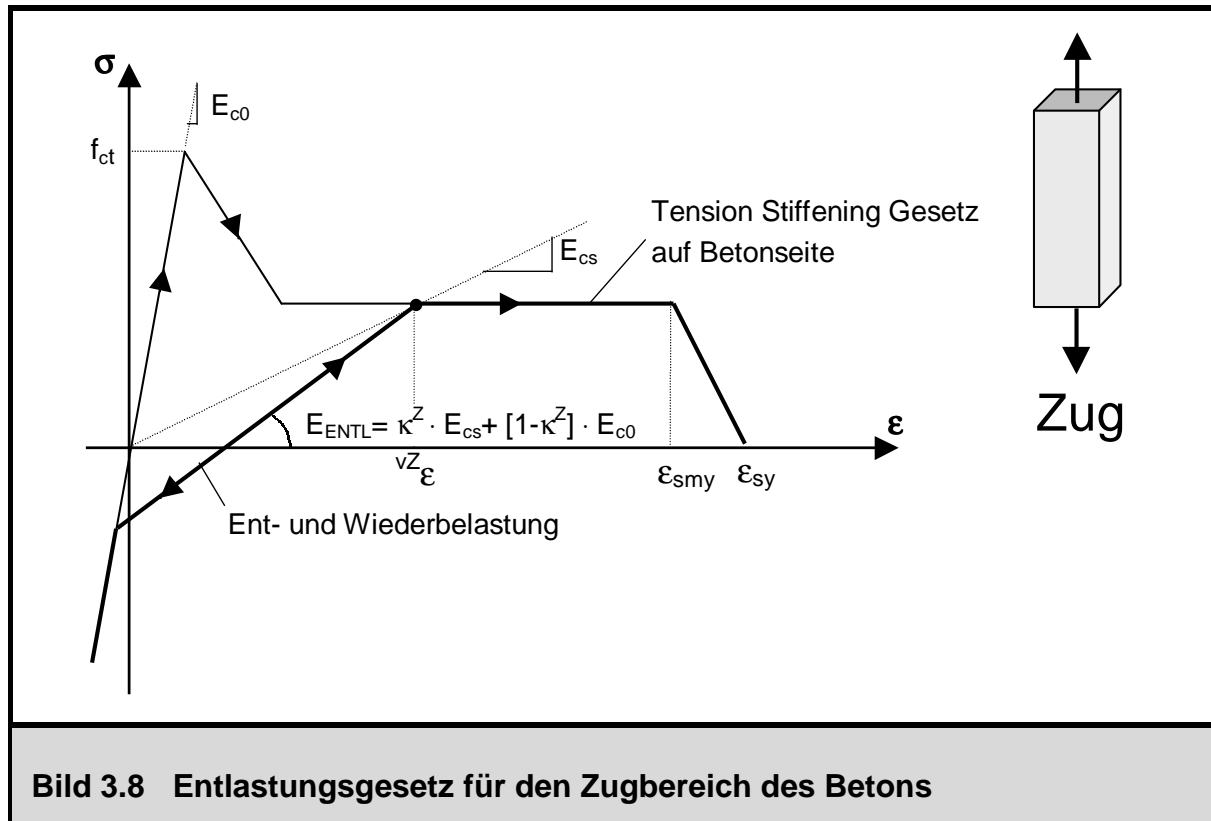
Eine Gegenüberstellung dieser Vorgehensweise mit der Ermittlung der Erstrissspannung aus dem gegebenen Schnittgrößenzustand ist in [101] durchgeführt worden und zeigt lediglich geringe Abweichungen bei Beanspruchungszuständen mit sehr kleiner Zugkraftausmitte. Aus den bereits erläuterten Gründen stellt die Bestimmung der Erstrissspannung über den Schnittgrößenzustand kein alternatives Verfahren dar und lässt sich im Gegensatz zur Abschätzung über den Verzerrungszustand des Querschnitts nur bei statisch bestimmten Tragwerken anwenden.

### 3.5.3 Entlastungsgesetz für den Beton im Zugbereich

Im Bild 3.8 ist das einaxiale Werkstoffgesetz für Beton im Zugbereich mit Ent- und Wiederbelastungspfaden dargestellt. Bis zum Erreichen seiner Zugfestigkeit verhält sich Beton linear elastisch. Nach deren Überschreitung können in den diskreten Rissen keine Zugspannungen mehr übertragen werden; das Mitwirken des Betons auf Zug zwischen den Rissen aufgrund von Verbundwirkungen führt dennoch zu mittleren Betonspannungen gemäß Bild 3.8, was bereits in den vorangehenden Abschnitten erläutert worden ist.

Die Entlastung aus dem gerissenen Bereich erfolgt als elastisches Schließen der Risse, die Wiederbelastung findet bis zur zuvor erreichten maximalen Zugdehnung  $v^Z_\epsilon$  auf dem gleichen Pfad statt. Die Rauigkeit der Rissufer beim Schließen der Risse bewirkt eine Verzahnung, so dass bei diesem Vorgang geringe bleibende Dehnungen bestehen bleiben. Bedingt durch das Zusammenpressen der Rissufer verschwinden diese beim Übergang in den Druckbereich jedoch wieder.

Diesem Sachverhalt wird bei der Formulierung des Werkstoffgesetzes durch den Entlastungsparameter  $\kappa^Z$  Rechnung getragen, der im Allgemeinen Werte zwischen 0,95 und 1,00 annimmt. Der Entlastungsmodul bei einem rein elastischen Schließen der



Risse ist gleich dem Sekantenelastizitätsmodul  $E_{cs}$ , somit beträgt der Entlastungsparameter  $\kappa^Z = 1,00$ . Dieser Sonderfall entspricht dem Entlastungsgesetz nach DOUGILL [40], [23], welches von einer idealen Rissverzahnung der beiden Rissufer beim Schließen der Risse ausgeht und aufgrund seiner Einfachheit für baupraktisch relevante Problemstellungen wie der nichtlinearen dynamischen Untersuchung von Stahlbetonscheiben in [68] vorteilhaft zum Einsatz kommt.

### 3.5.4 Zweiaxiales Werkstoffgesetz für den Verbund

Die bisher aufgezeigten Werkstoffgesetze für das Mitwirken des Betons auf Zug zwischen den Rissen gelten lediglich für den einaxialen Fall. Zur Formulierung eines zweiaxialen Werkstoffgesetzes, wie es für ebene Beanspruchungszustände in Flächentragwerken benötigt wird, werden einige Zusatzüberlegungen erforderlich: Im Rahmen dieser Arbeit kommt ein orthotropes Werkstoffmodell in Hauptdehnungsrichtung zur Beschreibung der zweiaxialen Mitwirkung des Betons auf Zug zum Einsatz. Aus dem gegebenen Dehnungszustand  $\varepsilon_{\langle\alpha\beta\rangle}$  einer Schicht werden zunächst die Hauptdehnungen  $\varepsilon_{(\alpha)}$  durch Lösen des zugehörigen Eigenwertproblems bestimmt. Deren Richtung ist gegenüber dem ursprünglichen Koordinatensystem um den Winkel  $\varphi$  gedreht. Weiterhin wird eine in diesen Hauptrichtungen wirkende effektive Bewehrung  $a_{s(\alpha)}$  bestimmt, die sich durch eine Transformation der in Koordinatenrichtung einge-



legten Bewehrungsmenge des orthogonalen Bewehrungsnetzes gemäß Gleichungen (3.16) und (3.17) ergibt [94].

$$a_{s(1)} = a_{s1} \cdot \cos^2 \varphi + a_{s2} \cdot \sin^2 \varphi \quad (3.16)$$

$$a_{s(2)} = a_{s1} \cdot \sin^2 \varphi + a_{s2} \cdot \cos^2 \varphi \quad (3.17)$$

Nach der Transformation der beiden Bewehrungsgrade lassen sich für die gerissenen Hauptrichtungen sehr leicht die beschriebenen einaxialen Verbundgesetze aufstellen und unabhängig voneinander auswerten, wobei zwischen Ent- und Wiederbelastung sowie einer Weiterbelastung auf dem ursprünglichen Gesetz in Analogie zu den bereits vorgestellten Gesetzen für den Druckbereich unterschieden werden muss. Diese Auswertung führt zu den Spannungen  $\sigma_{(\alpha)}$  in den beiden Hauptdehnungsrichtungen, die wiederum auf die ursprünglichen Koordinatenrichtungen zurück transformiert werden. Eine Rücktransformation erfolgt ebenso für die Vorschädigungsdehnungen  ${}^{vZ}\varepsilon_{(\alpha)}$ , für die bei Überschreitung ein Update erfolgt.

$$\varepsilon_{(\alpha)} < {}^{vZ}\varepsilon_{(\alpha)} : \quad \text{elastische Ent-/ Wiederbelastung } (\kappa^Z \approx 1,00) \\ \text{(Öffnen bzw. Schließen der Risse)}$$

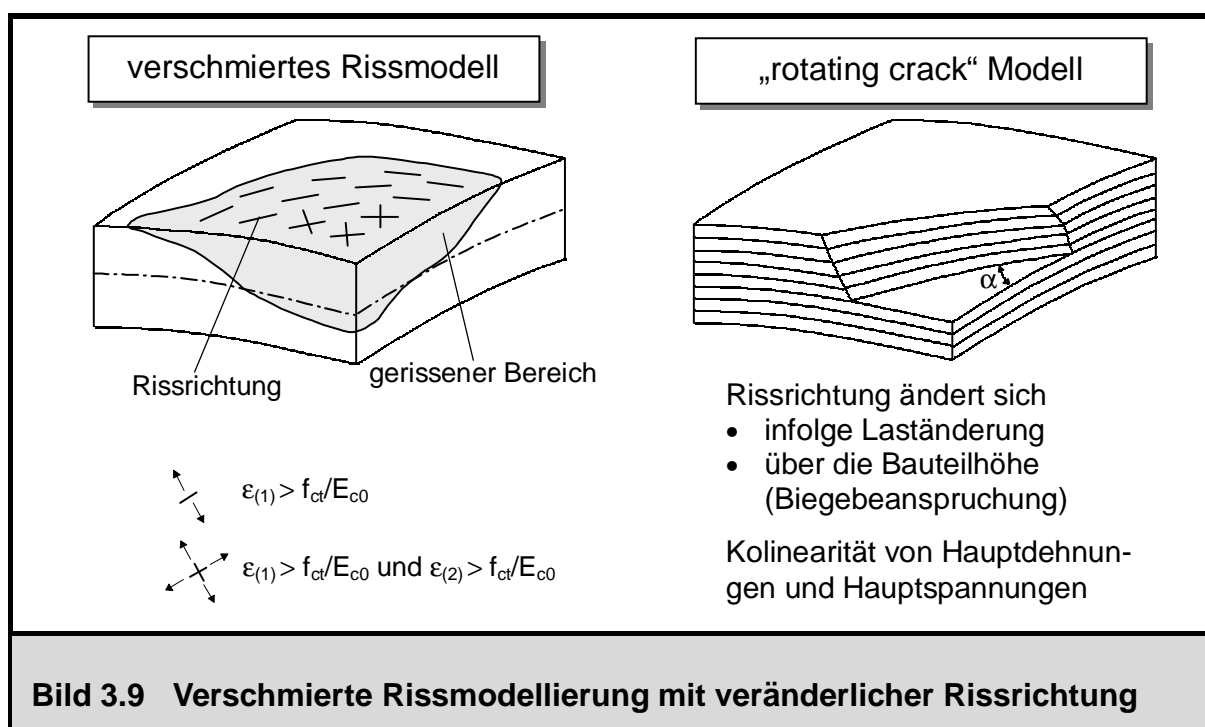
$$\varepsilon_{(\alpha)} > {}^{vZ}\varepsilon_{(\alpha)} : \quad \text{Weiterbelastung, Update } {}^{vZ}\varepsilon_{(\alpha)} = \varepsilon_{(\alpha)} \\ \text{(Anwachsen der Rissbreiten)}$$

Eine weitere Problematik bei der Formulierung der zweiaxialen Werkstoffgesetze für den Verbund besteht in der Bestimmung einer zweiaxialen mittleren Mitwirkungszonenhöhe des Betons. Hierfür wird ebenso auf das von RAHM entwickelte Näherungsverfahren zurückgegriffen, dessen Gültigkeit durch Versuchsnachrechnungen an zweiachsig gespannten Platten verifiziert worden ist. Es werden hierbei die Druckzonenhöhe und aus dieser wiederum die effektiven Mitwirkungszonenhöhen in den Hauptrichtungen der Querschnittsseite mit der maximalen Zugdehnung bestimmt; im Anschluss daran erfolgt eine gewichtete Mittelung der beiden Ergebnisse aus den orthogonalen Hauptrichtungen zu einer mittleren Mitwirkungshöhe  $h_{\text{eff}}$ . Nähere Einzelheiten dieses Verfahrens können [101] entnommen werden.

### 3.6 Einordnung des verwendeten Werkstoffmodells

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein verschmiertes Rissmodell eingesetzt. Dies hat zur Folge, dass lediglich Aussagen bezüglich gerissener Bereiche, Risstiefen, mittlerer Rissabstände und Rissbreiten gemacht werden können. Einzelne diskrete Risse können mit diesem Modell nicht abgebildet werden. Weiterhin wird von einem „rotating crack“ Modell ausgegangen. Im Gegensatz zum „fixed crack“ Modell, bei dem sich die Richtung eines Risses nach dessen Auftreten nicht mehr ändert, wird beim „rotating crack“ Modell angenommen, dass sich ein Riss bei Überschreiten der Zugfestigkeit immer senkrecht zu der aktuellen Hauptdehnungsrichtung einstellt, die sich im Allgemeinen während der Berechnung ändert, was an Scheibenversuchen beobachtet worden ist [119]. Diese Veränderlichkeit der Hauptdehnungsrichtung und damit Rissrichtung ist bei einer Biegebeanspruchung zusätzlich über die Querschnittshöhe gegeben. Außerdem wird durch Anwendung eines „rotating crack“ Modells im Gegensatz zum „fixed crack“ Modell die problematische Ermittlung eines Schubübertragungskoeffizienten vermieden [29]. Ferner bleibt auch auf den Ent- und Wiederbelastungspfaden durch die Transformation der Vorschädigungen auf die aktuellen Hauptrichtungen des Dehnungstensors die Koaxialität zwischen Hauptdehnungen und Hauptspannungen erhalten, was die grundlegende Annahme des „rotating crack“ Modells ausmacht.

Im Übrigen unterliegt das vorgestellte Werkstoffmodell für Beton mit Berücksichtigung von plastischen Vordehnungen einer finiten Formulierung; die gegenüber einer infiniten Formulierung entstehenden Fehler sind bei gewöhnlichen Anwendungsfällen



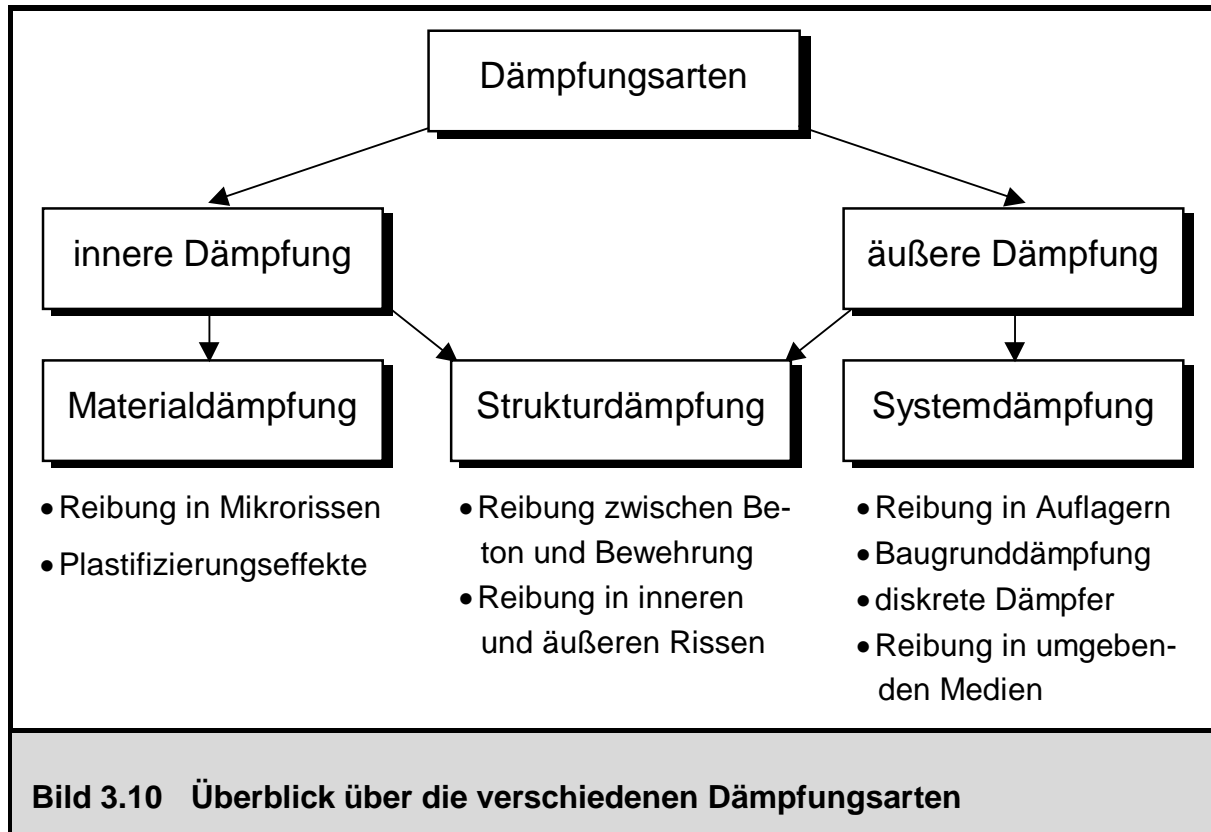
verschwindend gering [49], zumal in den im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Anwendungsbeispielen kein ausgeprägtes zweiaxiales Druckverhalten des Betons auftritt. Hystereseschleifen werden bei Ent- und Wiederbelastungsprozessen des Betons gemäß Bild 3.4 vernachlässigt; stattdessen erfolgt eine Entlastung mit der Ursprungsteifigkeit, was bei stark bewehrten Betondruckzonen (symmetrische Bewehrungsanordnung) eine ausreichende Näherung darstellt [113]. Die Dissipation wird mit vereinfachten Ansätzen nach Abschnitt 3.7 erfasst. Die wesentlichste Eigenschaft des nichtlinearen Materialverhaltens von Stahlbeton besteht im Aufreißen bei geringen Beanspruchungen. Aus diesem Grund wird der Modellierung des zweiaxialen Riss- und Nachrissverhaltens mit Ent- und Wiederbelastung im Rahmen eines „rotating crack“ Modells besondere Bedeutung zugemessen. Zu dessen Beschreibung wird auf das von RAHM [101] weiter entwickelte orthotrope Werkstoffmodell für den Nachrissbereich zurückgegriffen, bei dem eine konsistente Umrechnung der einaxialen Werkstoffgesetze von Stahlbetonzugstäben auf äquivalente mittlere Betonzugspannungen nach dem Reißen unter wirklichkeitsnaher Erfassung der Erstrissspannungen in den orthotropen Hauptrichtungen erfolgt.

## 3.7 Übersicht über die Dämpfungsarten

### 3.7.1 Allgemeines

Streng genommen ist gemäß der Übersicht nach Bild 3.10, die [18] entnommen worden ist, die Behandlung der Dämpfung im Kapitel der Werkstoffgesetze nicht ganz korrekt, da die Materialdämpfung als innere Dämpfung nur einen Teilaspekt aller Erscheinungsformen von Dämpfung darstellt. Prinzipiell muss zwischen innerer und äußerer Dämpfung unterschieden werden: Als Materialdämpfung von Stahlbeton sind insbesondere die Reibung in den Mikrorissen sowie Plastifizierungseffekte anzuführen. Die Strukturdämpfung lässt sich nicht eindeutig der inneren oder äußeren Dämpfung zuordnen. Als Beispiel für diese ist die Reibung zwischen Beton und Bewehrungsstäben sowie die Reibung in den inneren und äußeren Rissen des Betons zu nennen. Äußere Dämpfungseffekte werden z.B. durch Reibung in Auflagern, durch den Baugrund oder auch diskrete Dämpferelemente hervorgerufen. Ein wesentlicher Unterschied zwischen der inneren und äußeren Dämpfung besteht in deren unterschiedlichen Erfassung im Rahmen von strukturmechanischen Problemstellungen und deren numerischen Behandlung, wie in den folgenden Abschnitten erläutert wird.

Innere Dämpfungseffekte entstehen in erster Linie durch Energiedissipation des Materials infolge innerer Reibung oder Hystereseschleifen bei Ent- und Wiederbelastung.



Sie werden innerhalb des Systems der Grundgleichungen nach Bild 2.6 bei den konstitutiven Beziehungen berücksichtigt. Im Fall von viskoser Dämpfung liefert somit das Werkstoffgesetz aus den aktuellen Dehnungen und Dehnungsgeschwindigkeiten die Spannungen. Dies hat ebenso Auswirkungen bei der numerischen Umsetzung im Rahmen eines inkrementell iterativen FE-Konzeptes (siehe Kapitel 5): Die innere Dämpfung geht direkt über die Auswertung des Werkstoffgesetzes in die inneren Knotenkräfte ein und kann im allgemeinen Fall nicht als Einzelbeitrag bestimmt werden. Ferner ergibt sich formal durch Differentiation der aktuellen Spannungen nach den aktuellen Verzerrungsgeschwindigkeiten ein tangentialer Materialoperator, der zum Aufbau der tangentialen Dämpfungsmatrix aus innerer Dämpfung benötigt wird, die die linearisierte Änderung der inneren Knotenkräfte infolge Geschwindigkeitsinkrementen angibt. In der Literatur konnte jedoch keine Veröffentlichung gefunden werden, die solch ein geschlossenes und dennoch für größere Simulationen praktikabel anwendbares Dämpfungsmodell für Stahlbeton bereitstellt. Die beschriebenen Ausführungen zum Anteil der inneren Dämpfung und die Herleitung der entsprechenden Elementmatrizen im Kapitel 5 sind somit aufgrund fehlender geeigneter Materialmodelle für Stahlbeton zur Berücksichtigung innerer Dissipation im Rahmen dieser Arbeit eher von formaler Seite aus zu betrachten.

Die Ursachen der äußeren Dämpfungseffekte sind im Wesentlichen in der Reibung der Struktur in einem umgebenden Medium (z.B. STOKESsche Flüssigkeitsreibung

oder Luftreibung) oder in diskreten Dämpferelementen, zu denen auch der Baugrund gerechnet werden kann, zu suchen. Die auf die Oberfläche der Struktur wirkenden äußeren Dämpfungskräfte, deren Größe im Allgemeinen vereinfachend proportional zur Bewegungsgeschwindigkeit angesetzt wird, sind nach Bild 2.6 unter den Spannungsrandbedingungen einzuordnen. Im Rahmen einer numerischen Umsetzung mittels einer inkrementell iterativen FE-Formulierung gehen die äußeren Dämpfungskräfte des aktuellen Geschwindigkeitszustands in den Vektor der äußeren Dämpfungskräfte ein. Dessen partielle Ableitungen nach den Geschwindigkeiten führt zur Dämpfungsmatrix infolge äußerer Dämpfung, die somit die Veränderung der äußeren Dämpfungskräfte infolge Geschwindigkeitsinkrementen ausdrückt (siehe Kapitel 5). Auch für die äußere Dämpfung ist es, abgesehen von diskreten Dämpferelementen mit bekannten Dämpfungseigenschaften, im Allgemeinen sehr schwer, die Eingangsparameter der viskosen Dämpfungsmatrix anzugeben.

### 3.7.2 LEHRsches Dämpfungsmaß

Da die Angabe geeigneter Dämpfungsparameter, die zum Aufbau des Vektors der inneren Knotenkräfte (innere Dämpfung) und des Vektors der äußeren Dämpfungskräfte sowie der Dämpfungsmatrizen infolge innerer und äußerer Tragwerksdissipation erforderlich sind, im Allgemeinen nicht möglich ist, muss auf vereinfachte, ingenieurmäßige Ansätze zur Erfassung der Dämpfung zurückgegriffen werden. Dazu werden viskose Dämpfungsansätze herangezogen. Die Dämpfung wird in den allermeisten Anwendungsfällen als Fraktilwert der kritischen Dämpfung (LEHRsches Dämpfungsmaß [83]) eines Einmassenschwingers berücksichtigt. Dieses Dämpfungsmaß beinhaltet zugleich innere und äußere Dämpfungseffekte und kann sehr leicht in Ausschwingversuchen ermittelt werden. Die kritische Dämpfung  $c_{\text{krit}}$  eines Einmassenschwingers mit der Masse  $m$ , Steifigkeit  $k$ , Eigenkreisfrequenz  $\omega = \sqrt{k/m}$  und der homogenen Bewegungsdifferentialgleichung (3.18) berechnet sich nach Gleichung (3.19).

$$k \cdot v + c \cdot \dot{v} + m \cdot \ddot{v} = 0 \quad (3.18)$$

$$c_{\text{krit}} = 2 \sqrt{m \cdot k} \quad (3.19)$$

Ab diesem kritischen Dämpfungswert findet keine Schwingung mehr statt; das System kehrt bei einer Auslenkung direkt in seine statische Ruhelage zurück (aperiodi-

Konstruktionsart	$\xi_{\max}$
Stahlbetonbalken	6,2 %
Stahlbetonrahmen	4,6 %
Stahlbetonrippendecken	4,5 %
Stahlbetonplattenbalkendecken	6,2 %
Stahlbetonpilzdecken	8,9 %
Stahlbetonfertigteildecken vor Fugenverguss	1,9 %
Stahlbetonfertigteildecken nach Fugenverguss	4,5 %
Stahlbetongeschossbau	4,1 %
Spannbetonbrücken	2,5 %
Stahlbetonskelettbau mit Mauerwerksausfachung	2,4 %

**Tabelle 3.2 LEHRsche Dämpfungsmaße für Stahlbetontragwerke nach [123]**

sche Bewegung für  $c > c_{\text{krit}}$ ; aperiodischer Grenzfall für  $c = c_{\text{krit}}$ ). Für Dämpfungen, die geringer als die kritische Dämpfung sind, erfolgt bei einer Auslenkung hingegen eine Schwingung (gedämpfte Schwingung für  $c < c_{\text{krit}}$ ; ungedämpfte Schwingung für  $c = 0$ ). Im Übrigen besitzt die Differentialgleichung (3.18) für die verschiedenen Dämpfungsbereiche ein unterschiedliches Lösungsverhalten. Das LEHRsche Dämpfungsmaß beschreibt somit gemäß Gleichung (3.20) das Verhältnis aus vorhandener zu kritischer Dämpfung.

$$\xi = \frac{c}{2 \sqrt{m \cdot k}} \quad \text{oder} \quad c = 2 \xi \omega m \quad (3.20)$$

Dieses Dämpfungsmaß lässt sich experimentell relativ einfach im Ausschwingversuch bestimmen. Dazu wird ein Tragwerk ausgelenkt und seine freie gedämpfte Schwingung aufgezeichnet. Aus dem Amplitudenverhältnis zweier aufeinander folgender Perioden ergibt sich das logarithmische Dämpfungsdekrement und somit durch einige Umformungen auch das LEHRsche Dämpfungsmaß, welches für baupraktisch relevante Fälle zwischen 0% und 10% der kritischen Dämpfung liegt. WERNER [123] gibt eine umfangreiche Sammlung von Dämpfungsmaßen für die verschiedensten Konstruktionsarten an, von denen ein Auszug für einige Stahlbetonsysteme in Tabelle 3.2 wiedergegeben ist, die sich allesamt in dem erwähnten Intervall bewegen. Aus den angegebenen Werten geht hervor, dass gerissene Stahlbetontragwerke eine deutlich stärkere Dissipation aufgrund der Reibung in den Rissen besitzen als ungeschädigte. Die Werte nach Tabelle 3.2 sind allerdings reine Dämpfungswerte des Stahlbetons; Dämpfungseinflüsse des Bodens sind hierbei noch nicht enthalten.

Ferner seien an dieser Stelle noch die Aussagen der Vorschriften bezüglich anzusetzender Dämpfungsmaße speziell für die dynamische Berechnung von Rotationsschalen aus Stahlbeton zusammengestellt. Teil 3 des Eurocode 8 [39], der insbesondere für die Auslegung von Türmen, Masten und Schornsteinen gegen Erdbeben gilt, erlaubt die Verwendung einer pauschalen Dämpfung von 5%, falls keine genaueren Werte vorliegen. Nach KTA 2201 [79] Teil 3, die die Auslegung von Kernkraftwerken gegen seismische Einwirkungen regelt, darf das Dämpfungsmaß für Stahlbetonbauteile mit 7% angenommen werden. Dieser Wert ist im Einklang mit den Angaben der entsprechenden amerikanischen Vorschrift (Regulatory Guide 1.61 [117]). Die derzeit gültige Fassung der BTR [120] sieht für Kühlturmschalen aus Stahlbeton lediglich einen Wert von 2% vor, der allerdings in deren Neufassung, die sich im Augenblick in Bearbeitung befindet, auf 5% angehoben werden soll. Das pauschale Dämpfungsmaß von 5% für diese Art von Rotationsschalentragsystemen ist auch in diversen numerischen Untersuchungen in der Literatur zu finden [3], [20].

Die Berücksichtigung der Dissipation über das LEHRsche Dämpfungsmaß hat wie bereits erläutert zum einen den Vorteil, dass dieser Fraktilwert der kritischen Dämpfung in Versuchen relativ einfach bestimmt werden kann und sich für baupraktische Problemstellungen in klar definierten Schranken bewegt. Zum anderen besteht ein weiterer Vorteil darin, dass das LEHRsche Dämpfungsmaß einen direkten Eingangsparameter für die dynamische Berechnung nach dem Verfahren der modalen Analyse (siehe Kapitel 6) darstellt. Bei diesem Verfahren wird die Dämpfung für jede äquivalente Einmassenschwingergleichung des entkoppelten Schwingungsdifferentialgleichungssystems als LEHRsches Dämpfungsmaß berücksichtigt, so dass der Aufbau einer allgemeinen viskosen Systemdämpfungsmatrix nicht erforderlich wird. Verschiedene Eigenformen können darüber hinaus leicht mit unterschiedlichen Dämpfungsmaßen behaftet werden. So partizipieren oftmals niedrigere Eigenformen an der Gesamtschwingung, bei denen sich das Gesamttragwerk als Starrkörper auf elastischer Stützung (Boden, Stützenfachwerk) bewegt. Nach EC 8 Teil 3 [39] ergeben sich für die Energiedissipation im Boden Dämpfungsmaße in der Größenordnung von 10% bis 20%, die für solche Eigenformen unter Umständen bei genauer Kenntnis der Dämpfungsverhältnisse des Baugrunds angesetzt werden können.

### 3.7.3 RAYLEIGH Dämpfung

Für die Lösung dynamischer Problemstellungen mit direkten Zeitintegrationsverfahren (d.h. ohne modale Entkopplung) ist die Kenntnis einer viskosen Dämpfungsmatrix  $\underline{C}$  erforderlich. Der Dämpfungsansatz nach RAYLEIGH [6], [89] stellt die Dämpfungsmatrix als Linearkombination aus Massenmatrix und Steifigkeitsmatrix gemäß Gleichung

(3.21) dar.

$$\underline{C} = \alpha_M \cdot \underline{M} + \alpha_K \cdot \underline{K} \quad (3.21)$$

Zur Festlegung der RAYLEIGH Dämpfungsparameter  $\alpha_M$  und  $\alpha_K$  werden demnach zwei Bestimmungsgleichungen benötigt. Diese können aus den LEHRschen Dämpfungsmaßen für zwei Tragwerkseigenschwingformen unter Ausnutzen der Beziehung (3.20) gewonnen werden. Somit ergibt sich das gesuchte Gleichungssystem (3.22), aus dem die Parameter  $\alpha_M$  und  $\alpha_K$  ermittelt werden können.

$$\alpha_M + \alpha_K \cdot ({}_1\omega)^2 = 2 \cdot {}_1\xi \cdot {}_1\omega \quad (3.22)$$

$$\alpha_M + \alpha_K \cdot ({}_2\omega)^2 = 2 \cdot {}_2\xi \cdot {}_2\omega$$

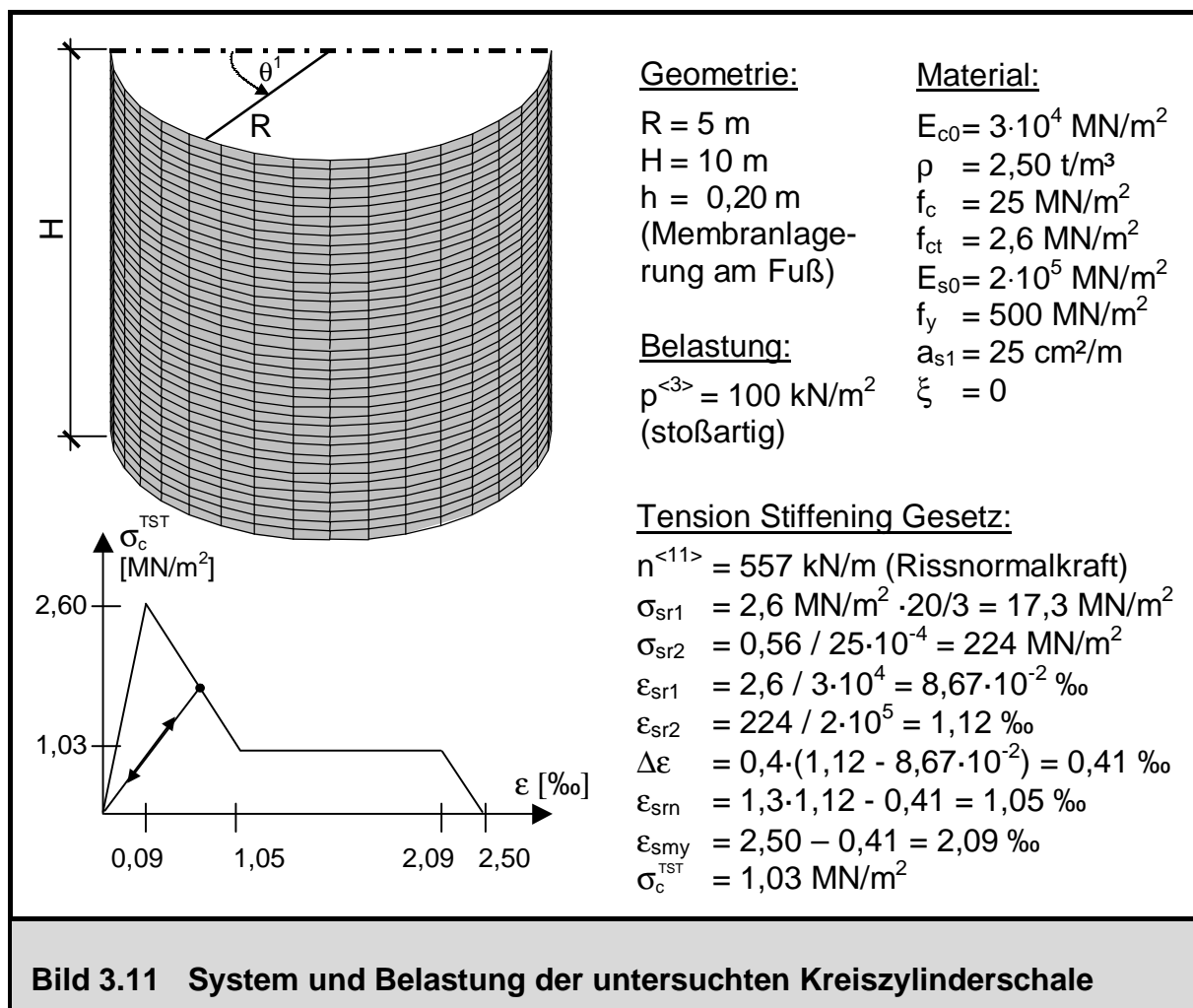
Falls modale Dämpfungsmaße für mehr als zwei Eigenformen vorliegen, ist das Gleichungssystem (3.22) überbestimmt. Möglichkeiten bestehen dann in der Festlegung einer Ausgleichsgeraden, wie von BATHE [6] gezeigt wird, oder in der Verwendung eines vollständigen modalen Dämpfungsansatzes nach [89]. Die Abschätzung der RAYLEIGH Dämpfungsparameter  $\alpha_M$  und  $\alpha_K$  über die ersten beiden maßgebenden Tragwerkseigenfrequenzen nach Gleichung (3.22) liefert für die durchgeführten numerischen Untersuchungen im Kapitel 7 jedoch ausreichend genaue Ergebnisse. Bei der Berechnung von Strukturen mit bereichsweise stark unterschiedlichen Eigenschaften (z.B. starke Dämpfung des Bodens oder Anordnung von diskreten Dämpferelementen) wird es jedoch zweckmäßig sein, den verschiedenen Tragwerksbereichen unterschiedliche RAYLEIGH Dämpfungsparameter zuzuordnen. Dies führt zu einer nichtproportionalen Dämpfung. Bei einer Rückrechnung von dieser nichtproportionalen Dämpfungsmatrix auf LEHRsche Dämpfungsmaße (modale Dämpfungsmaße von generalisierten Einmassenschwingergleichungen), wird die modale Entkopplung gemäß Gleichung (6.33) jedoch nicht gelingen und stellt somit nur eine Näherung dar [6]. Abschließend soll zu den Ausführungen zur Dämpfung noch das Zitat von OTTL aus [98] wiedergegeben werden, das die Problematik der Dämpfungsbestimmung sehr gut zusammenfassend umschreibt: „Eine umfassende und trotzdem für den Praktiker anwendbare mathematische Beschreibung der Dämpfung gibt es derzeit nur für die lineare Viskoelastizität.“



## 3.8 Anwendungsbeispiel

### 3.8.1 System und Belastung

Im Rahmen eines einfachen Anwendungsbeispiels soll die programmtechnische Umsetzung der vorgestellten Werkstoffgesetze und dabei insbesondere die Modellierung des Nachrissbereiches des Betons überprüft werden. Besonderer Wert wird dabei darauf gelegt, dass die Ergebnisse und die sich einstellenden nichtlinearen Effekte mittels vereinfachten Betrachtungen und Abschätzungen überprüft werden können. Das System ist mit seinen Materialkennwerten im Bild 3.11 dargestellt. Es wird eine am Fuß membrangelagerte Kreiszylinderschale mit der Höhe  $H = 10$  m, dem Radius  $R = 5$  m und der Schalenwanddicke  $h = 0,2$  m untersucht. Senkrecht zur Schalenmittelfläche wird schlagartig eine Belastung von  $p^{<3>} = 100$  kN/m<sup>2</sup> aufgebracht. Die statische Lösung für die Ringkraft ergibt sich aus der Kesselformel zu  $n^{<11>} = 500$  kN/m; bei der linearen dynamischen Lösung für den gegebenen Belastungszeitverlauf tritt eine dynamische Überhöhung um das Doppelte gegenüber der statischen Lösung auf,



**Bild 3.11 System und Belastung der untersuchten Kreiszylinderschale**

so dass beim ungedämpften Schwingungsvorgang eine maximale Ringzugkraft von  $n^{<11>} = 1000 \text{ kN/m}$  erreicht wird. Die gewählte Ringbewehrung von  $a_{s1} = 25 \text{ cm}^2/\text{m}$  reicht aus, um diese maximale Ringzugkraft aufzunehmen, ohne dabei ins Fließen zu geraten. Weiterhin reißt der Beton in Ringrichtung auf, da die Rissnormalkraft von  $557 \text{ kN/m}$  geringfügig größer als die statische Lösung ist und durch die auftretenden Ringkräfte der linearen dynamischen Lösung deutlich überschritten wird. Durch das Reißen treten einige interessante nichtlineare Effekte auf, die nun im Folgenden diskutiert und erläutert werden.

### 3.8.2 Eigenfrequenzen des ungeschädigten Systems

Die einzige Bewegungsmöglichkeit des beschriebenen Systems mit der Membranlagerung am unteren Schalenrand unter dem rotationssymmetrischen Innendruck besteht in einer radialen Dehnschwingung, bei der die Schale sich periodisch aufweitet und wieder zusammenzieht. Alle Punkte der Schalenmittelfläche erfahren gleiche Radialverformungen, es liegt somit keine Veränderlichkeit in Ring- und Meridianrichtung vor. Mit der Kenntnis dieser Eigenschwingform können nach der RAYLEIGHschen Methode [26] die zugehörige generalisierte Masse und Steifigkeit gemäß Gleichung (3.23) und (3.24) berechnet werden, aus denen sich wiederum die Eigenfrequenz bzw. Periode des Systems nach Gleichung (3.25) bestimmt.

$$k = \frac{E h}{R^2} \cdot 2 \pi R H \quad (3.23)$$

$$m = \rho h \cdot 2 \pi R H \quad (3.24)$$

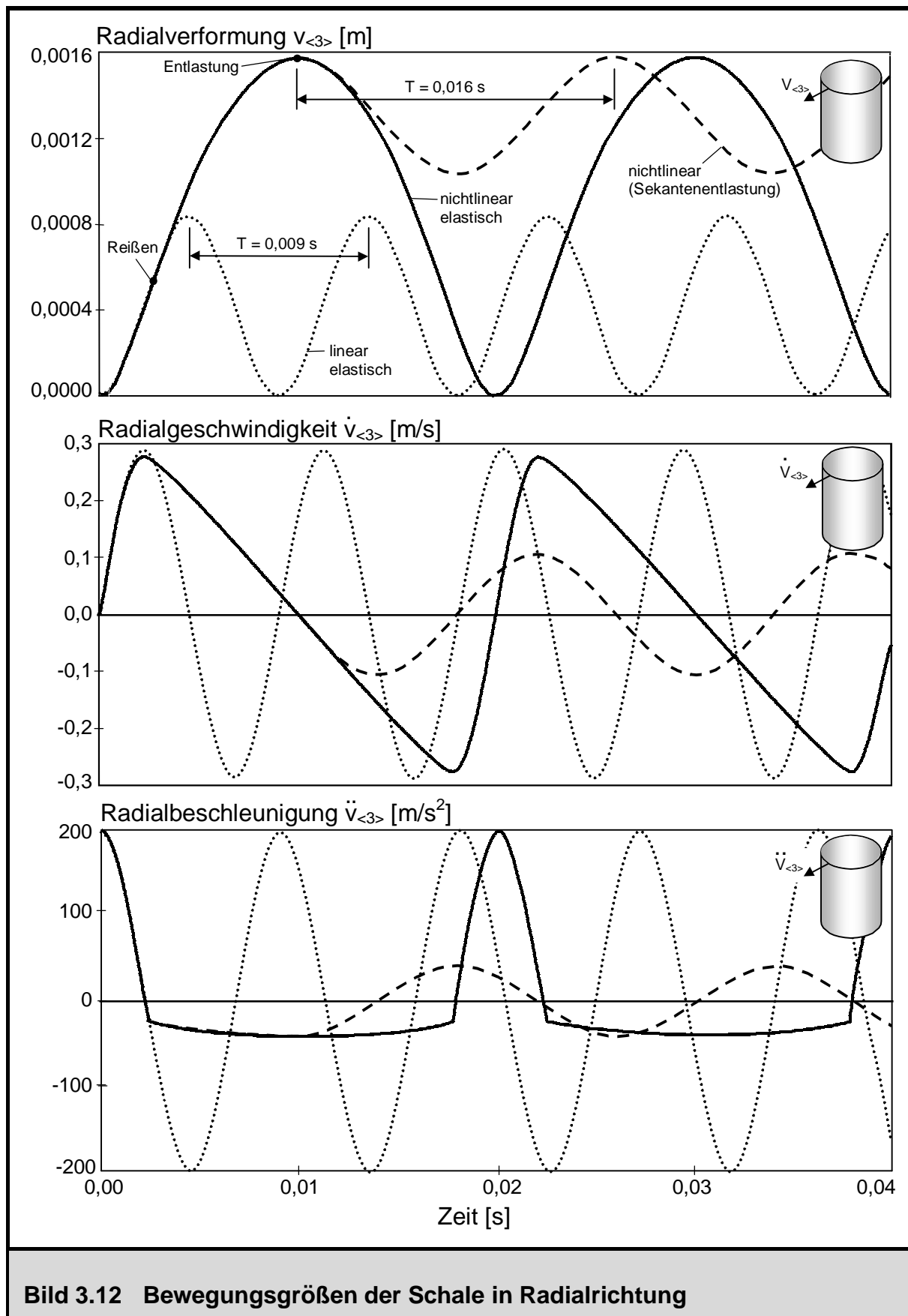
$$f = \frac{1}{2 \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2 \pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{R^2 \cdot \rho}} = 110 \frac{1}{\text{s}} \quad T = \frac{1}{f} = 0,009 \text{ s} \quad (3.25)$$

Die wesentliche Einflussgröße auf die Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung stellt der Elastizitätsmodul dar; die restlichen Größen aus Gleichung (3.25) sind für das betrachtete System konstant. Durch eine Verminderung der Steifigkeit wie z.B. durch das Reißen des Betons wird sich die Eigenfrequenz verringern, was im nächsten Abschnitt an den Antwortschwingungen unter Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität gezeigt wird.

### 3.8.3 Zeitverläufe der Antwortgrößen

Im Bild 3.12 sind die Schwingungsantworten der Kreiszylinderschale auf den stoßartig aufgebrachten Innendruck dargestellt. Die lineare dynamische Lösung für die Radialverformung  $v_{<3>}$  ist eine harmonische Schwingung um die statische Lösung von  $p^{<3>} \cdot R^2 / (E \cdot h) = 0,42 \text{ mm}$ , so dass sich ein Maximalausschlag von 0,84 mm gerade als das Zweifache der statischen Lösung einstellt. Die Radialgeschwindigkeiten und Radialbeschleunigungen lassen sich aus der ersten bzw. der zweiten Zeitableitung des Verformungsverlaufs bestimmen. Die zugehörige maximale Ringdehnung der linearen Lösung beträgt somit  $\alpha_{<11>} = 0,168 \text{ ‰}$  und überschreitet die Rissdehnung von 0,087 ‰ deutlich.

Aus diesem Grund werden weiterführende Untersuchungen durchgeführt, die das Aufreißen des Betons berücksichtigen. Der Verbund zwischen Beton und Bewehrungsstahl nach dem Reißen wird über äquivalente mittlere Betonzugspannungen gemäß dem Tension Stiffening Gesetz aus Bild 3.11 modelliert. Dabei wird zum einen ein nicht-linear elastisches Gesetz verwendet, bei dem Belastung, Entlastung und Wiederbelastung alle auf dem gleichen Pfad erfolgen; im Vergleich hierzu wird zum anderen eine Ent- bzw. Wiederbelastung direkt zum Ursprung gemäß des Gesetzes nach DOUGILL berücksichtigt, um das Öffnen und Schließen der Risse abzubilden. Das Reißen der ungeschädigten Kreiszylinderschale erfolgt erstmals zum Zeitpunkt  $t = 0,0024 \text{ s}$ , wie insbesondere an den Knicken der nichtlinear berechneten Beschleunigungsverläufe aus Bild 3.12 und der Ringkräfte aus Bild 3.13 hervorgeht. Bis zum Erreichen der Risschnittgröße verlaufen alle drei Lösungen gleich. Das Reißen selbst ist mit einem starken Steifigkeitsabfall verbunden, so dass die Rückstellkräfte, die der Bewegung entgegen wirken, reduziert werden. Gegenüber der linearen dynamischen Lösung treten deshalb deutlich größere Radialverformungen mit dem Maximalwert von 1,6 mm auf. Nach dem Reißen verlaufen die beiden nichtlinearen Lösungen bis zum ersten Maximum auf einem gemeinsamen Pfad weiter. Ab dem Zeitpunkt  $t = 0,01 \text{ s}$  erfolgt eine Entlastung. Die Lösung nach der nichtlinearen Elastizitätstheorie schwingt auf demselben Pfad wie bei der Belastung zurück, bis zum Zeitpunkt  $t = 0,02 \text{ s}$  der Ausgangszustand erreicht ist und eine neue Periode beginnt. Mit dem Erreichen der Maximalverformung bei  $t = 0,01 \text{ s}$  entfernen sich nun mit dem ersten Entlastungsvorgang die beiden nichtlinearen Lösungen voneinander, da sie einen unterschiedlichen Ent- und Wiederbelastungspfad durchlaufen. Unter Berücksichtigung der maximal erreichten Vordehnung von  $v^z_{\varepsilon} = 1,6/5000 = 0,32 \text{ ‰}$  findet jetzt die Ent- und Wiederbelastung als Sekante auf einem Pfad direkt zum Ursprung statt, wie im Tension Stiffening Gesetz im Bild 3.11 eingetragen ist. Ab diesem Zeitpunkt erfolgt bei der Ent- und Wiederbelastung wieder eine harmonische Schwingung um die statische Lösung  $v_{<3>} = 0,42 \text{ mm}$ , allerdings mit größerer Periode bedingt durch den Steifigkeitsabfall. Die Entlastungssteifigkeit kann



gemäß Gleichung (3.26) aus der maximal erreichten Vordehnung errechnet werden, aus der sich wiederum die Periodendauer der harmonischen Schwingung des vorgeschädigten Systems gemäß Gleichung (3.27) ergibt. Dieser Wert stimmt im Übrigen sehr gut mit der Periodenlänge überein, die den Bildern 3.12 und 3.13 entnommen werden kann. Die Periodenlänge nimmt durch den Steifigkeitsabfall gegenüber derjenigen des ungeschädigten Systems somit um ca. 78% zu.

$$\sigma_c^{\text{TST}} = 1,03 + \frac{2,60 - 1,03}{1,05 - 0,09} \cdot [1,05 - 0,32] = 2,22 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_s = 200 \cdot 0,32 = 64 \text{ MN/m}^2$$

$$E_{cs} = \frac{\sigma_c^{\text{TST}} \cdot [h - a_s] + \sigma_s \cdot a_s}{h \cdot \nu^2 \varepsilon} = 9350,8 \text{ MN/m}^2 = 0,31 \cdot E_{c0} \quad (3.26)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{0,935 \cdot 10^7}{5^2 \cdot 2,5}} = 61,6 \frac{1}{s} \quad T = \frac{1}{f} = 0,016 \text{ s} \quad (3.27)$$

Weiterhin sind im Bild 3.13 die Verläufe der Ringkraft  $n^{<11>}$  über der Zeit aufgetragen. Bis zur Rissnormalkraft von 557 kN/m zum Zeitpunkt  $t = 0,0024 \text{ s}$  verlaufen alle drei

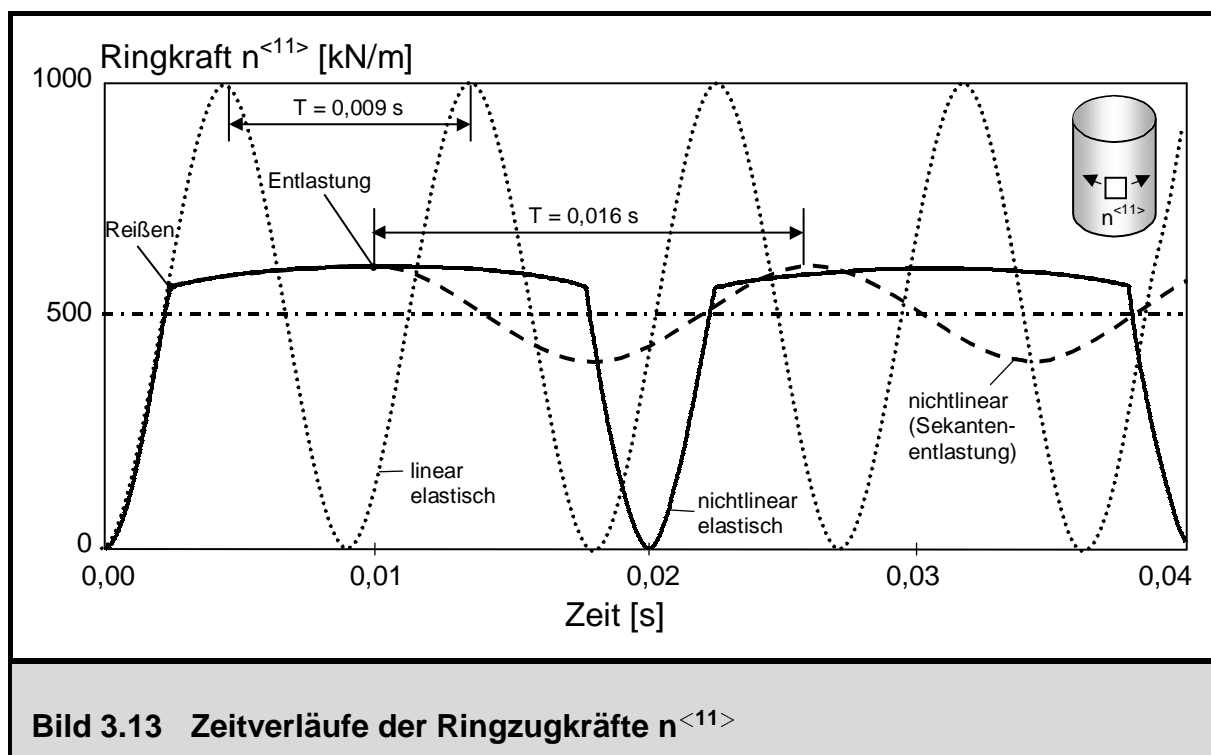


Bild 3.13 Zeitverläufe der Ringzugkräfte  $n^{<11>}$

dargestellten Lösungen identisch. Die lineare dynamische Lösung schwingt um die statische Lösung von 500 kN/m und erreicht maximale Ausschläge von 1000 kN/m. Das Aufreißen führt wie bereits erläutert zu einem Steifigkeitsverlust und zu dem Knick im Normalkraftverlauf bei Erreichen der Risslast. Beide nichtlineare Lösungen verlaufen nun gemeinsam bis zum Erreichen der maximalen Normalkraft von 603 kN/m weiter. Beim Entlastungsvorgang läuft die nichtlinear elastische Lösung auf dem gleichen Pfad wieder zurück, und der Vorgang wiederholt sich nach der Zeit  $t = 0,02$  s. Bei einer Berücksichtigung der Dehnungsvorgeschichte mit Ent- und Wiederbelastung als Sekantenpfad zum Ursprung stellt sich ab dem Zeitpunkt  $t = 0,01$  s eine harmonische Schwingung um die statische Lösung von 500 kN/m mit der Periodendauer von  $T = 0,016$  s, dem Maximalausschlag von 603 kN/m und somit einer Schwingungsamplitude von 103 kN/m ein. Dynamisches Gleichgewicht ist für jede der gezeigten Lösungen erfüllt und kann nach Gleichung (3.28) im gesamten Zeitbereich für sämtliche Wertepaare  $\ddot{v}_{<3>}$  und  $n^{<11>}$  überprüft werden.

$$p^{<3>} = \rho \cdot h \cdot \ddot{v}_{<3>} + \frac{n^{<11>}}{R} \quad (3.28)$$

Zusammenfassend sollen nochmals die wichtigsten Erkenntnisse dieses Anwendungsbeispiels festgehalten werden:

- Die Extrema der linearen dynamischen Lösung für die Verformungen und die Ringkräfte sind für diesen speziellen Belastungszeitverlauf gleich der doppelten statischen Lösung.
- Durch das Reißen wird der Bewegungsvorgang erheblich gestört und die maximalen Ringkräfte reduzieren sich um ca. 40%. Dieser nichtlineare Effekt kann bei einer iterativen Bewehrungsdimensionierung ausgenutzt werden.
- Die nichtlineare elastische Lösung wie auch die nichtlineare Lösung mit Berücksichtigung der Dehnungsvorgeschichte (Sekantenentlastung zum Ursprung) liefern die gleichen maximalen Ringkräfte.
- Erst mit Beginn der ersten Entlastung laufen die beiden nichtlinearen Lösungen auseinander, wobei sich bei der Lösung mit Berücksichtigung der Dehnungsvorgeschichte wieder eine harmonische Schwingung um die statische Lösung, allerdings im Vergleich zur linearen Lösung mit deutlich geringerer Amplitude, einstellt (linear:  $\Delta n^{<11>} = \pm 500$  kN/m; nichtlinear mit Sekantenentlastung:  $\Delta n^{<11>} = \pm 103$  kN/m).

Die erläuterten nichtlinearen Effekte, insbesondere die Reduktion der Ringkräfte im dynamischen Fall, hängen sehr stark vom Zeitpunkt des Reißens und damit von der

Größe der Zugfestigkeit ab. Bei der statischen Lösung tritt eine vergleichbare Reduktion für dieses System infolge Reißens nicht ein, da die Membranlösung statisch bestimmt ist und aufgrund der Rotationssymmetrie auch keine Umlagerungsmöglichkeiten vorhanden sind. Im dynamischen Fall spielen in der Gleichgewichtsbeziehung gemäß Gleichung (3.28) jedoch neben den Ringkräften auch Trägheitskräfte (und im Allgemeinen auch Dämpfungskräfte) eine Rolle, die im Wechselspiel miteinander stehen. Zur Klärung des Effekts der Reduktion der Ringkräfte im nichtlinear dynamischen Fall und der Abhängigkeit von der Zugfestigkeit soll weiterhin ein stark vereinfachtes Modell für das vorgestellte Anwendungsbeispiel im nächsten Abschnitt betrachtet werden.

### 3.8.4 Vereinfachte Überprüfung der nichtlinearen Effekte

Zur Verifizierung der erläuterten nichtlinearen Effekte, die bei dem Anwendungsbeispiel der Kreiszyinderschale im Abschnitt 3.8 durch das Reißen des Stahlbetons aufgetreten sind, soll der im Bild 3.14 dargestellte Einmassenschwinger betrachtet werden. Dessen Systemeigenschaften lassen sich durch seine Masse  $m = 5 \text{ t}$  und seine Ursprungsfedersteifigkeit  $k_0 = 10 \text{ kN/m}$  beschreiben. Es liegt ein elasto-plastisches Werkstoffgesetz vor; nach Überschreiten der Federkraft  $P_0$ , die im Folgenden variabel gehalten wird, erfolgt ein Übergang in den Verfestigungsbereich mit der Steifigkeit  $k_v = 1 \text{ kN/m}$ . Auf das System wird eine Kraft von  $P = 10 \text{ kN}$  stoßartig aufgebracht, so dass sich für den linear elastischen Fall wieder eine dynamische Überhöhung vom Zweifachen gegenüber der statischen Lösung für die Federkraft ergibt. Aus diesen Angaben lassen sich für die beiden Grenzfälle  $P_0 \geq 20 \text{ kN}$  und  $P_0 = 0 \text{ kN}$  die zugehörigen Eigenperioden nach Gleichung (3.29) und (3.30) errechnen.

$$P_0 \geq 20 \text{ kN} : \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{0,5} = 4,44 \text{ s} \quad (3.29)$$

$$P_0 = 0 \text{ kN} : \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{5} = 14,05 \text{ s} \quad (3.30)$$

Mittels inkrementell iterativer dynamischer Berechnung (siehe Kapitel 6) werden wiederum die Verformung, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Masse sowie die Federkraft im Zeitverlauf als Antwort auf die stoßartige Lastaufbringung berechnet. Im Bild 3.14 sind die Zeitverläufe der Federkraft in Abhängigkeit der Größe  $P_0$  dargestellt, die restlichen Bewegungsgrößen sollen im Folgenden nicht weiter von Interesse sein. Mit dieser Untersuchung soll herausgefunden werden, wie sich die Größe  $P_0$  (Fließgrenze der Feder) auf die nichtlineare Lösung und insbesondere auf die maximal in

der Feder hervorgerufene Kraft auswirkt. Daher ist der Fließbeginn von  $P_0 = 20$  kN in Schritten von  $\Delta P_0 = 5$  kN bis auf  $P_0 = 0$  kN verändert worden. Als Federgesetz sind dabei drei verschiedene Varianten untersucht worden:

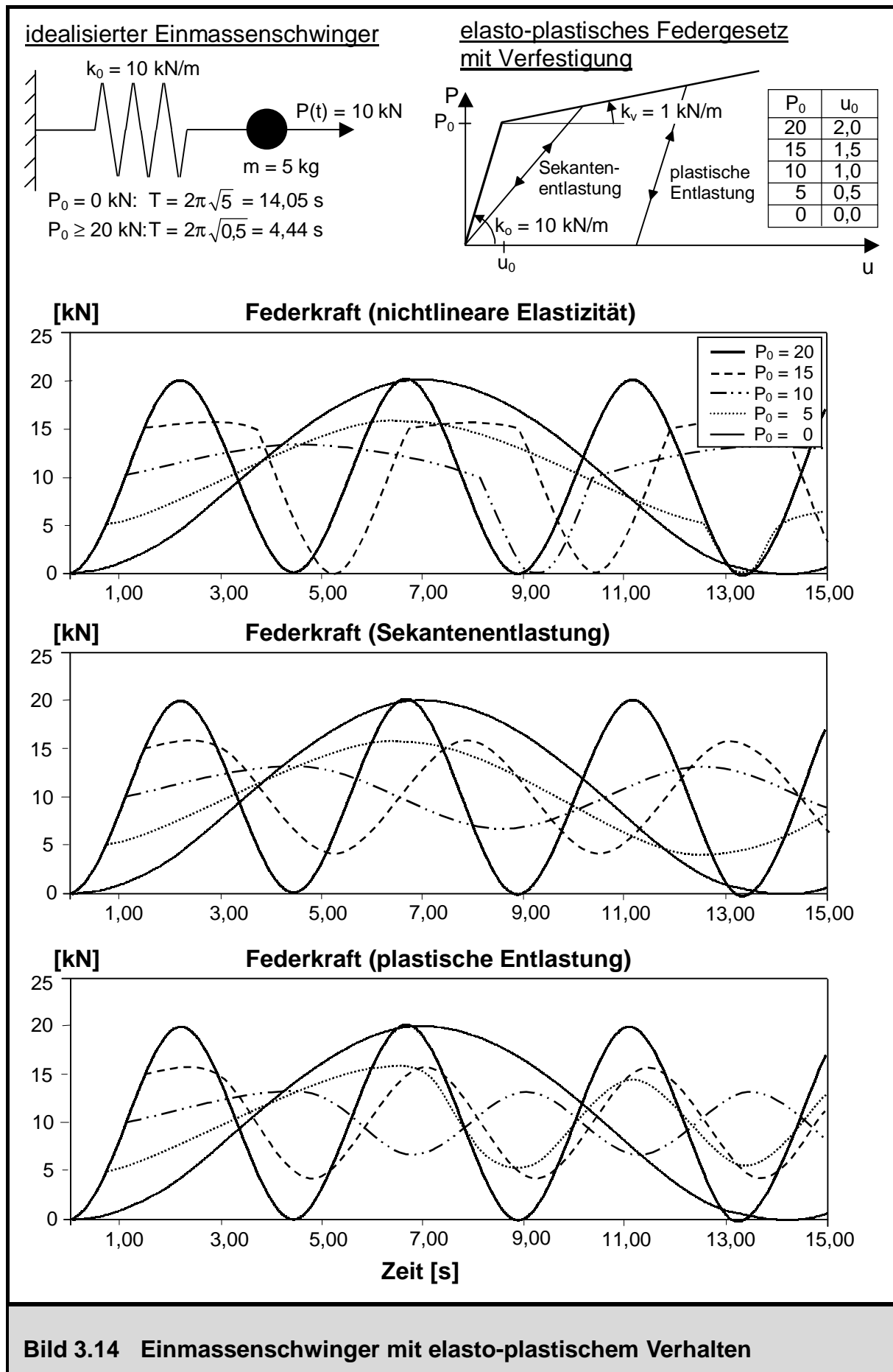
- a) ein von der Vorgeschichte unabhängiges, nichtlinear elastisches Federgesetz, bei dem sowohl die Erstbelastung als auch alle Ent- und Wiederbelastungen auf dem gleichen ursprünglichen Pfad erfolgen,
- b) ein nichtlineares Federgesetz mit Berücksichtigung der Belastungsvorgeschichte, bei dem eine Ent- und Wiederbelastung auf einem Sekantenpfad direkt zum Ursprung erfolgt,
- c) ein nichtlineares Federgesetz mit Berücksichtigung der Belastungsvorgeschichte, bei dem eine Ent- und Wiederbelastung auf einem Pfad parallel zur Ursprungssteifigkeit mit bleibenden plastischen Anteilen erfolgt, wie es bei metallischen Werkstoffen der Fall ist.

Für den Fall  $P_0 = 20$  kN ist die dynamische Lösung trivial. Aufgrund der Höhe der Fließlast  $P_0$  wird der Fließbereich nie durchlaufen, deswegen wirkt sich die Art der Entlastung auf die Lösung auch nicht aus. Der Verlauf der Federkraft beschreibt eine harmonische Schwingung um die statische Lösung von 10 kN mit der doppelten Amplitude, so dass als maximale Federkraft der doppelte Wert von 20 kN erreicht wird. Die Schwingung findet dabei mit einer Periodendauer von  $T = 4,44$  s gemäß Gleichung (3.29) statt.

Ein ähnlicher Sonderfall liegt für den unteren Grenzwert von  $P_0 = 0$  kN vor. Hier wird sofort der Verfestigungsbereich durchlaufen; die Belastung sowie alle Ent- und Wiederbelastungen erfolgen auf diesem Pfad mit der Verfestigungssteifigkeit  $k_v = 1$  kN/m. Deswegen sind auch hier keine Unterschiede in den Lösungen mit unterschiedlichen Entlastungsansätzen zu finden. Es stellt sich wiederum eine harmonische Schwingung um die statische Lösung ein, wobei ein Maximalwert vom Doppelten der statischen Lösung erreicht wird. Aufgrund der reduzierten Steifigkeit verlängert sich jedoch die Periodendauer einer Schwingung deutlich. Diese kann nach Gleichung (3.30) zu  $T = 14,05$  s berechnet werden.

Bei einer Wahl von  $P_0 = 15$  kN laufen die Lösungen für die drei beschriebenen Varianten zunächst alle auf dem linear elastischen Pfad bis zu dieser Fließlast. Von diesem Punkt an beginnt die Verfestigung; die drei Lösungen durchlaufen alle den gleichen Verfestigungspfad und erreichen die maximale Lösung für die Federkraft von 15,7 kN zum Zeitpunkt  $t = 2,6$  s. Ab diesem Zeitpunkt findet eine Entlastung statt, die nun für die drei betrachteten Varianten auf unterschiedlichem Wege erfolgt. Bei dem nichtlinear





elastischen Gesetz ohne Berücksichtigung der Vorgeschichte wird der gleiche Pfad wie bei der Belastung durchlaufen, was an der Symmetrie des Federkraftverlaufs ersichtlich ist. Zum Zeitpunkt  $t = 5,2$  s wird wieder die Ausgangslage erreicht, und der Vorgang beginnt von Neuem. Bei einer Sekantenentlastung direkt zum Ursprung hin stellt sich mit Erreichen der maximalen Federkraft ab  $t = 2,6$  s eine harmonische Schwingung um die statische Lösung ein. Die Sekantenentlastungssteifigkeit berechnet sich aus dem Quotient von maximaler Kraft und zugehörigem Weg zu  $k_{ENTL} = 15,7/2,2 = 7,13$  kN/m, aus der sich die Periodenlänge der Schwingung zu  $T = 5,26$  s ergibt. Analog erfolgt im Fall der plastischen Entlastung mit der Ursprungssteifigkeit ab diesem Punkt ebenso eine harmonische Schwingung, diesmal allerdings mit der Periodenlänge  $T = 4,44$  s.

Geht das Werkstoffgesetz der Feder schon bei einer Federkraft von  $P_0 = 10$  kN in den Verfestigungsbereich über, so wird bis zum Erreichen dieser Last in der Feder ( $t = 1,12$  s) der linear elastische Pfad durchlaufen. Nach Überschreiten der Fließgrenze erfolgt bis zum Zeitpunkt  $t = 4,62$  s und dem Erreichen der maximalen Federkraft von 13,2 kN eine Verfestigung. Ab hier laufen die drei dargestellten Lösungen wieder auseinander: Die elastische Entlastung erfolgt auf demselben Pfad wie die Belastung, ab einer Zeit von 9,24 s beginnt der geschilderte Vorgang von Neuem. Die Entlastung zum Ursprung hin für den Fall b) erfolgt mit einer Sekantensteifigkeit von  $k_{ENTL} = 3,14$  kN/m ( $= 13,2/4,2$ ), die zugehörige Periodendauer berechnet sich demnach zu  $T = 7,93$  s. Es stellt sich eine harmonische Schwingung um die statische Lösung für die Federkraft mit der Amplitude von 3,2 kN ein. Ähnlich ist der Fall auch bei plastischer Ent- und Wiederbelastung mit der Ursprungssteifigkeit. Für diese stellt sich eine harmonische Schwingung nach dem Zeitpunkt  $t = 4,62$  s um die statische Lösung mit der gleichen Amplitude ein, allerdings mit der Periodendauer des ungeschädigten Systems von  $T = 4,44$  s.

Wird die elastische Grenzlast der Feder weiter auf 5 kN reduziert, so wird diese Grenzlast im Schwingungsvorgang bei einer Zeit von  $t = 0,75$  s erreicht. Ab diesem Zeitpunkt wird der Verfestigungspfad zum ersten Mal durchlaufen, der zur Zeit  $t = 6,64$  s mit der maximalen Federkraft von 15,7 kN endet. Von dort an erfolgt eine Entlastung. Bei Verwendung eines elastischen Werkstoffgesetzes ohne Berücksichtigung der Vorgeschichte wird der gleiche Pfad wie bei der Belastung durchlaufen; der Ausgangszustand stellt sich zur Zeit  $t = 13,28$  s ein, ab dem sich der gleiche Vorgang elastisch wiederholt. Die Ursprungsentlastung erfolgt mit einer Sekantensteifigkeit von  $k_{ENTL} = 15,7/11,2 = 1,40$  kN/m. Folglich liegt ab dem Zeitpunkt  $t = 6,64$  s eine harmonische Schwingung um die statische Lösung mit der Amplitude 5,7 kN und der Periodendauer  $T = 11,87$  s vor. Die plastische Entlastung mit der Ursprungsvariante c) erfolgt ebenso zum Zeitpunkt  $t = 6,64$  s mit dem ersten Erreichen der maximalen Federkraft und endet zum Zeitpunkt  $t = 8,36$  s bei der Federkraft 5,7 kN. Im Anschluss daran wird der gegenseitige Verfestigungsbereich bis zum Zeitpunkt  $t = 8,96$  s durchlaufen, ab

dem wieder eine elastische Belastung erfolgt und sich eine harmonische Schwingung um die statische Lösung mit der Schwingungsamplitude von 4,5 kN und Periodendauer  $T = 4,44$  s einstellt. Es fällt auf, dass für den Fall der plastischen Entlastung die Schwingungsamplitude geringer ausfällt als für den Fall der Sekantenentlastung, da nochmals der gegensinnige plastische Bereich durchlaufen wird. Der Maximalwert der Federkraft, der zum Zeitpunkt  $t = 6,64$  s am Ende der ersten Belastungsphase bereits erreicht wird, ist jedoch für alle drei Varianten des nichtlinearen Stoffgesetzes gleich.

Die wesentlichen Ergebnisse und Erkenntnisse dieses Anwendungsbeispiels werden im Folgenden nochmals kurz zusammengefasst. Sie können im Übrigen direkt auf das Beispiel der Kreiszylinderschale aus Abschnitt 3.8 übertragen werden, da diese ebenso als Einmassenschwinger betrachtet werden kann und durch das Reißen des Stahlbetons ein ähnlicher Effekt der Steifigkeitsreduktion wie bei dem gewählten elasto-plastischen Werkstoffgesetz dieses Abschnitts vorliegt.

- Die Grenzfälle für die Fließlasten  $P_0 \geq 20$  kN und  $P_0 = 0$  kN werden in dem betrachteten Anwendungsbeispiel richtig erfasst und können mittels Handrechnung verifiziert werden. Für diese erfolgt eine harmonische Schwingung um die statische Lösung mit deren Amplitude, allerdings mit unterschiedlicher Periodendauer in Abhängigkeit der Steifigkeit, so dass sich die maximale Federkraft als Zweifaches der statischen Lösung einstellt.
- Die minimale Antwort der Federkraft von 13,2 kN in der nichtlinearen Lösung liefert das Werkstoffgesetz mit der Fließgrenze von  $P_0 = 10$  kN, die dynamische Überhöhung beträgt daher nur das 1,32 fache der statischen Lösung. Die Federkraftreduktion infolge nichtlinearen Verhaltens ergibt sich aus dem Quotient aus nichtlinearer dynamischer Lösung und linearer dynamischer Lösung zu 0,66 ( $= 13,2/20,0$ ). Für Fließgrenzen von  $P_0 = 5$  kN oder  $P_0 = 15$  kN liegen gleiche Maximalwerte der Federkräfte vor, es stellt sich eine dynamische Überhöhung von 1,57 und eine Federkraftreduktion von 0,79 ( $= 15,7/20$ ) gegenüber der linearen dynamischen Lösung ein. Für Fließgrenzen von  $P_0 \geq 20$  kN oder  $P_0 = 0$  kN wird der Maximalwert der linearen Lösung erreicht; somit liegt ein dynamischer Lastfaktor von 2,00 ohne Reduktion vor. Die Größe der dynamischen Antwort der Federkraft bei nichtlinearem Federgesetz ist somit maßgeblich vom Zeitpunkt des Übergangs in den Verfestigungsbereich (oder Zeitpunkt des Reißens) gekennzeichnet. Ein Minimum der Lösung für die Federkraft wird für eine Fließgrenze von  $P_0 = 10$  kN gefunden, die gleich der statischen Lösung des Problems ist.
- Alle drei Stoffgesetzvarianten – a) nichtlinear elastisches Stoffgesetz, b) nichtlineares Stoffgesetz mit Ent- und Wiederbelastung auf dem Sekantenpfad zum Ursprung sowie c) nichtlineares Stoffgesetz mit plastischer Ent- und Wiederbelastung – liefern für die gleiche Fließgrenze  $P_0$  den gleichen Maximalwert der

Federkraft. Mit der ersten Entlastung laufen die Lösungen gemäß der Definition des Werkstoffgesetzes auseinander.

- Die Varianten b) mit Sekantenentlastung und c) mit plastischer Entlastung liefern ab der ersten Entlastung harmonische Schwingungen um die statische Lösung (Sonderfall für  $P_0 = 5 \text{ kN}$ , dort beginnt im Fall c) die harmonische Schwingung aufgrund gegensinniger plastischer Verfestigung wie bereits erläutert später).
- Falls die maximal von der Feder aufnehmbare Kraft kleiner als die statische Lösung ist, kann keine Schwingung mehr erfolgen und kein statischer Zustand als Grenzwert einer gedämpften Schwingung aufgefunden werden.

## Kapitel 4

# Grundgleichungen einer nichtlinearen Flächentragwerkstheorie

### 4.1 Annahmen und Voraussetzungen

Im Hinblick auf eine spätere numerische Umsetzung und eine Überführung in ein Finite-Elemente Konzept, basierend auf inkrementellen Lösungsalgorithmen, sollen in diesem Kapitel die Grundlagen einer nichtlinearen Flächentragwerkstheorie zusammengestellt werden. Dies erfolgt mit Hilfe einer tensoriellen Indexschreibweise, die auf den Darstellungen nach BAŞAR und KRÄTZIG [5] basiert. Diese Grundlagen werden an späterer Stelle bei der Herleitung eines finiten Schalenringelements benötigt werden, das auf der Forschungsarbeit von ECKSTEIN et al. [42] aufbaut und im Rahmen der vorliegenden Arbeit um die nichtlinearen Elementmatrizen mit Implementierung im Programmsystem ROSHE [130] erweitert worden ist. Ähnliche Stadien wurden bei der Entwicklung der Elementfamilie NACS (Nonlinear Arbitrary Curved Shell Elements) durchlaufen, die von HARTE [61] und ECKSTEIN [41] entwickelt und von GROTE [58] im Programmsystem ROSHE3 [128] um die physikalische Nichtlinearität erweitert worden ist.

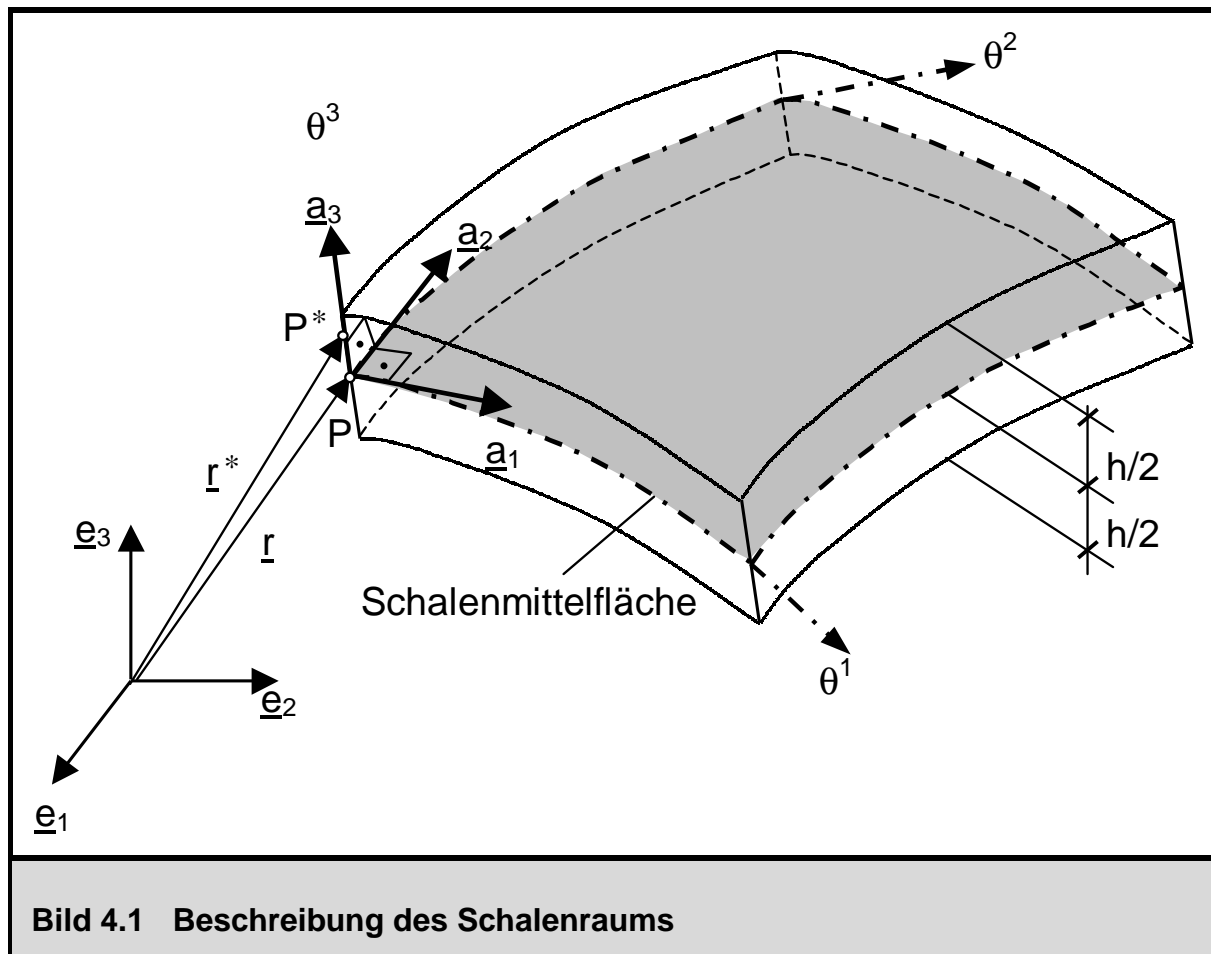
Nachfolgend aufgeführte Annahmen werden bei der Herleitung der geometrisch und physikalisch nichtlinearen Schalentheorie getroffen:

- Es werden nur Schalenmittelflächen mit orthogonalen Basisvektoren betrachtet.
- Die KIRCHHOFF-LOVE Hypothese [84] ist gültig. Nach der Deformation steht der Schalendirektor weiterhin senkrecht auf der Schalenmittelfläche, Schubverzerrungen werden somit vernachlässigt.

- Die Abmessung der Schalenwanddicke ist klein gegenüber den charakteristischen Abmessungen der Schale (Dünne-Hypothese).
- Es wird ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt, somit treten per Definition keine Normalspannungen in Dickenrichtung der Schale auf.
- Die Dehnungen werden als linear verteilt über die Schalenwanddicke angesehen. Temperaturdehnungen sowie Dehnungen aus dem Langzeitverhalten des Betons (Schwinden, Kriechen, hygrische Effekte) bleiben unberücksichtigt.
- Sämtliche Belastungen sind konservativ, demnach also nicht von den Verformungen abhängig. Dynamische Lasten werden über skalare Last-Zeitfunktionen berücksichtigt.
- Die Formulierungen und Herleitungen sind unabhängig von spezifischen Werkstoffgesetzen, kleine Verzerrungen vorausgesetzt. Als Werkstoffgesetze werden die im Kapitel 3 vorgestellten Stoffgesetze für Stahlbeton eingesetzt, wahlweise nichtlinear elastisch oder nichtlinear mit Berücksichtigung der Dehnungsgeschichte im Rahmen eines orthotropen Vorschädigungsmodells.
- Es werden nur kleine Rotationen zugelassen. Nichtlineare Verzerrungsanteile finden sich lediglich im Verzerrungstensor der Schalenmittelfläche. Die Verzerrungen werden ebenfalls als klein vorausgesetzt (JACOBI Determinante  $J = 1$ ).
- Die Änderung der Metrik bei der Verformung in Bezug auf die Schnittgrößen wird vernachlässigt, so dass die Unterscheidung zwischen CAUCHY Spannungen und PIOLA-KIRCHHOFF Spannungen entfällt und diese gleichgesetzt werden können [58], [66].

## 4.2 Differentialgeometrie

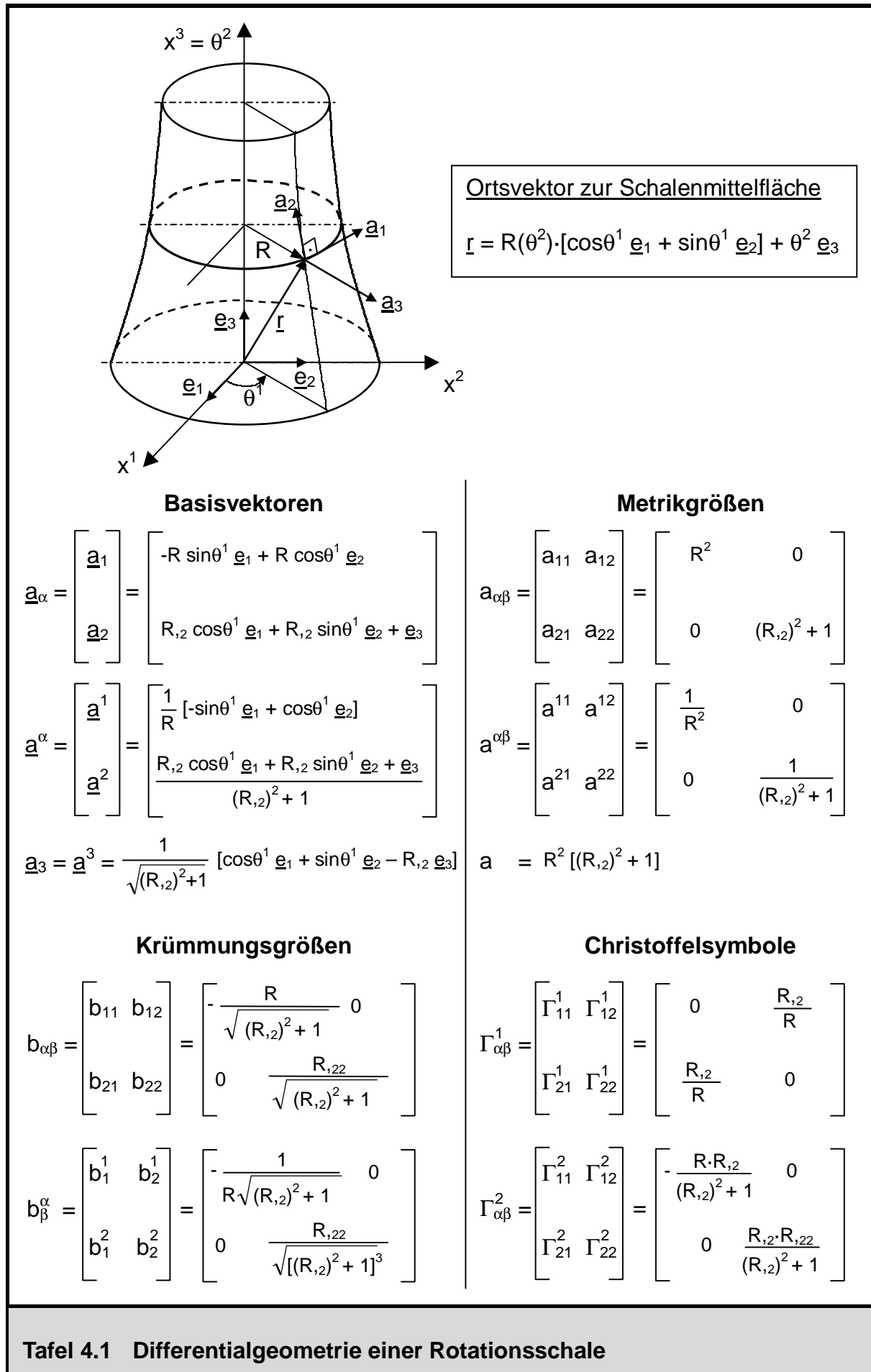
Bild 4.1 enthält die Darstellung eines Schalenausschnittes in einer beliebigen Konfiguration. Die Geometrie des Schalentragwerks wird über seine Mittelfläche beschrieben, die durch die krummlinigen Kurven der Flächenkoordinaten  $\theta^\alpha$  aufgespannt wird. Der Ortsvektor  $\underline{r}^*$  zu einem beliebigen Punkt  $P^*$  innerhalb des Schalenraums setzt sich aus dem Anteil des Ortsvektors zur Schalenmittelfläche  $\underline{r}$  und einem Anteil senkrecht zur Schalenmittelfläche (bei Vernachlässigung von Schubverzerrungen) gemäß Gleichung (4.1) zusammen. Die kovarianten Basisvektoren der Schalenmittelfläche werden, wie im Kapitel 2 gezeigt, durch Differentiation des Ortsvektors zur Mittelfläche nach den Koordinatenlinien gebildet (4.2); der dritte Basisvektor ist nun nicht mehr unabhängig, sondern steht senkrecht auf der Mittelfläche und ist auf die Länge 1 normiert (4.3). Die



kovarianten Komponenten des Metriktensors (4.4) werden aus den Skalarprodukten der kovarianten Basisvektoren in der Fläche bestimmt, wobei aufgrund der Voraussetzung von Flächen mit orthogonalen Basisvektoren die gemischten Anteile verschwinden. Analog den Ausführungen des Kapitels 2 wird eine duale (kontravariante) Vektorbasis gebildet. Deren Basisvektoren sind nun allerdings kollinear zu den kovarianten Basisvektoren aufgrund der Voraussetzung einer orthogonalen Metrik und unterscheiden sich von diesen nur in ihrem Betrag, wie anhand von Gleichung (4.5) deutlich wird. Wie bereits bekannt berechnen sich die kontravarianten Metrikkoeffizienten nach Gleichung (4.6), darüber hinaus wird die Determinante des Metriktensors definiert (4.7).

$$\underline{r}^* = \underline{r}(\theta^\alpha) + \theta^3 \cdot \underline{a}_3 \quad (-h/2 \leq \theta^3 \leq h/2) \quad (4.1)$$

$$\underline{a}_\alpha = \underline{r}_{,\alpha} \quad (4.2)$$



Tafel 4.1 Differentialgeometrie einer Rotationsschale



$$\underline{\mathbf{a}}^3 = \frac{\underline{\mathbf{a}}_1 \times \underline{\mathbf{a}}_2}{|\underline{\mathbf{a}}_1 \times \underline{\mathbf{a}}_2|} = \frac{\underline{\mathbf{a}}_1 \times \underline{\mathbf{a}}_2}{\sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}} \stackrel{!}{=} \underline{\mathbf{a}}_3 \quad (4.3)$$

$$a_{\alpha\beta} = \underline{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \underline{\mathbf{a}}_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_1 \cdot \underline{\mathbf{a}}_1 & 0 \\ 0 & \underline{\mathbf{a}}_2 \cdot \underline{\mathbf{a}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\underline{\mathbf{a}}^\alpha = a^{\alpha\lambda} \cdot \underline{\mathbf{a}}_\lambda \quad \underline{\mathbf{a}}^1 = a^{11} \cdot \underline{\mathbf{a}}_1 \quad \underline{\mathbf{a}}^2 = a^{22} \cdot \underline{\mathbf{a}}_2 \quad (4.5)$$

$$a^{\alpha\beta} = \underline{\mathbf{a}}^\alpha \cdot \underline{\mathbf{a}}^\beta = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}^1 \cdot \underline{\mathbf{a}}^1 & 0 \\ 0 & \underline{\mathbf{a}}^2 \cdot \underline{\mathbf{a}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$a = a_{11} \cdot a_{22} \quad (4.7)$$

Bei Ableitung von vektoriellen und tensoriellen Größen in Richtung der gekrümmten Flächenkoordinaten muss berücksichtigt werden, dass sich die Basisvektoren mit dem Abschreiten der Fläche in Richtung und Länge im Allgemeinen ändern. Die partiellen Ableitungen der Basisvektoren nach den Flächenkoordinaten sind mit Gleichung (4.8) und (4.9) definiert; durch Multiplizieren dieser Beziehungen mit einem kontravarianten Basisvektor verschwinden aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung (2.6) alle Anteile bis auf den des korrespondierenden kovarianten Basisvektors, so dass daraus die kovarianten (4.10) und gemischtvarianten Krümmungsgrößen (4.11) sowie die Christoffelsymbole (4.12) für die betrachtete Geometrie der Schalenmittelfläche hergeleitet werden können. Für rotationssymmetrische Geometrien, die im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich behandelt werden, können die differentialgeometrischen Größen in Abhängigkeit der Gleichung der Meridiankurve und ihrer Ableitungen dargestellt werden. Da auf diese Größen bei einigen Herleitungen zurückgegriffen werden muss, sind sie in Tafel 4.1 zusammengestellt.

$$\underline{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \cdot \underline{\mathbf{a}}_\lambda + b_{\alpha\beta} \cdot \underline{\mathbf{a}}_3 \quad (4.8)$$

$$\underline{\mathbf{a}}_{3,\alpha} = -b_\alpha^\lambda \cdot \underline{\mathbf{a}}_\lambda \quad (4.9)$$

$$b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{1,1} \cdot \underline{a}^3 & 0 \\ 0 & \underline{a}_{2,2} \cdot \underline{a}^3 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$b_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{11} \cdot b_{11} & 0 \\ 0 & a^{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^{\lambda} & \Gamma_{12}^{\lambda} \\ \Gamma_{21}^{\lambda} & \Gamma_{22}^{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{1,1} \cdot \underline{a}^{\lambda} & \underline{a}_{1,2} \cdot \underline{a}^{\lambda} \\ \underline{a}_{2,1} \cdot \underline{a}^{\lambda} & \underline{a}_{2,2} \cdot \underline{a}^{\lambda} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{a}_{1,2} \cdot \underline{a}^1 \\ \underline{a}_{2,1} \cdot \underline{a}^1 & 0 \end{bmatrix}$$

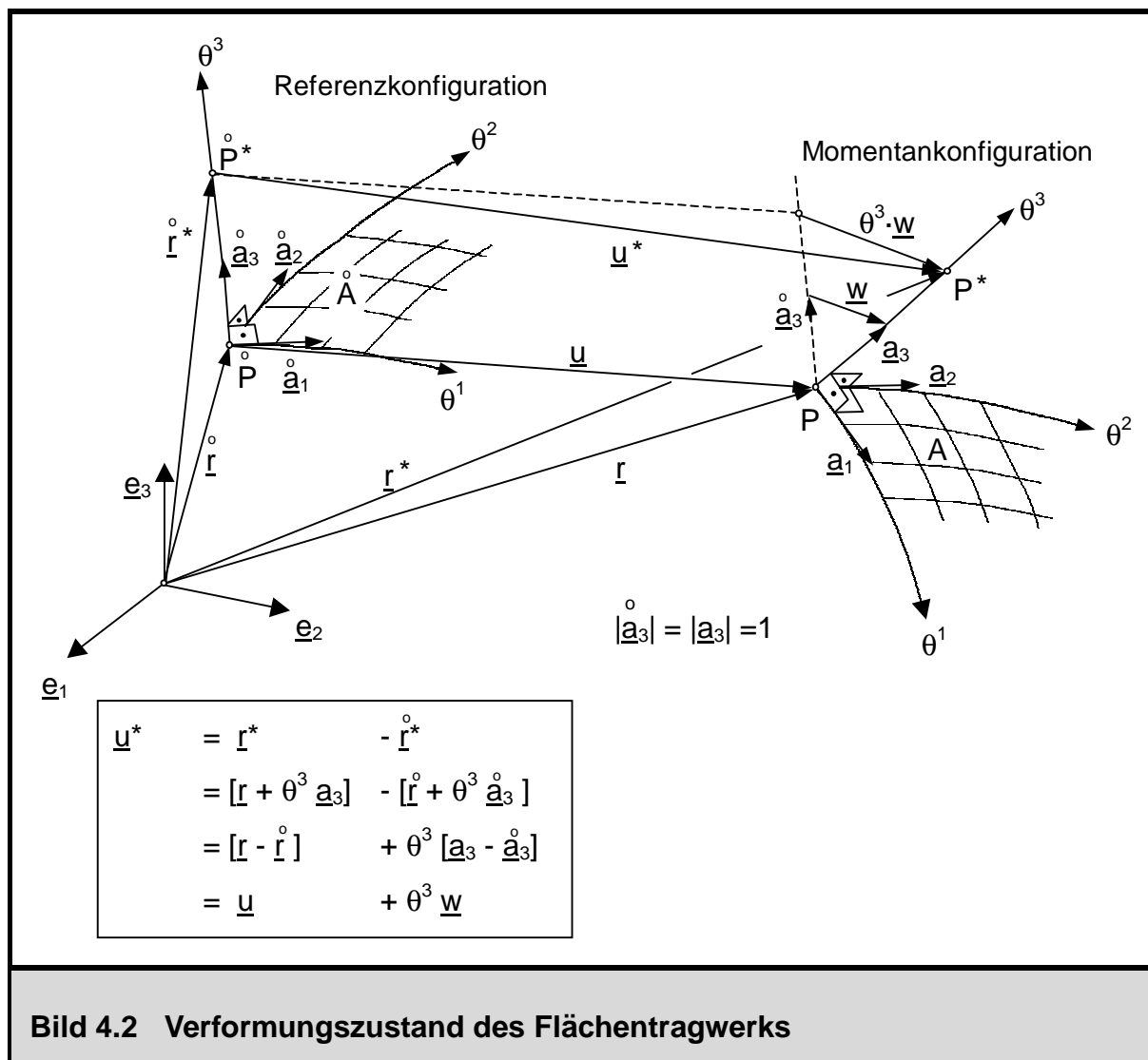
$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{1,1} \cdot \underline{a}^2 & 0 \\ 0 & \underline{a}_{2,2} \cdot \underline{a}^2 \end{bmatrix}$$

Die Wurzel aus dem Verhältnis der Metrikdeterminanten in einem beliebigen Punkt  $P^*$  im Schalenraum und seiner orthogonalen Projektion  $P$  auf die Schalenmittelfläche gemäß Bild 4.2 wird nach Gleichung (4.13) berechnet und als Shifter bezeichnet. Diese Größe wird z.B. bei der Integration von Spannungen zu Schnittgrößen benötigt, um die über die Schalendicke veränderliche Metrik zu berücksichtigen.

$$\mu = \sqrt{\frac{a^*}{a}} = 1 - \theta^3 \cdot [b_1^1 + b_2^2] + (\theta^3)^2 \cdot [b_1^1 \cdot b_2^2] \quad (4.13)$$

### 4.3 Verformungszustand des Flächentragwerks

Der Verschiebungsvektor  $\underline{u}^*$  eines beliebigen Punktes eines Flächentragwerks setzt sich nach Gleichung (4.14) zusammen aus dem Verschiebungsvektor  $\underline{u}$  der Schalenmittelfläche und einem Differenzvektor  $\underline{w}$  des Schalendirektors vor und nach der Deformation, wie den geometrischen Beziehungen nach Bild 4.2 zu entnehmen ist.



**Bild 4.2** Verformungszustand des Flächentragwerks

$$\underline{u}^* = \underline{u} + \theta^3 \cdot \underline{w} \tag{4.14}$$

Durch partielle Ableitung der Komponenten des Verschiebungsvektors der Schalenmittelfläche nach den Flächenkoordinaten (4.15) werden die beiden Verschiebungsgradienten  $\varphi_{\alpha\beta}$  (4.16) und  $\varphi_{3\alpha}$  (4.17) gebildet, in Analogie aus der partiellen Ableitung der Komponenten des Differenzvektors der Schalendirektoren (4.18) dazu die Verschiebungsgradienten  $\psi_{\alpha\beta}$  (4.19) und  $\psi_{3\alpha}$  (4.20) [58]. Diese werden bei der Definition der Verzerrungsmaße im nächsten Abschnitt benötigt, enthalten allerdings noch Anteile von Starrkörperverformungen.

$$\underline{u}_{,\beta} = [u_{\alpha|\beta} - u_3 b_{\alpha\beta}] \cdot \underline{a}^{\alpha} + [u_{3,\beta} + u_{\lambda} b_{\beta}^{\lambda}] \cdot \underline{a}^3 \tag{4.15}$$

$$\varphi_{\alpha\beta} = u_{\alpha|\beta} - u_3 b_{\alpha\beta} \quad (4.16)$$

$$\varphi_{3\alpha} = u_{3,\alpha} + u_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} \quad (4.17)$$

$$\underline{w}_{,\beta} = [w_{\alpha|\beta} - w_3 b_{\alpha\beta}] \cdot \underline{a}^{\alpha} + [w_{3,\beta} + w_{\lambda} b_{\beta}^{\lambda}] \cdot \underline{a}^3 \quad (4.18)$$

$$\psi_{\alpha\beta} = w_{\alpha|\beta} - w_3 b_{\alpha\beta} \quad (4.19)$$

$$\psi_{3\alpha} = w_{3,\alpha} + w_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} \quad (4.20)$$

Unter der Voraussetzung der Gültigkeit der KIRCHHOFF-LOVE Hypothese verschwindet der Schubverzerrungswinkel  $\underline{\gamma}$ , so dass der Schalendirektor der Momentankonfiguration mit dem Normalenvektor  $\underline{a}_3$  zusammenfällt. Die Unterdrückung der Schubverzerrung  $\underline{\gamma}$  führt weiterhin auf die wichtige Beziehung (4.21) für den Differenzvektor der Schalennormalen, der dadurch nicht mehr als unabhängige Variable anzusehen ist, sondern durch Verschiebungsableitungen ausgedrückt werden kann. Diese Beziehung ist allerdings lediglich bei einer Annahme von kleinen Rotationen gültig, wie sie in den Voraussetzungen der gewählten Flächentragwerkstheoriestufe gefordert worden sind; darüber hinaus verschwindet die Komponente  $w_3$  bei Einhaltung dieser Forderung.

$$\underline{\gamma} \stackrel{!}{=} 0 : \quad w_{\alpha} = -[u_{3,\alpha} + u_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda}] \quad (4.21)$$

Schließlich werden noch die physikalischen Beziehungen der Verschiebungsvektoren in (4.22) und (4.23) angegeben, da diese für eine physikalische Interpretation noch auf Einheitsvektoren bezogen werden müssen .

$$u_{\langle\alpha\rangle} = \sqrt{a^{\alpha\alpha}} \cdot u_{\alpha} \quad u_{\langle 3 \rangle} = u_3 \quad (4.22)$$

$$w_{\langle\alpha\rangle} = \sqrt{a^{\alpha\alpha}} \cdot w_{\alpha} \quad w_{\langle 3 \rangle} = 0 \text{ (kleine Rotationen)} \quad (4.23)$$

## 4.4 Kinematische Beziehungen

In Analogie zur Herleitung des Verzerrungstensors nach GREEN-LAGRANGE für das Kontinuum im Kapitel 2 wird für das Flächentragwerk der flächenhafte Verzerrungstensor  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  als Differenz der Metrikgrößen vor und nach der Deformation gemäß Gleichung (4.24) nach BAŞAR und KRÄTZIG [5] definiert, woraus sich nach einigen Umformungen und Vernachlässigung der quadratischen  $\theta^3$ -Anteile die Darstellung nach Gleichung (4.25) ergibt. Querschubverzerrungen  $\varepsilon_{\alpha 3}$  und Dehnungen in Dickenrichtung  $\varepsilon_{33}$  werden durch diesen Verzerrungstensor nicht erfasst, wobei letztere Annahme im Widerspruch mit der Annahme des ebenen Spannungszustandes steht. Bei der Auswertung der zweiaxialen Stoffgesetze ergibt sich jedoch sofort automatisch die Verzerrung  $\varepsilon_{33}$  aus der Bedingung  $\sigma_{33} = 0$ , die vorliegende Inkonsistenz wird dabei in Kauf genommen. Dreidimensionale Schalentheorien [14] beseitigen diese Inkonsistenz, dafür werden allerdings entsprechende Stoffgesetze erforderlich.

Bei der Herleitung sämtlicher kinematischer Beziehungen ist der Schubverzerrungswinkel  $\underline{\gamma}$  bereits zu Null gesetzt. Die flächenhaften Verzerrungen  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  in einer beliebigen Schicht gemäß (4.25) setzen sich somit aus dem 1. Verzerrungstensor der Mittelfläche  $\alpha_{\alpha\beta}$  (4.26) (Änderung der Metrik bei der Deformation) und dem 2. Verzerrungstensor der Mittelfläche  $\beta_{\alpha\beta}$  (4.27) (Änderung der Krümmung bei der Deformation) zusammen.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [\mathbf{a}_{\alpha\beta}^* - \dot{\mathbf{a}}_{\alpha\beta}^*] && \mathbf{(4.24)} \\
 &= \frac{1}{2} [[\underline{\mathbf{r}} + \theta^3 \cdot \underline{\mathbf{a}}_3]_{,\alpha} \cdot [\underline{\mathbf{r}} + \theta^3 \cdot \underline{\mathbf{a}}_3]_{,\beta} \\
 &\quad - [\underline{\dot{\mathbf{r}}} + \theta^3 \cdot \underline{\dot{\mathbf{a}}}_3]_{,\alpha} \cdot [\underline{\dot{\mathbf{r}}} + \theta^3 \cdot \underline{\dot{\mathbf{a}}}_3]_{,\beta}] \\
 &= \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \underline{\mathbf{a}}_\beta - \underline{\dot{\mathbf{a}}}_\alpha \cdot \underline{\dot{\mathbf{a}}}_\beta] \\
 &\quad + \frac{\theta^3}{2} [[\underline{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \underline{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \underline{\mathbf{a}}_\beta \cdot \underline{\mathbf{a}}_{3,\alpha}] - [\underline{\dot{\mathbf{a}}}_\alpha \cdot \underline{\dot{\mathbf{a}}}_{3,\beta} + \underline{\dot{\mathbf{a}}}_\beta \cdot \underline{\dot{\mathbf{a}}}_{3,\alpha}]] \\
 &\quad + \underbrace{\frac{(\theta^3)^2}{2} [[\underline{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \cdot \underline{\mathbf{a}}_{3,\beta}] - [\underline{\dot{\mathbf{a}}}_{3,\alpha} \cdot \underline{\dot{\mathbf{a}}}_{3,\beta}]]}_{\text{vernachlässigt}}
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \theta^3 \cdot \beta_{\alpha\beta} \quad (4.25)$$

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathbf{a}_{\alpha\beta} - \dot{\mathbf{a}}_{\alpha\beta}] \quad (4.26)$$

$$\beta_{\alpha\beta} = -[\mathbf{b}_{\alpha\beta} - \dot{\mathbf{b}}_{\alpha\beta}] \quad (4.27)$$

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda\beta} + \varphi_{3\alpha} \varphi_{3\beta}] \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha} - \varphi_{\lambda\alpha} \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda} - \varphi_{\lambda\beta} \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \\ + \varphi_{\alpha}^{\lambda} \psi_{\lambda\beta} + \varphi_{\beta}^{\lambda} \psi_{\lambda\alpha} + \varphi_{3\alpha} \psi_{3\beta} + \varphi_{3\beta} \psi_{3\alpha}] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die so eingeführten Verzerrungstensoren können mit Hilfe der bereits definierten Verschiebungsgradienten ausgedrückt werden [58], wie in den Gleichungen (4.28) und (4.29) erfolgt, wobei in dieser Darstellungsweise keine Einschränkung bezüglich der Größenordnung der Verschiebung der Mittelfläche  $\underline{u}$  sowie des Normalendrehvektors  $\underline{w}$  gegeben ist. Deutlich erkennbar an der Gleichungsstruktur sind die Parallelen zur Definition der Verzerrungen des Kontinuums aus Kapitel 2.

Durch Reihenentwicklung des Normalendrehvektors  $\underline{w}$ , der im Verschiebungsgradient  $\psi_{\alpha\beta}$  auftritt, und Abbruch nach bestimmten Reihengliedern lassen sich verschiedene Approximationsstufen herleiten, wie ECKSTEIN [41] in seiner Arbeit zeigt und von GROTE [58] in übersichtlicher Form dargestellt worden ist. Es wird dabei zwischen folgenden Theoriestufen unterschieden, deren kinematische Beziehungen Tafel 4.2 entnommen werden können:

- Theorie endlich großer Rotationen (Abbruch von  $\underline{w}$  nach kubischen Anteilen)
- Theorie mäßig großer Rotationen (Abbruch von  $\underline{w}$  nach quadratischen Anteilen)

Theorie endlich großer Rotationen

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda\beta} + \varphi_{3\alpha} \varphi_{3\beta}]$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha} - \varphi_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - \varphi_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\lambda} + \varphi_{\alpha}^{\lambda} \psi_{\lambda\beta} + \varphi_{\beta}^{\lambda} \psi_{\lambda\alpha} + \varphi_{3\alpha} \psi_{3\beta} + \varphi_{3\beta} \psi_{3\alpha}]$$

Theorie mäßig großer Rotationen

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda\beta} + \varphi_{3\alpha} \varphi_{3\beta}]$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\varphi_{3\alpha} |_{\beta} + \varphi_{3\beta} |_{\alpha} + \varphi_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \varphi_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\lambda} - \varphi_{3\alpha} [\varphi_{\alpha}^{\lambda} |_{\beta} + \varphi_{\beta}^{\lambda} |_{\alpha} + b_{\alpha\beta} \varphi_3^{\lambda} - \varphi_{3\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - \varphi_{3\beta} b_{\alpha}^{\lambda}]]$$

Theorie kleiner Rotationen

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[u_{\alpha} |_{\beta} + u_{\beta} |_{\alpha} - 2u_3 b_{\alpha\beta} + u^{\lambda} |_{\alpha} u_{\lambda} |_{\beta} - u_3 [u^{\lambda} |_{\alpha} b_{\lambda\beta} + u^{\lambda} |_{\beta} b_{\lambda\alpha}]]$$

$$+ u_3 u_3 b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + \underbrace{u_3 |_{\alpha} u_3 |_{\beta}}_{\text{DONNEL-MARGUERRE}} + u_{\lambda} [u_3 |_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + u_3 |_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] + u_{\lambda} u_{\rho} b_{\alpha}^{\lambda} b_{\rho\beta}^{\lambda}$$

$$\beta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[u_3 |_{\alpha\beta} + u_3 |_{\beta\alpha} + 2[u_{\lambda} |_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + u_{\lambda} |_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] + u_{\lambda} [b_{\alpha}^{\lambda} |_{\beta} + b_{\beta}^{\lambda} |_{\alpha}] - 2u_3 b_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda}]$$

lineare Theorie

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[u_{\alpha} |_{\beta} + u_{\beta} |_{\alpha} - 2u_3 b_{\alpha\beta}]$$

$$\beta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\underbrace{u_3 |_{\alpha\beta} + u_3 |_{\beta\alpha}}_{\text{Näherung für flache Schalen}} + 2[u_{\lambda} |_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + u_{\lambda} |_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] + u_{\lambda} [b_{\alpha}^{\lambda} |_{\beta} + b_{\beta}^{\lambda} |_{\alpha}] - 2u_3 b_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda}]$$

**Tafel 4.2 Kinematik unterschiedlicher Theoriestufen**

- Theorie kleiner Rotationen (Abbruch von  $\underline{u}$  nach linearen Anteilen), wahlweise mit Berücksichtigung der vollständigen nichtlinearen Anteile im ersten Verzerrungstensor (Theoriestufe nach BAŞAR/ KRÄTZIG) oder die DONNEL-MARGUERREsche Näherung (nichtlinearer Anteil im ersten Verzerrungstensor nur  $\frac{1}{2} u_3 |_{\alpha} \cdot u_3 |_{\beta}$ )

- Lineare Theorie (beide Verzerrungstensoren sind nur linear von den Verschiebungen und deren Ableitungen abhängig), wobei eine Näherungsstufe für flache Schalen weitere Vereinfachungen bzw. Streichung vernachlässigbarer Terme im 2. Verzerrungstensor der Mittelfläche mit sich führt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur die beiden zuletzt aufgeführten Theoriestufen bei der Implementierung eines Ringelements verwendet. Die Theorie kleiner Rotationen stellt für die meisten baupraktischen Anwendungen im Vergleich zu höheren Theoriestufen eine ausreichende Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität, die somit auf den ersten Verzerrungstensor der Mittelfläche beschränkt wird, dar [5], [41], [61], [126]. Höhere Theoriestufen sind durch den damit verbundenen numerischen Aufwand und die Rechenzeit im Rahmen der verfolgten Ziele in dieser Arbeit nicht gerechtfertigt. Die verwendeten kinematischen Beziehungen der Theoriestufe kleiner Rotationen und deren materielle Zeitableitungen sind in den Gleichungen (4.30), (4.31), (4.32) und (4.33) angegeben.

$$\begin{aligned}
\alpha_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda\beta} + \varphi_{3\alpha} \varphi_{3\beta}] \\
&= \frac{1}{2}[u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} - 2u_3 b_{\alpha\beta} + u^{\lambda}{}_{|\alpha} u_{\lambda|\beta} - u_3 u^{\lambda}{}_{|\alpha} b_{\lambda\beta} \\
&\quad - u_3 u^{\lambda}{}_{|\beta} b_{\lambda\alpha} + u_3 u_3 b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + u_3{}_{|\alpha} u_3{}_{|\beta} \\
&\quad + u_{\lambda} u_3{}_{|\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + u_{\lambda} u_3{}_{|\beta} b_{\alpha}^{\lambda} + u_{\lambda} u_{\rho} b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\rho}]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha} - \varphi_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - \varphi_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] \\
&= -\frac{1}{2}[u_3{}_{|\alpha\beta} + u_3{}_{|\beta\alpha} + 2[u_{\lambda}{}_{|\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + u_{\lambda}{}_{|\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] \\
&\quad + u_{\lambda} [b_{\alpha}^{\lambda}{}_{|\beta} + b_{\beta}^{\lambda}{}_{|\alpha}] - 2u_3 b_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda}]
\end{aligned} \tag{4.31}$$



$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[\dot{\varphi}_{\alpha\beta} + \dot{\varphi}_{\beta\alpha} + \dot{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda\beta} + \varphi_{\alpha}^{\lambda} \dot{\varphi}_{\lambda\beta} + \dot{\varphi}_{3\alpha} \varphi_{3\beta} + \varphi_{3\alpha} \dot{\varphi}_{3\beta}] \\
&= \frac{1}{2}[\dot{u}_{\alpha} |_{\beta} + \dot{u}_{\beta} |_{\alpha} - 2 \dot{u}_3 \mathbf{b}_{\alpha\beta} \\
&\quad + \dot{u}^{\lambda} |_{\alpha} u_{\lambda} |_{\beta} - \dot{u}_3 u^{\lambda} |_{\alpha} \mathbf{b}_{\lambda\beta} - \dot{u}_3 u^{\lambda} |_{\beta} \mathbf{b}_{\lambda\alpha} + \dot{u}_3 u_3 \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{b}_{\lambda\beta} \\
&\quad + \dot{u}_3 |_{\alpha} u_3 |_{\beta} + \dot{u}_{\lambda} u_3 |_{\alpha} \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda} + \dot{u}_{\lambda} u_3 |_{\beta} \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} + \dot{u}_{\lambda} u_{\rho} \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{b}_{\beta}^{\rho} \\
&\quad + u^{\lambda} |_{\alpha} \dot{u}_{\lambda} |_{\beta} - u_3 \dot{u}^{\lambda} |_{\alpha} \mathbf{b}_{\lambda\beta} - u_3 \dot{u}^{\lambda} |_{\beta} \mathbf{b}_{\lambda\alpha} + u_3 \dot{u}_3 \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{b}_{\lambda\beta} \\
&\quad + u_3 |_{\alpha} \dot{u}_3 |_{\beta} + u_{\lambda} \dot{u}_3 |_{\alpha} \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda} + u_{\lambda} \dot{u}_3 |_{\beta} \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} + u_{\lambda} \dot{u}_{\rho} \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{b}_{\beta}^{\rho}] \quad (4.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\beta}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}[\dot{\psi}_{\alpha\beta} + \dot{\psi}_{\beta\alpha} - \dot{\varphi}_{\lambda\alpha} \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda} - \dot{\varphi}_{\lambda\beta} \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda}] \\
&= -\frac{1}{2}[\dot{u}_3 |_{\alpha\beta} + \dot{u}_3 |_{\beta\alpha} + 2[\dot{u}_{\lambda} |_{\alpha} \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda} + \dot{u}_{\lambda} |_{\beta} \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda}] \\
&\quad + \dot{u}_{\lambda} [\mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} |_{\beta} + \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda} |_{\alpha}] - 2 \dot{u}_3 \mathbf{b}_{\lambda\alpha} \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda}] \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Ferner muss bedacht werden, dass die Tensorkomponenten immer in Verbindung mit ihren Basisvektoren zu betrachten sind, in diesem Falle die Basisvektoren der unverformten Metrik. Die Basisvektoren sind im Allgemeinen keine Einheitsvektoren, somit stimmen die Tensorkomponenten nicht mit den physikalischen Verzerrungen überein; die physikalischen Tensorkomponenten werden daher (kleine Verzerrungen und orthogonale Metrik vorausgesetzt) aus Gleichung (4.34) und (4.35) bestimmt.

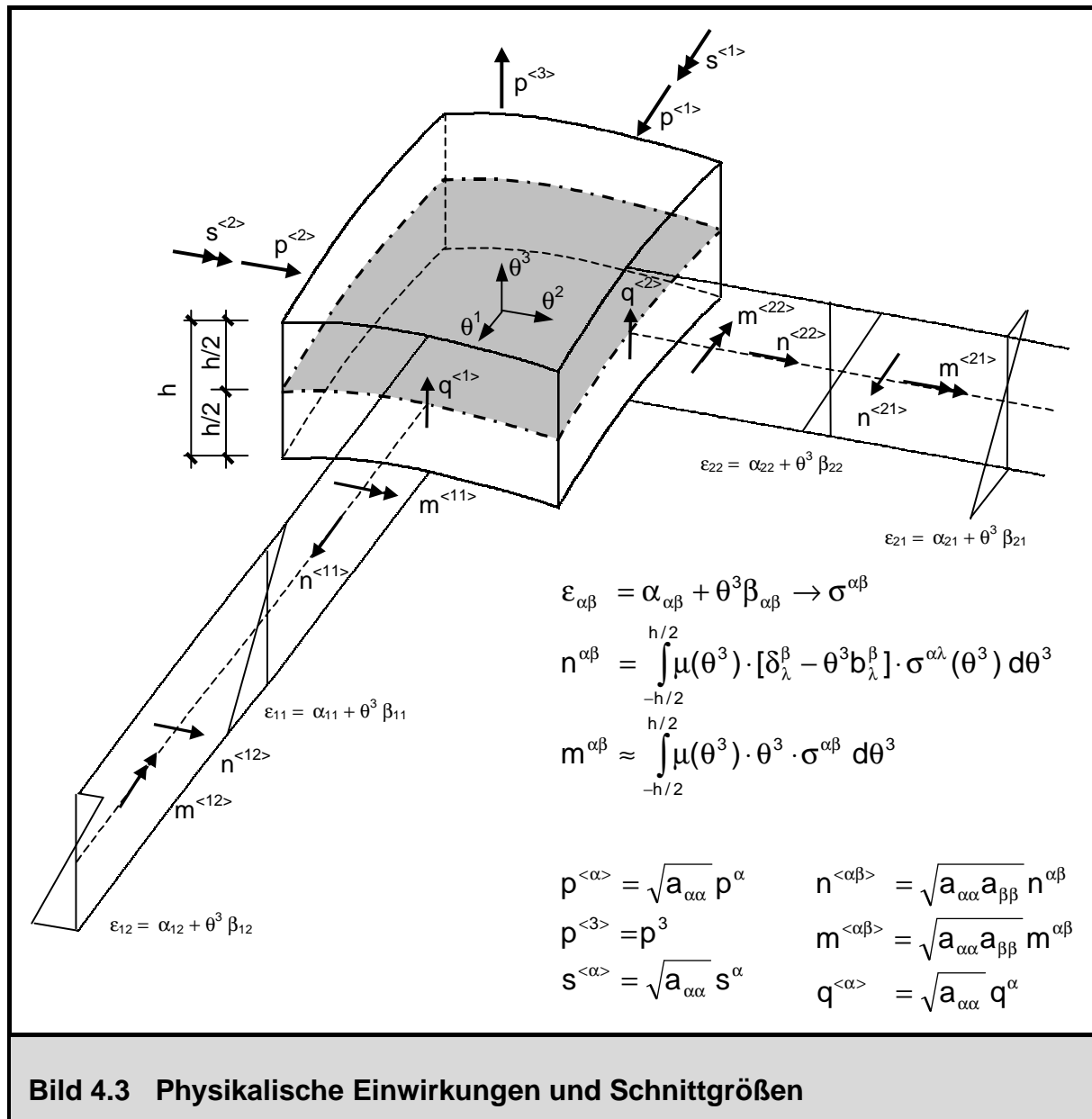
$$\alpha_{\langle\alpha\beta\rangle} = \frac{\alpha_{\alpha\beta}}{\sqrt{\mathbf{a}_{\alpha\alpha} \mathbf{a}_{\beta\beta}}} \quad (4.34)$$

$$\beta_{\langle\alpha\beta\rangle} = \frac{\beta_{\alpha\beta}}{\sqrt{\mathbf{a}_{\alpha\alpha} \mathbf{a}_{\beta\beta}}} \quad (4.35)$$

### 4.5 Schnittgrößen und konstitutive Beziehungen

Über die konstitutiven Beziehungen oder Werkstoffgesetze wird die Verknüpfung zwischen den Verzerrungen und Schnittgrößen des Flächentragwerks hergestellt; diese sind dabei als Resultierende der Spannungsverteilung über den Querschnitt anzusehen. Bild 4.3 zeigt einen Ausschnitt aus einem Flächentragwerk mit den positiven Wirkungsrichtungen der Schnittgrößen. Die Vernachlässigung des Effekts der Veränderung der Metrik auf die Schnittgrößen führt dazu, dass im Folgenden nicht mehr zwischen wahren CAUCHY Spannungen und PIOLA-KIRCHHOFF Spannungen unterschieden wird (Kapitel 2).

Die Schnittgrößen als Resultierende, Normalkräfte  $n^{\alpha\beta}$  und Biegemomente  $m^{\alpha\beta}$ , ent-



**Bild 4.3** Physikalische Einwirkungen und Schnittgrößen

stehen dabei durch eine Spannungsintegration über die Querschnittshöhe gemäß Gleichungen (4.36) und (4.37), welche in der Regel numerisch unter Zuhilfenahme von Schichtendiskretisierungen ausgeführt wird [87], [129]. Diese Beziehungen sind allgemein gültig für beliebige Werkstoffgesetze; auf eine Betrachtung der Querkräfte wird verzichtet, da die korrespondierenden Verzerrungen im Rahmen einer Normalentheorie zu Null gesetzt sind und sich die Querkräfte daher nur aus dem Gleichgewicht berechnen lassen.

$$\mathbf{n}^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu(\theta^3) \cdot [\delta_\lambda^\beta - \theta^3 \mathbf{b}_\lambda^\beta] \cdot \sigma^{\alpha\lambda}(\theta^3) d\theta^3 = \tilde{\mathbf{n}}^{\alpha\beta} - \mathbf{m}^{\alpha\lambda} \mathbf{b}_\lambda^\beta \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu(\theta^3) \cdot [\delta_\lambda^\beta - \theta^3 \mathbf{b}_\lambda^\beta] \cdot \theta^3 \cdot \sigma^{\alpha\lambda}(\theta^3) d\theta^3 \\ &\approx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu(\theta^3) \cdot \theta^3 \cdot \sigma^{\alpha\beta}(\theta^3) d\theta^3 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Hierbei ist ein symmetrischer Dehnungskrafttensor  $\tilde{\mathbf{n}}^{\alpha\beta}$  eingeführt worden, der eine Rechengröße darstellt und energiekonjugiert zum 1. Verzerrungstensor der Mittelfläche ist. Der Normalkrafttensor  $\mathbf{n}^{\alpha\beta}$  ist im Allgemeinen aufgrund der Momententerme unsymmetrisch. Bei den Momententermen werden die Bimomente mit quadratischen  $\theta^3$ -Anteilen vernachlässigt, was durch die Annahme von einer gegenüber den charakteristischen Schalenabmessungen kleinen Schalendicke gerechtfertigt ist. Alternativ ist eine matrizielle Darstellung möglich, wobei die großen und kleinen Symmetrien im Elastizitätstensor bei GREENscher Elastizität (Hyperelastizität, Existenz einer Spannungspotentialfunktion) [93] ausgenutzt werden, so dass sich die 16 Komponenten (bzw. 9 unter Ausnutzung der Symmetrie der Verzerrungen, die natürlich unabhängig vom Materialverhalten gegeben ist) des allgemeinen flächenhaften Elastizitätstensors (CAUCHYsche Elastizität)  $\mathbf{E}^{\alpha\beta\lambda\rho}$  auf 6 unabhängige Komponenten reduzieren. Die Schnittgrößen  $\tilde{\mathbf{n}}^{\alpha\beta}$  und  $\mathbf{m}^{\alpha\beta}$  finden demnach in (4.38) und (4.39) eine alternative Darstellung, wobei die Tensorkomponenten  $\mathbf{E}^{\alpha\beta\lambda\rho}$  natürlich vom Dehnungszustand abhängen.

$$\begin{bmatrix} \tilde{n}^{11} \\ \tilde{n}^{12} \\ \tilde{n}^{22} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} E^{1111} & E^{1112} & E^{1122} \\ \dots & E^{1212} & E^{1222} \\ \dots & \dots & E^{2222} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(\theta^3) \\ \varepsilon_{12}(\theta^3) \\ \varepsilon_{22}(\theta^3) \end{bmatrix} d\theta^3 \quad (4.38)$$

$$\begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{12} \\ m^{22} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} E^{1111} & E^{1112} & E^{1122} \\ \dots & E^{1212} & E^{1222} \\ \dots & \dots & E^{2222} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(\theta^3) \\ \varepsilon_{12}(\theta^3) \\ \varepsilon_{22}(\theta^3) \end{bmatrix} \theta^3 d\theta^3 \quad (4.39)$$

Für den Sonderfall der linearen isotropen Elastizität reduziert sich die Zahl der unabhängigen Komponenten auf 2, so dass sich der 4-stufige Elastizitätstensor  $E^{\alpha\beta\lambda\rho}$  nach Gleichung (4.40) angeben lässt. Die Beziehungen zwischen den symmetrischen Dehnkräften und dem 1. Verzerrungstensor der Mittelfläche (4.41) sowie den Biegemomenten und dem 2. Verzerrungstensor der Mittelfläche (4.42) sind dabei entkoppelt.

$$E^{\alpha\beta\lambda\rho} = \frac{E \cdot [1 - \nu]}{2 \cdot [1 - \nu^2]} \cdot [a^{\alpha\lambda} a^{\beta\rho} + a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1 - \nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\rho}] \quad (4.40)$$

$$\tilde{n}^{\alpha\beta} = h \cdot E^{\alpha\beta\lambda\rho} \cdot \alpha_{\lambda\rho} \quad (4.41)$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12} \cdot E^{\alpha\beta\lambda\rho} \cdot \beta_{\lambda\rho} \quad (4.42)$$

Für linear viskoelastisches Materialverhalten werden die Beziehungen (4.41) und (4.42) um den zweidimensionalen Viskositätstensor erweitert; die Schnittgrößen sind jetzt von den Verzerrungen und Verzerrungsgeschwindigkeiten abhängig [10], wobei  $C^{\alpha\beta\lambda\rho}$  ein vierstufiger flächenhafter Viskositätstensor ist.

$$\tilde{n}^{\alpha\beta} = h \cdot [E^{\alpha\beta\lambda\rho} \cdot \alpha_{\lambda\rho} + C^{\alpha\beta\lambda\rho} \cdot \dot{\alpha}_{\lambda\rho}] \quad (4.43)$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12} \cdot [E^{\alpha\beta\lambda\rho} \cdot \beta_{\lambda\rho} + C^{\alpha\beta\lambda\rho} \cdot \dot{\beta}_{\lambda\rho}] \quad (4.44)$$

Diese Entkoppelung der Schnittgrößen ist jedoch im nichtlinearen Fall nicht vorhanden, da nach Gleichung (4.38) und (4.39) Spannungen aufintegriert werden, die von den Dehnungen der betrachteten Schicht  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  abhängen, wobei diese wiederum aus Anteilen des 1. und 2. Verzerrungstensors hervorgehen (4.25). Die physikalischen Komponenten der Schnittgrößentensoren, die letztendlich unter anderem auch für Bemessungsfragen interessieren, sind ferner in den Beziehungen (4.45) und (4.46) angegeben.

$$n^{<\alpha\beta>} = n^{\alpha\beta} \cdot \sqrt{a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}} \quad (4.45)$$

$$m^{<\alpha\beta>} = m^{\alpha\beta} \cdot \sqrt{a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}} \quad (4.46)$$

## 4.6 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen beinhaltet implizit die Gleichgewichtsbeziehungen in integraler oder in schwacher Form. Darauf basierend lassen sich die Elementmatrizen im Rahmen der Finiten-Elemente Methode für reine Weggrößenmodelle herleiten. Sämtliche Nichtlinearitäten können dabei berücksichtigt werden. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen formuliert eine integrale Gleichgewichtsaussage für ein System, welche lautet:

*Befindet sich ein System im Gleichgewicht, so verschwindet die Summe aus äußerer und innerer virtueller Arbeit, die bei Aufbringen eines virtuellen Verschiebungszustands geleistet wird.*

$$\delta A_a + \delta A_i = 0 \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
\delta A_a = & \underbrace{\iint_A [p^\alpha \delta u_\alpha + p^3 \delta u_3 + s^\alpha \delta \omega_\alpha] dA}_{\text{Körperkräfte}} \\
& + \underbrace{\oint_C [n^\alpha \delta u_\alpha + n^3 \delta u_3 + m^\alpha \delta \omega_\alpha] dC}_{\text{Randkräfte}} \\
& - \underbrace{\iint_A \rho h \cdot [a^{\alpha\beta} \ddot{u}_\alpha \delta u_\beta + \ddot{u}_3 \delta u_3] dA}_{\text{Trägheitskräfte}} \\
& - \underbrace{\iint_A [c_t a^{\alpha\beta} \dot{u}_\alpha \delta u_\beta + c_n \dot{u}_3 \delta u_3] dA}_{\text{äußere Dämpfungskräfte}}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
\delta A_i = & - \underbrace{\iint_A [\tilde{n}^{\alpha\beta} \delta \alpha_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \beta_{\alpha\beta}] dA}_{\text{Spannungsarbeit}} \\
& - \underbrace{\iint_A [k_t a^{\alpha\beta} u_\alpha \delta u_\beta + k_n u_3 \delta u_3] dA}_{\text{Bettungen}}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Der Verformungszustand eines Systems wird also um einen gedachten, infinitesimal kleinen und mit den Randbedingungen verträglichen Verformungszustand geändert (variiert); wenn dabei die geleistete Arbeit verschwindet, liegt ein Gleichgewichtszustand vor. Diese Aussage wird durch Beziehung (4.47) ausgedrückt, wobei Trägheitskräfte und Dämpfungskräfte (äußere Dämpfung, wie Luft- oder Fluidreibung) wie äußere Kräfte behandelt werden. Die innere Materialdämpfung ist dabei bereits in den Schnittgrößen über die Werkstoffgesetze berücksichtigt.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (4.47) kann auch direkt durch Anschreiben der Gleichgewichtsbeziehungen, die mit einer virtuellen Verschiebungsfunktion

gewichtet und über das Gesamtgebiet integriert werden, gewonnen werden. Diese führen nach einigen Umformungen auf die Arbeitsausdrücke (4.48) und (4.49). Die EULERSchen Gleichungen dieses Prinzips sind somit die Gleichgewichtsbedingungen; die natürlichen Randbedingungen werden durch die Kraftgrößenrandbedingungen (Gleichgewicht auf dem Rand der Struktur) gebildet [75]. Nach dem Einsetzen der kinematischen Beziehungen und der Werkstoffgesetze in (4.49) enthält das Prinzip der virtuellen Verschiebungen als einzige unbekannte Größen noch den Verschiebungszustand, so dass auf dessen Basis Finite Elemente mit Weggrößenapproximationen formuliert werden können. Zur Herleitung von gemischten Elementen, auf die im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen wird, müssen erweiterte Variationsprinzipien wie z.B. das HU-WASHIZU Funktional [136], [121] angewendet werden. Dieses sieht eine unabhängige Variation der Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen vor. Es enthält zusätzlich neben den Gleichgewichtsbeziehungen auch die Kinematik und das Werkstoffgesetz als EULERSche Gleichungen.

Eine explizite Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen findet sich z.B. für den linearen Fall in [96], [97] oder für den nichtlinearen Fall unter Berücksichtigung der DONNEL-MARGUERRESchen Anteile in [87]. Differenzenverfahren wie das Verfahren der Dynamischen Relaxation [112], [96], [97], [87] formulieren das Gleichgewicht explizit in einzelnen Ortspunkten im Gegensatz zur FE-Methode.





# Kapitel 5

## Herleitung und Umsetzung eines Schalenringelements

### 5.1 Allgemeines

#### 5.1.1 Übersicht über den aktuellen Stand der Forschung

Ein wesentlicher Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit besteht in der Erweiterung eines vorhandenen, auf der Forschungsarbeit von ECKSTEIN et al. [42] basierenden finiten Ringelements, welches nun nach der Herleitung und Implementierung der entsprechenden Elementmatrizen für die statische und dynamische Berechnung von Rotationsschalen unter Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearität (Stahlbeton) eingesetzt werden soll. Die Finite Elemente Methode unterscheidet sich vom allgemeinen RITZ-GALERKIN Verfahren [6] dadurch, dass ein Lösungsansatz nur über ein Teilgebiet der Struktur, nämlich über ein Finites Element, gemacht und die Gesamtstruktur anschließend aus einzelnen Elementen zusammengesetzt wird. Die Behandlung von Ringelementen ist somit näher mit der RITZschen Methode verwandt als herkömmliche Finite Elemente, da nun für die gesamte Umfangsrichtung ein geschlossener Lösungsansatz verwendet wird, wobei theoretisch beliebig viele Reihenglieder berücksichtigt werden können und somit keine Diskretisierung der Struktur in Umfangsrichtung stattfindet. Die Meridianrichtung der Rotationsschale wird wie gewöhnlich in einzelne Elemente unterteilt. Eine wesentliche Eigenschaft und ein sich daraus ergebender Vorteil bei linearen Berechnungen mit Ringelementen ist, dass die Steifigkeitsbeziehungen zwischen den fourierzerlegten Belastungen und den zugehörigen Verformungsanteilen untereinander unabhängig sind, wie bei der Herleitung der linear elastischen Steifigkeits- und Massenmatrix noch gezeigt werden wird, wodurch

nur die Hauptdiagonalmatrizen besetzt sind. Daher können nacheinander die Systemgleichungen für die einzelnen Fourierglieder des Ansatzes unabhängig gelöst werden und im Anschluss daran zur Gesamtlösung superponiert werden. Das Schalenringelement ist als äußerst leistungsfähiges Element hinsichtlich Rechenzeit und Güte der Ergebnisse anzusehen [5].

Die Anfänge der Forschungsarbeiten über Ringelemente können relativ weit bis in die Mitte der 60er Jahre zurückverfolgt werden. Die Arbeiten von GRAFTON und STROME [56] sowie POPOV et al. [100] sind dabei als grundlegend anzusehen, davor erfolgte die numerische Behandlung von Rotationsschalen mit Differenzenverfahren [110]. Das in [100] beschriebene Element ist ein konisches Schalenringelement mit konstanter Wanddicke, es werden nur rotationssymmetrische Belastungen betrachtet. Im deutschsprachigen Raum lieferte die Arbeit von LEIMBACH [82] einen wesentlichen Beitrag zur linearen Berechnung von Rotationsschalen unter allgemeinen nicht rotationssymmetrischen Belastungen mit finiten Ringelementen. Ebenso in der Literatur häufig zu finden ist der Einsatz von Ringelementen bei linearen dynamischen Berechnungen, wie bei der Ermittlung der Beanspruchungen infolge der nicht rotationssymmetrischen horizontalen Erdbebeneinwirkung [1], [3], [55], die im linearen Fall nur Antworten (Verformungen und Spannungen) in der Umfangswelle 1 hervorruft. GOULD veröffentlichte 1985 ein gesamtes Buch [52] über die Berechnung von Rotationsschalen mit finiten Ringelementen. Darin werden zwei Programmsysteme, BOSOR4 und SHORE III vorgestellt, deren Leistungsmerkmale die lineare statische Berechnung von Rotationsschalen unter rotationssymmetrischen und nicht rotationssymmetrischen Belastungen, die Eigenwertbestimmung (Beul- oder Eigenschwinganalyse) für Rotationsschalen unter rotationssymmetrischer Belastung sowie die lineare dynamische Berechnung von Rotationsschalen sind. Diese Leistungsmerkmale sind Stand der Technik und können allesamt im Programmsystem ROSHE [130] wiedergefunden werden.

Es fehlt hier demnach offensichtlich ein Konzept zur nichtlinearen statischen und dynamischen Berechnung von Rotationsschalen unter beliebigen nicht rotationssymmetrischen Belastungen. Als frühe Forschungsarbeiten bezüglich der physikalisch nichtlinearen Berechnung von Rotationsschalen sind im deutschsprachigen Raum die Arbeiten von WUNDERLICH und RENSCH [133], [104] sowie von WUNDERLICH et al. [132] zu nennen, die nichtlineare elasto-plastische statische Berechnungen von Stahlschalen mit J2-Plastizitätsmodellen [13] durchführten; allerdings werden die Nichtlinearitäten dabei lediglich über Pseudo-Last-Anteile [133] berücksichtigt, als Steifigkeitsmatrix für die Iteration wird die linear elastische Steifigkeitsmatrix verwendet, was zu Schwierigkeiten bzw. Nachteilen bei größeren Steifigkeitsänderungen wie z.B. dem Reißen des Stahlbetons führen kann. COMBESCURE beschreibt in seinem Aufsatz von 1985 [27] ein gegenüber WUNDERLICH um die Berücksichtigung von Imperfektionen verbessertes Ringelement. Dieses besitzt lineare Polynomansätze in Meridian-

richtung und Fourierreihen in Umfangsrichtung. Die Gebietsintegration in Meridianrichtung wird dabei mit einem Integrationspunkt numerisch durchgeführt, in Umfangsrichtung werden die Stahlstoffgesetze unter Beachtung der J2-Fließbedingung an einer benutzerdefinierten Anzahl von Stützstellen ausgewertet und anschließend in Fourierreihen entwickelt, die wiederum analytisch mit den korrespondierenden Termen in den Verzerrungen integriert werden. Allerdings muss die Güte der Ergebnisse des hierbei verwendeten Elements kritisch hinterfragt werden, da in Meridianrichtung nur lineare Polynomansätze für  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  und  $w_2$  und eine numerische Integration mit nur einem Integrationspunkt [28] verwendet werden, ECKSTEIN aber gerade diese linearen Ansätze verwirft, da sie schlechte Ergebnisse insbesondere für Zustände in der Umfangswelle 1 liefern [42].

Seit der Einführung der physikalischen Nichtlinearität des Stahlbetons vor ca. 10 Jahren durch ZAHLTEN [134] in Bochum und GROTE [58] in Kaiserslautern in die von HARTE [61] und ECKSTEIN [41] entwickelte Elementfamilie NACS (Dreiecks- und Viereckschalenelemente in konvektiven Koordinaten) wurden die vorhandenen Ringelemente vernachlässigt und nicht weiter gepflegt, da es für die Ringelemente an einem Konzept zur Berücksichtigung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten im Rahmen einer inkrementell iterativen Vorgehensweise fehlte, obwohl die Vorteile der Ringelemente gegenüber herkömmlichen Elementen im linearen Fall hinreichend bekannt waren. Die neueren Veröffentlichungen von GOULD [54], [53] sowie persönlicher Schriftverkehr mit ihm zeigen ebenso, dass bezüglich der Handhabung von Ringelementen bei nichtlinearen Problemstellungen noch Forschungsbedarf besteht. GOULD verfolgt ein Konzept der Strukturunterteilung in lineare und nichtlineare Bereiche: Die Bereiche der Rotationsschale, denen lineares Verhalten zugewiesen wird, werden mit Ringelementen abgebildet, für die Diskretisierung der nichtlinearen Bereiche verwendet er isoparametrische Schalenelemente. Die unterschiedlichen Modellierungsbereiche werden durch eine Transformation der fourierzerlegten Freiheitsgrade des Ringelements auf die Freiheitsgrade der allgemeinen Schalenelemente an der Übergangsstelle aneinander gekoppelt.

Gerade auch zur Untersuchung nichtlinearer dynamischer Problemstellungen in Verbindung mit direkten Zeitintegrationsverfahren oder modalen Berechnungsverfahren (siehe Kapitel 6) wird der Einsatz einer inkrementell iterativen Formulierung von Ringelementen sich als äußerst vorteilhaft erweisen. Deswegen wird in der vorliegenden Arbeit folgende Vorgehensweise verfolgt: Es wird ein geschlossenes Konzept vorgestellt und hergeleitet, wie die Formulierung inkrementell iterativer Lösungsalgorithmen auf Ringelemente mit ihren Besonderheiten im Rahmen von geometrisch und physikalisch nichtlinearen Berechnungen (insbesondere das nichtlineare Verhalten des Stahlbetons als Folge des Aufreißens ist hierbei von Interesse) übertragen und angewendet werden kann. Das von ECKSTEIN hergeleitete und von ŞANAL [108] um die Massenma-

trix ergänzte Ringelement, welches im Programmsystem ROSHE [130] implementiert ist und sich für lineare statische und dynamische Problemstellungen sowie für Stabilitätsberechnungen mit rotationssymmetrischen Grundzuständen erfolgreich bewährt hat, wird unter Anwendung des erarbeiteten Konzepts um die nichtlinearen Elementmatrizen (Vektor der inneren Knotenkräfte und tangentiale Steifigkeitsmatrix) erweitert, so dass damit nichtlineare statische und dynamische Berechnungen unter Anwendung von inkrementell iterativen Lösungsverfahren durchgeführt werden können. Es wird sich ferner in Vergleichsrechnungen bestätigen, dass auch bei Berücksichtigung von Nichtlinearitäten die Ringelemente bezüglich der Güte der Ergebnisse äußerst gute Resultate liefern.

### 5.1.2 Allgemeines zum Programmsystem FEMAS, ROSHE

Sämtliche numerische Umsetzungen der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten FE-Modelle und Algorithmen sind im Programmsystem ROSHE [130], einem Spezialprogramm von FEMAS (Finite Element Moduln Allgemeiner Strukturen) [11] realisiert worden. FEMAS wurde am Lehrstuhl III des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum konzipiert und umgesetzt und seit 1984 getrennt in Bochum und Kaiserslautern weiterentwickelt. Es zeichnet sich durch seine unabhängigen Bausteine (Elemente, Verwaltung, mathematische Operationen oder mechanische Methoden) aus, die zu Spezialprogrammen für strukturmechanische Problemstellungen (Linientragwerke 2D LTRGW2, Flächen- und Raumtragwerke FRTRGW, Verbundtragwerke 2D VTRGW2, etc.) zusammengestellt werden können. Das Programmsystem ROSHE ist ein solches Spezialprogramm, welches gezielt zur Berechnung rotationssymmetrischer Strukturen mit Hilfe von Ringelementen entwickelt worden ist. Es verfügt über unabhängige Nachlaufprogramme, die eine Plotausgabe der Zustandsgrößen oder eine Stahlbetonbemessung gestatten. Eine Steuerung von ROSHE und dessen Nachlaufprogrammen kann über das Expertensystem DECOR vorgenommen werden, das speziell zum automatisierten Entwurf von Naturzugkühltürmen entwickelt worden ist [88].

Sämtliche Programmquellen sind in der Programmiersprache FORTRAN erstellt, die Datenspeicherung und der Datentransfer innerhalb FEMAS wird mit Hilfe eines eindimensionalen Integerfeldes und eines eindimensionalen Realfeldes abgewickelt, die über Zeiger (z.B. auf die Knotenkoordinaten oder Steifigkeitsmatrix) adressiert werden. Diese Programmieretechnik ist natürlich veraltet und wird immer mehr von objektorientierten Programmieretechniken verdrängt, deren Vorteile in dynamischer Speicherplatzreservierung oder der Unterstützung komplexer Datenstrukturen wie Klassen (Vereinigung von Daten und datentypspezifischen Operationen) zu sehen sind. Dennoch wird

der numerischen Realisierung in FEMAS/ ROSHE mit der Programmiersprache FORTRAN der Vorzug gegeben; die Vorteile hierfür liegen in der besonders einfachen und ingenieurgerechten Struktur der Programmiersprache, der geringeren benötigten CPU-Zeit bei Berechnungen aufgrund der Verwendung primitiver Datentypen (Integer und Real Zahlen) und nicht zuletzt durch das Vorhandensein einer umfangreichen Sammlung an Quellcode und Bibliotheken, die über Jahre hinweg entstanden ist.

## **5.2 Grundlegende Überlegungen und inkrementelle Betrachtungsweise**

### **5.2.1 Anforderungen an Finite Elemente**

Bevor speziell auf die Formulierung der im Rahmen dieser Arbeit erweiterten Ringelemente eingegangen wird, sollen in knapper Form die Anforderungen an die Verschiebungsansätze Finiter Elemente zusammengestellt werden [5], [41], [58], [83]. Deren Einhaltung entscheidet maßgeblich über die Konvergenzeigenschaften der Elemente (Annäherung der FE-Lösung gegen die strenge Lösung bei Verfeinerung der Diskretisierung).

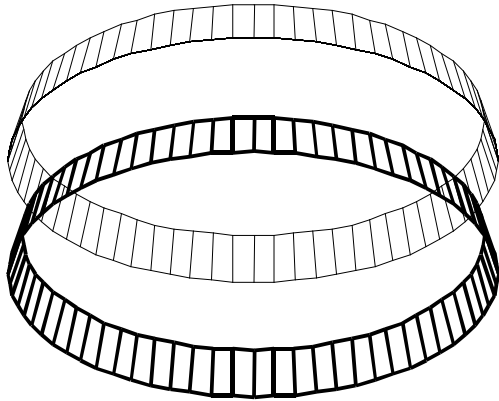
1. Die Elementverschiebungsansätze sollen *konstante Verzerrungszustände* repräsentieren können.
2. Die Bedingungen der *Konformität* sollen durch die Verschiebungsansätze erfüllt werden können.
3. Aufgrund von *Starrkörperverschiebungen* dürfen keine Spannungen im Element entstehen.

Punkt 1 ist erfüllt, wenn der Grad der gewählten Polynomansatzfunktion mindestens gleich der höchsten im Verzerrungsausdruck auftretenden Ableitung ist. Bei den vorliegenden Ringelementen treten im 2. Verzerrungstensor der Mittelfläche  $\beta_{\alpha\beta}$  zweite Ableitungen der Verschiebungen auf. In Meridianrichtung werden als Ansatzfunktionen für die Verschiebungen kubische Polynome verwendet, so dass dieses Kriterium eingehalten ist. Im Rahmen von isoparametrischen Elementkonzepten (Approximation der Geometrie und des Verformungszustandes durch die gleichen Ansatzfunktionen) dient der Patchtest [73], [136] zur Überprüfung der Einhaltung dieses Kriteriums. Dabei werden einem verzerrten Netz aus wenigen Elementen derartige Verschiebungszustände aufgeprägt, dass sich nach der analytischen Lösung konstante Verzerrungs-

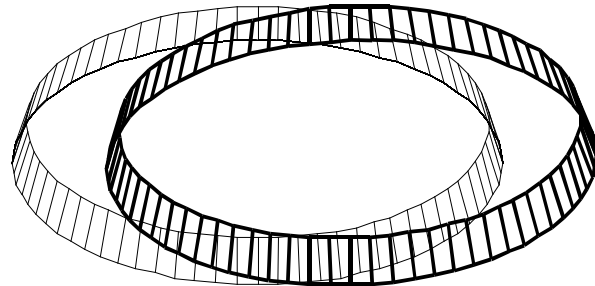
zustände einstellen. Kann diese analytische Lösung mit dem verzerrten Elementnetz erzielt werden, so ist der Patchtest bestanden und somit eine Konvergenz der numerischen Lösung gegen die exakte Lösung im allgemeinen Fall bei Verfeinerung eines Elementnetzes sichergestellt, da sich konstante Verzerrungszustände darstellen lassen. Punkt 2 soll die Verträglichkeit zwischen den Rändern benachbarter Elemente sicherstellen und wird durch die Verwendung vollständiger kubischer Polynome in Meridianrichtung (Stetigkeit der Verschiebungen und Verdrehungen) sowie unendlich oft stetig differenzierbarer harmonischer Ansätze in Ringrichtung für die Ringelemente erreicht. Durch die Wahl von harmonischen Funktionen zur Darstellung der Verformungen in Umfangsrichtung sind Überlappungen oder Klaffungen zwischen zwei Elementen ausgeschlossen. Punkt 3 stellt die größten Probleme dar: Schalenelemente, welche in krummlinigen konvektiven Koordinaten  $\theta^1, \theta^2$  (im Gegensatz zu isoparametrischen Elementen [6], [136], bei denen zusätzlich zu den Verformungen auch die Geometrie approximiert wird) formuliert sind, können dieses Kriterium häufig nicht oder nur unter Schwierigkeiten erfüllen. Die Begründung liegt in den transzendenten Lösungsfunktionen, die durch Polynomansätze nur unzureichend angenähert werden können [5]. Die Vorläufer des von ECKSTEIN entwickelten und im Rahmen dieser Arbeit erweiterten Ringelements wiesen Schwierigkeiten in der Erfüllung dieses Kriteriums auf.

Grundsätzlich lässt sich die Einhaltung des Starrkörperkriteriums über eine Eigenwertanalyse der Steifigkeitsmatrix überprüfen. Im Idealfall, falls durch die Ansatzfunktionen alle Starrkörperverschiebungen spannungsfrei ausgedrückt werden können, müssen im allgemeinen räumlichen Falle die ersten 6 Eigenwerte der Elementsteifigkeitsmatrix zu Null werden, wobei die zugehörigen Eigenvektoren gerade die Starrkörperbewegungen darstellen [6]. Physikalisch bedeutet dies, dass das Produkt aus Steifigkeitsmatrix und Starrkörperverformungen keine Knotenkräfte zur Folge haben darf, so dass die zu den Starrkörperverformungen gehörenden Eigenwerte verschwinden. Für ein Ringelement mit Krümmung in Meridianrichtung sind einige ausgewählte Eigenformen der Steifigkeitsmatrizen aus unterschiedlichen Umfangsansätzen (Umfangswellen) im Bild 5.1 dargestellt. Die 6 Eigenwerte im allgemeinen räumlichen Fall reduzieren sich aufgrund der Symmetrieebene  $x^2 = 0$ : Übrig bleiben eine Verschiebung des Ringelements in vertikaler Richtung (Umfangswelle 0) sowie eine horizontale Verschiebung (Umfangswelle 1), darüber hinaus noch zwei Eigenformen für das Kippen um zwei horizontale Achsen (Umfangswelle 1). Antimetrische Verformungszustände werden durch die Ansätze des vorliegenden Ringelements nicht wiedergegeben (Rotation um Vertikalachse, zweite Horizontalverschiebung und Rotationen um orthogonale horizontale Achsen), da Symmetrie bei der Herleitung vorausgesetzt worden ist. Es fällt auf, dass die beiden letzten Eigenwerte nicht genau zu Null werden; hält man sich aber die Größenordnung der höheren Eigenwerte mit Elementverzerrungen oder die des höchsten Eigenwerts  $\lambda_{(12)}$  vor Augen, die alle in der Größenordnung  $10^6$  bis  $10^8$  liegen,

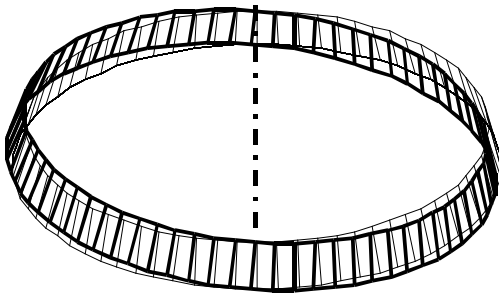
Umfangswelle 0  
 Eigenvektor 1 (vertikal)  
 $\lambda_{(1)} = 0$  ( $\lambda_{(12)} = 5,8 \cdot 10^8$ )



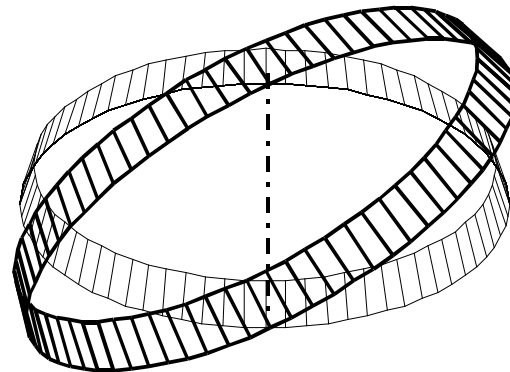
Umfangswelle 1  
 Eigenvektor 1 (horizontal)  
 $\lambda_{(1)} = 0$  ( $\lambda_{(12)} = 2,9 \cdot 10^8$ )



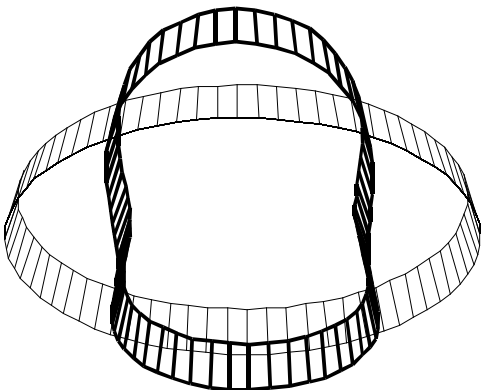
Umfangswelle 1  
 Eigenvektor 2 (Drehung)  
 $\lambda_{(2)} = 346$  ( $\lambda_{(12)} = 2,9 \cdot 10^8$ )



Umfangswelle 1  
 Eigenvektor 3 (Drehung)  
 $\lambda_{(3)} = -408$  ( $\lambda_{(12)} = 2,9 \cdot 10^8$ )



Umfangswelle 2  
 Eigenvektor 1 (dehnungslose Verb.)  
 $\lambda_{(1)} = 81$  ( $\lambda_{(12)} = 2,9 \cdot 10^8$ )



$$R = -15,3644 + 51,9644 \sqrt{1 + \left[ \frac{Z - 115,83}{113,9896} \right]^2}$$

$$Z_u = 20 \text{ m} \quad R_u = 52,52 \text{ m}$$

$$Z_o = 30 \text{ m} \quad R_o = 49,68 \text{ m}$$

$$E = 3,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \quad \nu = 0,2 \quad h = 0,30 \text{ m}$$

Bild 5.1 Ausgesuchte Eigenwerte der Steifigkeitsmatrizen

so kann dies ebenso als numerisch Null angesehen werden. Weiterhin auffällig ist der erste Eigenwert und die zugehörige Eigenform bei einem Verschiebungsansatz in der zweiten Umfangswelle. Dieser liegt ebenso sehr nahe bei Null und gibt einen Zustand mit dehnungsloser Verbiegung wieder, d.h. die Verzerrungen der Mittelfläche werden zu Null, es treten nur Verkrümmungen mit korrespondierenden Biegemomenten auf. Deshalb ist auch der zugehörige Eigenwert so gering, da die Schale auf diese Art von Verformungen aufgrund der im Vergleich zur Dehnsteifigkeit geringen Biegesteifigkeit sehr weich reagiert. Die zugehörige Eigenform, die ebenso im Bild 5.1 dargestellt ist, bestätigt dies. Dehnungslose Verbiegungszustände können mit Ringelementen im Gegensatz zu herkömmlichen 2D Schalenelementen ausgezeichnet wiedergegeben werden, da in Ringrichtung harmonische Reihenansätze verwendet werden, so dass die Ringverzerrungen nach der Differentiation mit gleicher Genauigkeit wie das Verschiebungsfeld dargestellt werden.

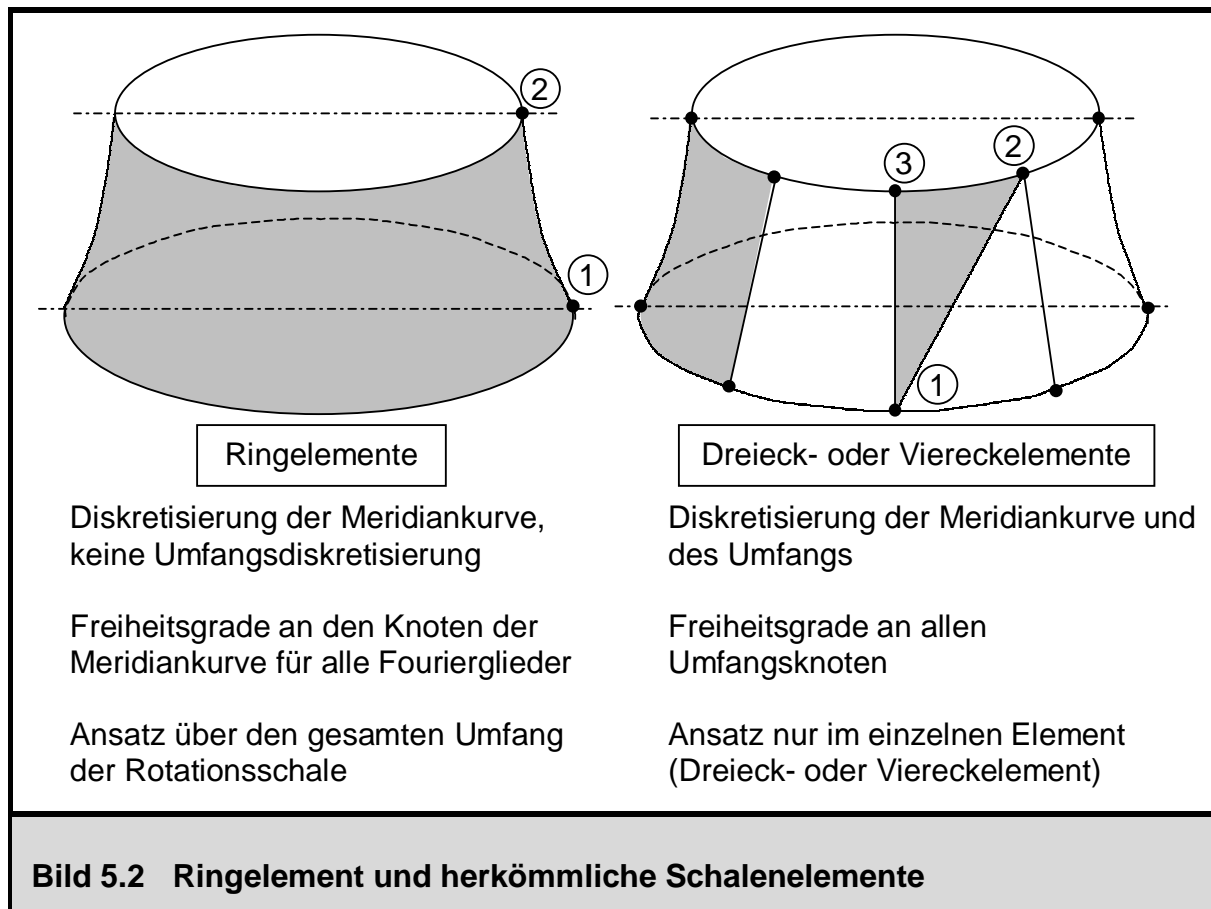
Es sollen jedoch keine weiteren ausführlichen Untersuchungen über die Erfüllung der Anforderungen an Finite Elemente durch die Ringelemente gemacht werden. Das im Rahmen dieses Kapitels vorgestellte und erweiterte Ringelement mit seinen Verschiebungsansätzen und Freiheitsgraden wurde nach einem Vergleich mit zwei anderen Ringelementen nach umfangreichen Testrechnungen ausgewählt [42] und hat sich bereits für den Einsatz bei linearen Berechnungen vollkommen bewährt.

## 5.2.2 Grundprinzip der Ringelemente

Zunächst soll nochmals die Besonderheit von Ringelementen am Beispiel von Schalenringelementen herausgestellt werden. Im Gegensatz zu herkömmlichen Schalenelementen wird der gesamte Umfang mit nur einem Element abgebildet. Die Diskretisierung einer Rotationsschale in Umfangsrichtung entfällt somit, lediglich die Meridianrichtung muss in einzelne Ringelemente unterteilt werden. Die Verformungen in Umfangsrichtung werden dabei über Fourierreihen dargestellt, die Ordnung des Ansatzes wird durch die Anzahl der Umfangswellen  $n_{\max}$  gesteuert, die benutzerdefiniert vorgegeben wird. Im Vektor der Elementfreiheitsgrade des Ringelements werden somit alle Fourierglieder der Freiheitsgrade abgespeichert. Auf diese Art können gemäß Gleichung (5.1) die Verformungen an beliebigen Umfangsstellen bestimmt werden.

$$\begin{bmatrix} u_1(\theta^1) \\ u_2(\theta^1) \\ u_3(\theta^1) \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \begin{bmatrix} {}^n u_1 \cdot \sin(n\theta^1) \\ {}^n u_2 \cdot \cos(n\theta^1) \\ {}^n u_3 \cdot \cos(n\theta^1) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$





In Gleichung (5.1) ist bereits die Einschränkung eingeflossen, dass die Ebene  $x^2 = 0$  eine Symmetrieebene ist. Daraus folgt, dass die symmetrischen Anteile des Verformungsvektors  $u_2$  und  $u_3$  mit dem Faktor  $\cos(n\theta^1)$  behaftet sind, wohingegen der Faktor  $\sin(n\theta^1)$  die Komponente  $u_1$  multipliziert. Die im Rahmen dieser Arbeit erweiterten Ringelemente verwenden diese Einschränkung bezüglich der Symmetrieebene, ansonsten würde sich die Zahl der Freiheitsgrade durch Abspeicherung der korrespondierenden Anteile (Sinus Anteile der  $u_2$  und  $u_3$  Verformungen und Cosinus Anteile der  $u_1$  Verformungen) auf das Doppelte erhöhen. Anhand von Bild 5.2 wird der Unterschied zwischen herkömmlichen Dreieck- oder Viereckschalenelementen und Ringelementen nochmals herausgestellt.

### 5.2.3 Inkrementelle Formulierung

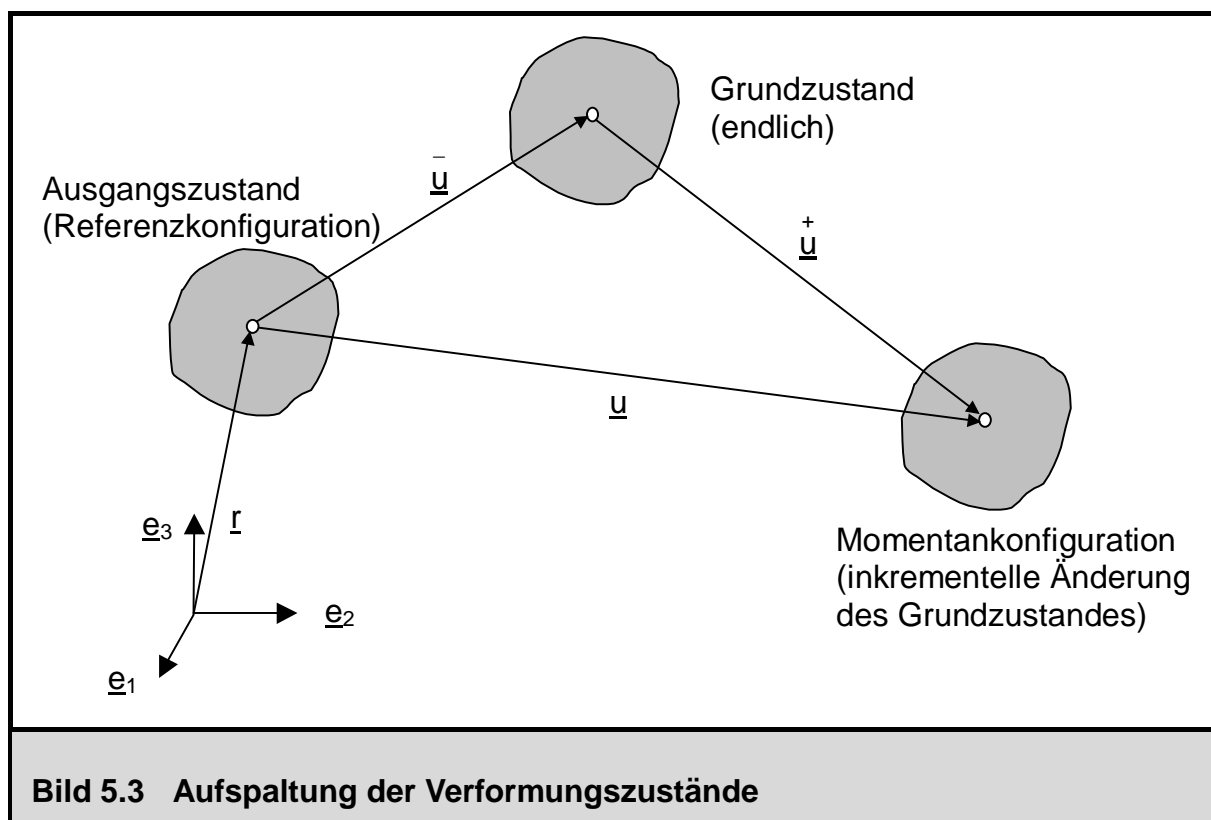
Die Lösung von nichtlinearen Problemstellungen erfolgt im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe der Finiten Elemente Methode durch Anwendung von inkrementell iterativen Lösungsverfahren. Gemäß Bild 5.3 werden die Gesamtverformungen  $\underline{u}$  dazu in einen endlichen Anteil, die Verformungen des Grundzustands  $\bar{\underline{u}}$ , und in einen infinitesimal kleinen Zuwachs, die Verformungsinkremente  $\underline{\underline{u}}$ , zerlegt (5.2). Eine Berücksichtigung

von Imperfektionen erfolgt im Rahmen dieser Arbeit nicht, stellt aber hinsichtlich der aufgezeigten Formulierung keine grundsätzlichen Probleme dar. Durch eine Zwischenstufe zwischen Referenzkonfiguration und Grundzustand können diese berücksichtigt werden [58], [41], [66]. Eine völlig analoge Aufspaltung in Größen des Grundzustands und Inkremente erfolgt für die diskreten Knotenfreiheitsgrade  $\underline{v}$  bei der Einführung der Verschiebungsansätze für die unbekanntenen Feldverformungen.

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} + \underline{\bar{u}}^+ \quad (5.2)$$

$$\delta \underline{u} = \delta \underline{\bar{u}}^+ \quad (5.3)$$

Der 1. Verzerrungstensor der Mittelfläche (4.30) wird unter Anwendung der inkrementellen Formulierung der Verschiebungen in seine linearen und nichtlinearen Anteile aufgespalten (5.4), der 2. Verzerrungstensor (4.31) enthält bei einer Theorie kleiner Rotationen nur lineare Anteile, so dass sich dessen Aufspaltung nach Gleichung (5.11) ergibt. Die nachfolgenden Beziehungen sind mit Hilfe der Verschiebungsgradienten (4.16), (4.17) und (4.19) ausgedrückt, die wahlweise mit den Verschiebungen des Grundzustands (Kopfzeiger  $-$ ) oder den inkrementellen Verschiebungen (Kopfzeiger  $+$ ) ausgewertet werden.



$$\alpha_{\alpha\beta} = \bar{\alpha}_{\alpha\beta} + \overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} + \overset{++}{\alpha}_{\alpha\beta} \tag{5.4}$$

$$\delta\alpha = \delta\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} + \delta\overset{++}{\alpha}_{\alpha\beta} \tag{5.5}$$

$$\bar{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\bar{\varphi}_{\alpha\beta} + \bar{\varphi}_{\beta\alpha} + \bar{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \bar{\varphi}_{\lambda\beta} + \bar{\varphi}_{3\alpha} \bar{\varphi}_{3\beta}] \tag{5.6}$$

$$\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\overset{+}{\varphi}_{\alpha\beta} + \overset{+}{\varphi}_{\beta\alpha} + \overset{+}{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \bar{\varphi}_{\lambda\beta} + \overset{+}{\varphi}_{3\alpha} \bar{\varphi}_{3\beta} + \bar{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \overset{+}{\varphi}_{\lambda\beta} + \bar{\varphi}_{3\alpha} \overset{+}{\varphi}_{3\beta}] \tag{5.7}$$

$$\delta\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\delta\overset{+}{\varphi}_{\alpha\beta} + \delta\overset{+}{\varphi}_{\beta\alpha} + \delta\overset{+}{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \bar{\varphi}_{\lambda\beta} + \delta\overset{+}{\varphi}_{3\alpha} \bar{\varphi}_{3\beta} + \bar{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \delta\overset{+}{\varphi}_{\lambda\beta} + \bar{\varphi}_{3\alpha} \delta\overset{+}{\varphi}_{3\beta}] \tag{5.8}$$

$$\overset{++}{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\overset{+}{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \overset{+}{\varphi}_{\lambda\beta} + \overset{+}{\varphi}_{3\alpha} \overset{+}{\varphi}_{3\beta}] \tag{5.9}$$

$$\delta\overset{++}{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\delta\overset{+}{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \overset{+}{\varphi}_{\lambda\beta} + \delta\overset{+}{\varphi}_{3\alpha} \overset{+}{\varphi}_{3\beta} + \overset{+}{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \delta\overset{+}{\varphi}_{\lambda\beta} + \overset{+}{\varphi}_{3\alpha} \delta\overset{+}{\varphi}_{3\beta}] \tag{5.10}$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \bar{\beta}_{\alpha\beta} + \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta} \tag{5.11}$$

$$\delta\beta_{\alpha\beta} = \delta\beta_{\alpha\beta}^+ \quad (5.12)$$

$$\bar{\beta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\bar{\psi}_{\alpha\beta} + \bar{\psi}_{\beta\alpha} - \bar{\varphi}_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - \bar{\varphi}_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] \quad (5.13)$$

$$+\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[+\psi_{\alpha\beta} + +\psi_{\beta\alpha} - +\varphi_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - +\varphi_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] \quad (5.14)$$

$$\delta +\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\delta +\psi_{\alpha\beta} + \delta +\psi_{\beta\alpha} - \delta +\varphi_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - \delta +\varphi_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] \quad (5.15)$$

Der 1. Verzerrungstensor der Mittelfläche lässt sich demnach in die ausschließlich von den Verformungen des Grundzustands abhängigen Verzerrungsanteile  $\bar{\alpha}_{\alpha\beta}$ , in die von den inkrementellen Verschiebungen linear abhängigen Verzerrungsanteile  $+\alpha_{\alpha\beta}$  sowie in die von den inkrementellen Verschiebungen quadratisch abhängigen Verzerrungsanteile  $++\alpha_{\alpha\beta}$  aufspalten. Eine Aufspaltung des 2. Verzerrungstensors im Rahmen der Theoriestufe kleiner Rotationen hingegen erfolgt nur in die Verzerrungsanteile  $\bar{\beta}_{\alpha\beta}$  und  $+\beta_{\alpha\beta}$ .

Die materiellen Zeitableitungen der Verzerrungsmaße sind in den Gleichungen (5.16) bis (5.22) angegeben. Sie lassen sich ebenso in Größen des Grundzustands, in linear von den inkrementellen Geschwindigkeiten und in quadratisch von den inkrementellen Geschwindigkeiten abhängige Größen aufspalten.

$$\dot{\alpha}_{\alpha\beta} = \dot{\alpha}_{\alpha\beta}^- + \dot{\alpha}_{\alpha\beta}^+ + \dot{\alpha}_{\alpha\beta}^{++} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{\dot{\alpha}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} & [\bar{\dot{\varphi}}_{\alpha\beta} + \bar{\dot{\varphi}}_{\beta\alpha} \\ & + \bar{\dot{\varphi}}_{\alpha}^{\lambda} \bar{\varphi}_{\lambda\beta} + \bar{\dot{\varphi}}_{3\alpha} \bar{\varphi}_{3\beta} + \bar{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \bar{\dot{\varphi}}_{\lambda\beta} + \bar{\varphi}_{3\alpha} \bar{\dot{\varphi}}_{3\beta}] \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \overset{+}{\dot{\alpha}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} & [\overset{+}{\dot{\varphi}}_{\alpha\beta} + \overset{+}{\dot{\varphi}}_{\beta\alpha} \\ & + \overset{+}{\dot{\varphi}}_{\alpha}^{\lambda} \bar{\varphi}_{\lambda\beta} + \overset{+}{\dot{\varphi}}_{3\alpha} \bar{\varphi}_{3\beta} + \bar{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \overset{+}{\dot{\varphi}}_{\lambda\beta} + \bar{\varphi}_{3\alpha} \overset{+}{\dot{\varphi}}_{3\beta} \\ & + \overset{+}{\dot{\varphi}}_{\alpha}^{\lambda} \bar{\dot{\varphi}}_{\lambda\beta} + \overset{+}{\dot{\varphi}}_{3\alpha} \bar{\dot{\varphi}}_{3\beta} + \bar{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \overset{+}{\dot{\varphi}}_{\lambda\beta} + \bar{\varphi}_{3\alpha} \overset{+}{\dot{\varphi}}_{3\beta}] \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\overset{++}{\dot{\alpha}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\overset{+}{\dot{\varphi}}_{\alpha}^{\lambda} \overset{+}{\varphi}_{\lambda\beta} + \overset{+}{\dot{\varphi}}_{3\alpha} \overset{+}{\varphi}_{3\beta} + \overset{+}{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \overset{+}{\dot{\varphi}}_{\lambda\beta} + \overset{+}{\varphi}_{3\alpha} \overset{+}{\dot{\varphi}}_{3\beta}] \quad (5.19)$$

$$\dot{\beta}_{\alpha\beta} = \bar{\dot{\beta}}_{\alpha\beta} + \overset{+}{\dot{\beta}}_{\alpha\beta} \quad (5.20)$$

$$\bar{\dot{\beta}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\bar{\dot{\psi}}_{\alpha\beta} + \bar{\dot{\psi}}_{\beta\alpha} - \bar{\dot{\varphi}}_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - \bar{\dot{\varphi}}_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] \quad (5.21)$$

$$\overset{+}{\dot{\beta}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [\overset{+}{\dot{\psi}}_{\alpha\beta} + \overset{+}{\dot{\psi}}_{\beta\alpha} - \overset{+}{\dot{\varphi}}_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - \overset{+}{\dot{\varphi}}_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] \quad (5.22)$$

Eine analoge Zerlegung wird für die Schnittgrößen  $\tilde{n}^{\alpha\beta}$  und  $m^{\alpha\beta}$  gemäß der Beziehungen (5.23) und (5.24) mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung, die nach dem linearen

Glied abgebrochen wird, durchgeführt. Bei der Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen sollen nur Arbeitsausdrücke, die maximal von den Verschiebungs- oder Geschwindigkeitsinkrementen quadratisch abhängig sind, berücksichtigt werden, so dass die inkrementellen Schnittgrößen nur von den in den inkrementellen Verschiebungen und in den inkrementellen Geschwindigkeiten linearen Verzerrungsanteilen abhängig sind.

$$\begin{aligned}
\tilde{n}^{\alpha\beta}(\alpha_{\lambda\rho}, \beta_{\lambda\rho}, \dot{\alpha}_{\lambda\rho}, \dot{\beta}_{\lambda\rho}) &= \bar{n}^{\alpha\beta}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \\
&+ \frac{\partial \tilde{n}^{\alpha\beta}}{\partial \alpha_{\lambda\rho}}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \cdot \overset{+}{\alpha}_{\lambda\rho} \\
&+ \frac{\partial \tilde{n}^{\alpha\beta}}{\partial \beta_{\lambda\rho}}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \cdot \overset{+}{\beta}_{\lambda\rho} \\
&+ \frac{\partial \tilde{n}^{\alpha\beta}}{\partial \dot{\alpha}_{\lambda\rho}}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \cdot \overset{+}{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho} \\
&+ \frac{\partial \tilde{n}^{\alpha\beta}}{\partial \dot{\beta}_{\lambda\rho}}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \cdot \overset{+}{\dot{\beta}}_{\lambda\rho} \\
&= \bar{n}^{\alpha\beta} + \overset{+}{\tilde{n}}^{\alpha\beta} + \overset{+}{\tilde{n}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
\bar{m}^{\alpha\beta}(\alpha_{\lambda\rho}, \beta_{\lambda\rho}, \dot{\alpha}_{\lambda\rho}, \dot{\beta}_{\lambda\rho}) &= \bar{m}^{\alpha\beta}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \\
&+ \frac{\partial \bar{m}^{\alpha\beta}}{\partial \alpha_{\lambda\rho}}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \cdot \overset{+}{\alpha}_{\lambda\rho} \\
&+ \frac{\partial \bar{m}^{\alpha\beta}}{\partial \beta_{\lambda\rho}}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \cdot \overset{+}{\beta}_{\lambda\rho} \\
&+ \frac{\partial \bar{m}^{\alpha\beta}}{\partial \dot{\alpha}_{\lambda\rho}}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \cdot \overset{+}{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho} \\
&+ \frac{\partial \bar{m}^{\alpha\beta}}{\partial \dot{\beta}_{\lambda\rho}}(\bar{\alpha}_{\lambda\rho}, \bar{\beta}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho}, \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho}) \cdot \overset{+}{\dot{\beta}}_{\lambda\rho} \\
&= \bar{m}^{\alpha\beta} + \overset{+}{\bar{m}}^{\alpha\beta} + \overset{+}{\bar{m}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Mit den aufgezeigten Zerlegungen der Verzerrungen und Schnittgrößen in die ein-

zelenen Anteile werden die virtuellen inneren (5.25) und äußeren Arbeiten (5.26) in inkrementeller Darstellung ausgedrückt. Die Variation  $\delta(\bar{\quad})$  bezüglich des bekannten Grundzustands verschwindet, höhere als in den Inkrementen quadratische Anteile der inkrementellen Verzerrungen werden vernachlässigt.

$$\begin{aligned} \delta A_i = & - \iint_A [\bar{n}^{\alpha\beta} + \overset{+}{n}^{\alpha\beta} + \overset{+}{n}^{\alpha\beta}] \delta(\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} + \overset{++}{\alpha}_{\alpha\beta}) dA \\ & - \iint_A [\bar{m}^{\alpha\beta} + \overset{+}{m}^{\alpha\beta} + \overset{+}{m}^{\alpha\beta}] \delta \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta} dA \\ & - \iint_A [k_t a^{\alpha\beta} [\bar{u}_\alpha + \overset{+}{u}_\alpha] \delta \overset{+}{u}_\beta + k_n [\bar{u}_3 + \overset{+}{u}_3] \delta \overset{+}{u}_3] dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta A_i = & - \iint_A [\bar{n}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} + \bar{m}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}] dA \\ & - \iint_A [k_t a^{\alpha\beta} \bar{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + k_n \bar{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \\ & - \iint_A [\overset{+}{n}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} + \overset{+}{m}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}] dA \\ & - \iint_A [\overset{+}{n}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} + \overset{+}{m}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}] dA \\ & - \iint_A [k_t a^{\alpha\beta} \overset{+}{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + k_n \overset{+}{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \\ & - \iint_A [\bar{n}^{\alpha\beta} \delta \overset{++}{\alpha}_{\alpha\beta}] dA \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
\delta A_a = & \iint_A [p^\alpha \delta \overset{+}{u}_\alpha + p^3 \delta \overset{+}{u}_3 + s^\alpha \delta \overset{+}{\omega}_\alpha] dA \\
& + \oint_C [n^\alpha \delta \overset{+}{u}_\alpha + n^3 \delta \overset{+}{u}_3 + m^\alpha \delta \overset{+}{\omega}_\alpha] dC \\
& - \iint_A \rho h \cdot [a^{\alpha\beta} \cdot [\bar{u}_\alpha + \overset{+}{u}_\alpha] \delta \overset{+}{u}_\beta + [\bar{u}_3 + \overset{+}{u}_3] \delta \overset{+}{u}_3] dA \\
& - \iint_A [c_t \cdot a^{\alpha\beta} \cdot [\dot{\bar{u}}_\alpha + \dot{\overset{+}{u}}_\alpha] \delta \overset{+}{u}_\beta + c_n \cdot [\dot{\bar{u}}_3 + \dot{\overset{+}{u}}_3] \delta \overset{+}{u}_3] dA
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta A_a = & \iint_A [p^\alpha \delta \overset{+}{u}_\alpha + p^3 \delta \overset{+}{u}_3 + s^\alpha \delta \overset{+}{\omega}_\alpha] dA \\
& + \oint_C [n^\alpha \delta \overset{+}{u}_\alpha + n^3 \delta \overset{+}{u}_3 + m^\alpha \delta \overset{+}{\omega}_\alpha] dC \\
& - \iint_A \rho h \cdot [a^{\alpha\beta} \cdot \bar{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + \bar{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \\
& - \iint_A [c_t \cdot a^{\alpha\beta} \cdot \dot{\bar{u}}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + c_n \cdot \dot{\bar{u}}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \\
& - \iint_A \rho h \cdot [a^{\alpha\beta} \cdot \overset{+}{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + \overset{+}{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \\
& - \iint_A [c_t \cdot a^{\alpha\beta} \cdot \dot{\overset{+}{u}}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + c_n \cdot \dot{\overset{+}{u}}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Nach diesen Vorarbeiten und Sortieren der einzelnen Terme kann das Prinzip der virtuellen Arbeiten in inkrementeller Form angeschrieben werden, welches direkt auf die Bewegungsgleichung in inkrementeller Form (5.27) führt.



$$\delta A_i + \delta A_a = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{[\underline{K}_{ev} + \underline{K}_g]}_{\underline{K}_t} \cdot \underline{\overset{+}{V}} + \underline{C} \cdot \underline{\overset{+}{\dot{V}}} + \underline{M} \cdot \underline{\overset{+}{\ddot{V}}} = \underbrace{\underline{P}_a - \underline{P}_i - \underline{P}_{ca} - \underline{P}_m}_{\underline{\overset{+}{P}}} \quad (5.27)$$

- mit:
- $\underline{K}_t$  - tangentielle Steifigkeitsmatrix
  - $\underline{K}_{ev}$  - elastische Steifigkeitsmatrix (mit Anfangsverformungen) (5.28)
  - $\underline{K}_g$  - geometrische Steifigkeitsmatrix (5.29)
  - $\underline{C}$  - Dämpfungsmatrix (innere und äußere Dämpfung) (5.30)
  - $\underline{M}$  - Massenmatrix (5.31)
  - $\underline{\overset{+}{V}}$  - Vektor der inkrementellen Knotenverformungen
  - $\underline{\overset{+}{\dot{V}}}$  - Vektor der inkrementellen Knotengeschwindigkeiten
  - $\underline{\overset{+}{\ddot{V}}}$  - Vektor der inkrementellen Knotenbeschleunigungen
  - $\underline{P}_a$  - Vektor der äußeren Knotenkräfte (5.32)
  - $\underline{P}_i$  - Vektor der inneren Knotenkräfte (5.33) inkl. Materialdämpfung
  - $\underline{P}_{ca}$  - Vektor der äußeren Dämpfungskräfte (5.34)
  - $\underline{P}_m$  - Vektor der Trägheitskräfte (5.35)
  - $\underline{\overset{+}{P}}$  - Vektor der Ungleichgewichtskräfte (Residuum)

$$\underline{K}_{ev} = \iint_A [\tilde{n}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} + \overset{+}{m}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}] dA$$

$$+ \iint_A [k_t a^{\alpha\beta} \overset{+}{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + k_n \overset{+}{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \quad (5.28)$$

$$\underline{K}_g = \iint_A [\bar{n}^{\alpha\beta} \delta \overset{++}{\alpha}_{\alpha\beta}] dA \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \iint_A [\tilde{n}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} + \tilde{m}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}] dA \\ &+ \iint_A [c_t a^{\alpha\beta} \overset{+}{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + c_n \overset{+}{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\underline{M} = \iint_A \rho h \cdot [a^{\alpha\beta} \overset{+}{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + \overset{+}{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \underline{P}_a &= \iint_A [p^\alpha \delta \overset{+}{u}_\alpha + p^3 \delta \overset{+}{u}_3 + s^\alpha \delta \overset{+}{\omega}_\alpha] dA \\ &+ \oint_C [n^\alpha \delta \overset{+}{u}_\alpha + n^3 \delta \overset{+}{u}_3 + m^\alpha \delta \overset{+}{\omega}_\alpha] dC \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \underline{P}_i &= \iint_A [\bar{n}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} + \bar{m}^{\alpha\beta} \delta \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}] dA \\ &+ \iint_A [k_t a^{\alpha\beta} \bar{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + k_n \bar{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\underline{P}_{ca} = \iint_A [c_t a^{\alpha\beta} \bar{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + c_n \bar{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \quad (5.34)$$

$$\underline{P}_m = \iint_A \rho h \cdot [a^{\alpha\beta} \bar{u}_\alpha \delta \overset{+}{u}_\beta + \bar{u}_3 \delta \overset{+}{u}_3] dA \quad (5.35)$$

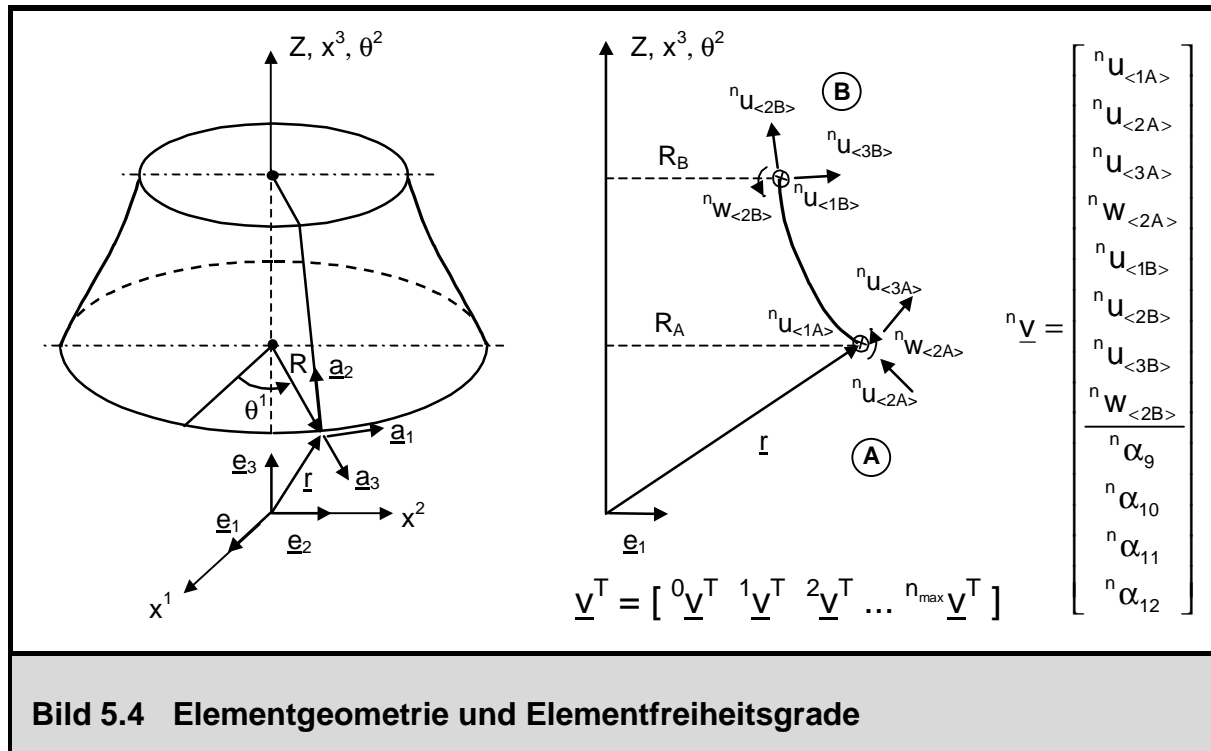
Mit Hilfe von geeigneten Iterationsverfahren, die im Abschnitt 5.5 erläutert werden, müssen die inkrementellen Zuwächse in den Verformungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ausgehend von einem bekannten Zustand berechnet und so lange verbessert werden, bis ein neuer Gleichgewichtszustand aufgefunden ist. Der neue Gleichgewichtszustand zeichnet sich dadurch aus, dass die Ungleichgewichtskräfte auf der rechten Seite der Gleichung (5.27) gegen Null streben und somit auch die Zuwächse in den Bewegungsgrößen. Zur Lösung dynamischer Problemstellungen sind weiterhin besondere Zeitintegrationsverfahren erforderlich, die die Zeitableitungen der Verschiebungen durch algebraische Ausdrücke (Differenzenquotienten) ersetzen. Auf diese Lösungsverfahren wird im Kapitel 6 eingegangen.

Nachdem nun die inkrementelle Vorgehensweise in allgemeiner Form mit den zu Beginn des Kapitels 4 getroffenen Einschränkungen bezüglich der gewählten Theoriestufe erläutert worden ist, werden in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels die Herleitungen und Erweiterungen eines Ringelements, basierend auf dem Forschungsbericht von ECKSTEIN et al. [42], vorgeführt.

## 5.3 Geometrische Beziehungen für das Schalenringelement

### 5.3.1 Beschreibung der Geometrie

Im Bild 5.4 ist ein doppelt gekrümmtes Schalenringelement mit seinen 8 physikalischen und 4 tensoriellen Freiheitsgraden (für ein einzelnes Fourierglied) abgebildet. Die 12 Freiheitsgrade sind für eine gewisse Anzahl von Umfangsharmonischen (Index  $n$ ) definiert, die bei der Berechnung vom Benutzer zur Wahl der Ordnung des Ansatzes in Umfangsrichtung festgelegt werden muss. Zur Beschreibung der Geometrie ist die Gleichung der Meridiankurve als Geometriefunktion erforderlich, diese liefert zu einer bestimmten Höhenkoordinate  $Z$  den zugehörigen Radius  $R$  sowie die Ableitungen der Meridiankurve  $R_{,2}$ ,  $R_{,22}$  und  $R_{,222}$ . Mit diesen Größen ist es möglich, die Metrikgrößen, Krümmungsgrößen und Christoffelsymbole gemäß Tafel 4.1 für die gegebene Rotationsschalengeometrie aufzubauen. Für das konische Ringelement wird die Meridiankurve elementweise als Gerade angenähert, die erste Ableitung der Meridiankurve wird gemäß Gleichung (5.36) als Differenzenquotient berechnet und ist somit im Element konstant, sämtliche höhere Ableitungen verschwinden.



$$R_{,2} = \frac{\Delta R}{\Delta Z} \quad \text{für das konische Ringelement} \quad (5.36)$$

Zusätzlich zu den Knotenkoordinaten  $R$  und  $Z$  der Meridiankurve wird die Geometrie der Meridiankurve abgespeichert. Somit können die Geometriegrößen auch innerhalb des Elements (an den Integrationspunkten) berechnet werden, was zur Aufstellung der Elementmatrizen für das doppelt gekrümmte Schalenringelement unerlässlich ist. Für das konische Ringelement sind diese Zusatzinformationen nicht erforderlich, da sämtliche Geometriegrößen aus den Knotenkoordinaten der Meridiankurve berechnet werden können.

### 5.3.2 Ansätze für die unbekanntes Feldverschiebungen

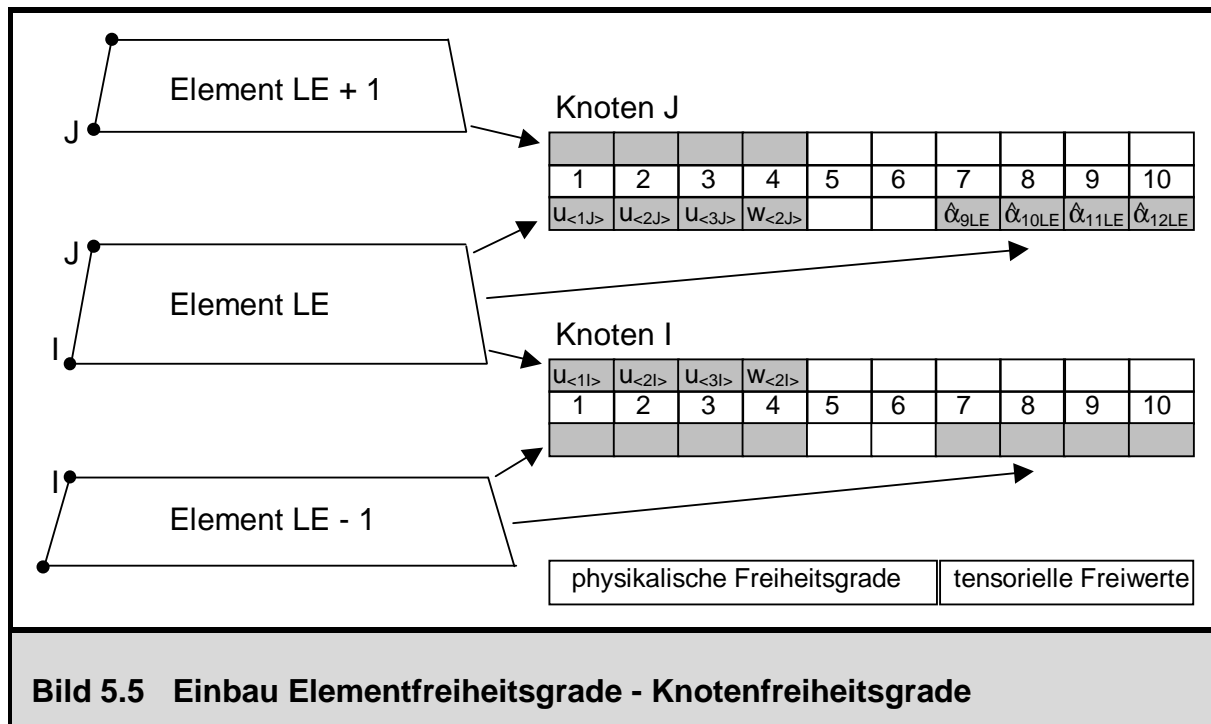
Zur Approximation der tensoriellen Elementverschiebungen in Meridianrichtung werden sowohl für die tangentialen Verschiebungskomponenten  $u_1$  und  $u_2$  als auch für die zur Schalenmittelfläche normale Verschiebungskomponente  $u_3$  kubische Polynomansätze gemacht. Diese Ansätze haben sich bereits für lineare Berechnungen bewährt und sind nach Vergleichsrechnungen ausgewählt worden [42]. Damit lassen sich die unbekanntes tensoriellen Elementverformungen gemäß Gleichung (5.37) ausdrücken. Aufgrund der kubischen Ansatzfunktionen sind pro Fourierglied des Reihenansatzes in Umfangsrichtung 12 Ansatzfreiwerte erforderlich.



2. Durch Einführung der Verschiebungsableitungen  ${}^n u_{1,2}$  und  ${}^n u_{2,2}$  als Freiheitsgrade an beiden Knoten könnten weitere 4 Bestimmungsgleichungen gewonnen werden. Diese Bestimmungsgleichungen ergeben sich aus der Erfüllung der zusätzlich geschaffenen Randbedingungen durch den Verformungsansatz an den Elementknoten.
3. Durch Einführen von Zusatzknoten im Elementinnern könnten weitere Elementfreiheitsgrade und somit Bedingungen für den Verformungsansatz definiert werden.
4. Mit Hilfe einer Kondensation könnten die 12 Ansatzfreiwerte auf 8 Elementfreiheitsgrade reduziert werden.
5. Es werden nur 8 Ansatzfreiwerte auf die physikalischen Freiheitsgrade transformiert, die restlichen 4 Ansatzfreiwerte pro Element werden ohne Transformation auf freie Plätze in den globalen Systemmatrizen eingebaut.

Die Möglichkeiten 1 und 2 sind schon von ECKSTEIN et al. [42] verworfen worden, da sie schlechte Ergebnisse lieferten. Bei Einführung von zusätzlichen Verschiebungsableitungen (Möglichkeit 2) traten Schwierigkeiten an Geometrie- und Wanddickenunstetigkeiten auf. Möglichkeit 3 ist für die praktische Handhabbarkeit des Elementes nicht von Vorteil. Deshalb ist die statische Kondensation in der bisher vorliegenden Version der Ringelemente verwendet worden. Für lineare statische Berechnungen ergibt sich aus dem Kondensationsprozess eine konstante Beziehung zwischen den überzähligen Freiwerten und den Elementfreiheitsgraden. Bei nichtlinearen Problemstellungen müssten die Elementsteifigkeitsmatrizen vor der Kondensation abgespeichert werden, um im nächsten Schritt wieder auf die Inkremente der kondensierten Freiwerte zurückrechnen zu können. Weiterhin müssten die überzähligen Freiwerte aus dem letzten Schritt auf Elementebene abgespeichert werden.

Sollen bei nichtlinear elastischem Werkstoffverhalten im Nachlauf Schnittgrößen aus den Verformungen für beliebige Lastniveaus berechnet werden, müsste die Abspeicherung der kondensierten Ansatzfreiwerte elementweise für jeden Lastschritt erfolgen (Möglichkeit 4). Zu deren Berechnung muss ferner auf Elementebene die tangential Elementsteifigkeitsmatrix, die zur Kondensation verwendet worden ist, abgespeichert werden. Noch problematischer wird der Kondensationsprozess bei dynamischen Problemstellungen. Eine Näherungslösung wäre, die Trägheitsanteile bei der Kondensation zu vernachlässigen. Andernfalls müsste auch auf Elementebene ein Zeitintegrationsverfahren zur Berechnung der effektiven Steifigkeiten ablaufen, um die überzähligen Freiwerte zu eliminieren.



Um all diese Schwierigkeiten zu umgehen, wird bei den im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Erweiterungen der Ringelemente auf die Möglichkeit 5 zurückgegriffen: Den überzähligen Elementansatzfreiwerten werden freie Plätze in den globalen Systemmatrizen zugewiesen. Die überzähligen Elementfreiwerte sind somit Bestandteil der globalen Verformungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren. Deren Berechnung erfolgt nicht bei der Kondensation auf Elementebene, sondern bei der Lösung der globalen Steifigkeitsbeziehung. Daher müssen auch bei der Abspeicherung der überzähligen Freiwerte für den Programmnachlauf keine Sondervorkehrungen getroffen werden.

Bild 5.5 zeigt den Einbau der Elementfreiheitsgrade des Ringelements in die globalen Systemvektoren. Die 8 physikalischen Elementfreiheitsgrade werden wie bisher den Plätzen 1 – 4 der beiden Elementknoten zugeordnet. Den restlichen 4 tensoriellen Elementfreiwerten werden die Plätze 7 – 10 des 2. Elementknotens zugewiesen. Wichtig dabei ist, dass auf diese Plätze 7 – 10 eines Knotens nur die tensoriellen Freiwerte eines einzigen Elements eingebaut werden dürfen, da keine physikalischen Beziehungen zwischen den überzähligen tensoriellen Ansatzfreiwerten zweier Elemente bestehen. Probleme bei dieser Vorgehensweise entstehen daher lediglich bei verzweigten Strukturen, wenn zwei Teilschalen sich vereinigen und beide Elemente einen gemeinsamen 2. Elementknoten haben. Dieses Problem wird durch die Möglichkeit des Koppeln von Freiheitsgraden zweier Knoten beseitigt: An Verzweigungstellen müssen zwei koordinatengleiche Knoten definiert werden, wobei die physikalischen Freiheitsgrade der beiden Knoten durch Koppeln gleichgesetzt werden. Somit stehen für jedes der an der Verzweigungsstelle angrenzenden Elemente wieder getrennte

Speicherplätze in den globalen Systemvektoren für die tensoriellen Freiheitsgrade zur Verfügung.

Die Formmatrix  $\hat{\underline{\Phi}}$  aus Gleichung (5.38) ergibt sich aus der Erfüllung der 8 physikalischen Elementfreiheitsgrade als Randwerte durch die Ansatzfunktionen für die tensoriellen Verschiebungen (daher reihenweise Multiplikation von  $\hat{\underline{\Phi}}$  mit den kontravarianten Komponenten des Metrikensors der Knoten A und B zum Übergang auf physikalische Größen) nach Gleichung (5.38); diese Matrix ist natürlich unabhängig von der Umfangswelle der Ansatzfunktion in Umfangsrichtung. Wie man an der Einheitsuntermatrix erkennt, treten die überzähligen tensoriellen Ansatzfreiwerte unverändert im Vektor der Elementfreiheitsgrade wieder auf.

$$\underline{n}_v = \hat{\underline{\Phi}} \cdot \underline{n}_{\hat{u}} \quad (5.38)$$

mit:

$$\underline{n}_v = \begin{bmatrix} [ \begin{matrix} {}^n u_{\langle 1A \rangle} & {}^n u_{\langle 2A \rangle} & {}^n u_{\langle 3A \rangle} & {}^n w_{\langle 2A \rangle} \end{matrix} ]^T \\ [ \begin{matrix} {}^n u_{\langle 1B \rangle} & {}^n u_{\langle 2B \rangle} & {}^n u_{\langle 3B \rangle} & {}^n w_{\langle 2B \rangle} \end{matrix} ]^T \\ [ \begin{matrix} {}^n \alpha_9 & {}^n \alpha_{10} & {}^n \alpha_{11} & {}^n \alpha_{12} \end{matrix} ]^T \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{\Phi}} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{2A}^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{2B}^2 & -b_{2B}^2 & 0 & \frac{-1}{\Delta Z} & \frac{-2}{\Delta Z} & \frac{-3}{\Delta Z} & 0 & 0 & -b_{2B}^2 & -b_{2B}^2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot \sqrt{a_A^{11}} \\ \cdot \sqrt{a_A^{22}} \\ \cdot 1 \\ \cdot \sqrt{a_A^{22}} \\ \cdot \sqrt{a_B^{11}} \\ \cdot \sqrt{a_B^{22}} \\ \cdot 1 \\ \cdot \sqrt{a_B^{22}} \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array}$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} \hat{\underline{\Phi}}_1 & \hat{\underline{\Phi}}_2 \\ \hline \underline{0} & \underline{I} \end{array} \right]$$



Gleichung (5.38) wird nun nach den Ansatzfreiwerten  ${}^n\hat{\underline{u}}$  aufgelöst (5.39), so dass sich die unbekannt Elementverschiebungen pro Fourierglied des Ansatzes in Umfangsrichtung über die zugehörigen 12 Elementfreiheitsgrade (8 physikalische Knotenverschiebungen sowie 4 tensorielle Ansatzfreiwerte) ausdrücken lassen (5.40).

$${}^n\hat{\underline{u}} = \underline{\underline{G}} \cdot {}^n\underline{v} \quad (5.39)$$

mit:

$$\underline{\underline{G}} = \left[ \begin{array}{c|c} (\hat{\underline{\Phi}}_1)^{-1} & -(\hat{\underline{\Phi}}_1)^{-1} \cdot \hat{\underline{\Phi}}_2 \\ \hline \underline{0} & \underline{\underline{I}} \end{array} \right]$$

$$(\hat{\underline{\Phi}}_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta Z b_{2A}^2 & 0 & -\Delta Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\Delta Z b_{2A}^2 & -3 & 2\Delta Z & 0 & \Delta Z b_{2B}^2 & 3 & \Delta Z \\ 0 & -\Delta Z b_{2A}^2 & 2 & -\Delta Z & 0 & -\Delta Z b_{2B}^2 & -2 & -\Delta Z \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cdot\sqrt{a_{11A}} & \cdot\sqrt{a_{22A}} & \cdot 1 & \cdot\sqrt{a_{22A}} & \cdot\sqrt{a_{11B}} & \cdot\sqrt{a_{22B}} & \cdot 1 & \cdot\sqrt{a_{22B}} \end{matrix}$$

$$\underline{u} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} {}^n\underline{\Phi} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot {}^n\underline{v} \quad (5.40)$$

Mit den aufgezeigten Transformationsbeziehungen und Ansatzfunktionen ist es nun also gelungen, die unbekannt Feldverformungen im Element mit Hilfe der 8 physikalischen Elementfreiheitsgrade und der zusätzlichen 4 tensoriellen Freiwerte in Fourierreihendarstellung zu approximieren. Die angegebene Transformationsmatrix  $\underline{\underline{G}}$  bezieht sich dabei auf eine lokale Definition der Knotenfreiheitsgrade tangential zur Schalenmittelfläche. Die Knotenfreiheitsgrade sind jedoch alle im globalen Koordinatensystem

definiert, so dass noch eine Rotation der lokal definierten Elementfreiheitsgrade  ${}^n\underline{v}$  auf die globalen Freiheitsgrade  ${}^n\underline{V}$  mit Hilfe einer Transformationsmatrix  $\underline{\mathbb{T}}$  erfolgen muss (5.41).

$$\underline{u} = \sum_{n=0}^{n_{\max}} {}^n\underline{\Phi} \cdot \underline{G} \cdot \underline{\mathbb{T}} \cdot {}^n\underline{V} \quad (5.41)$$

mit:

$$\underline{\mathbb{T}} = \left[ \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_A & -\sin \alpha_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha_A & \cos \alpha_A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_B & -\sin \alpha_B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_B & \cos \alpha_B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\tan \alpha_A = (R_{,2})_A \quad \text{Knoten A}$$

$$\tan \alpha_B = (R_{,2})_B \quad \text{Knoten B}$$

Nachdem nun die Verschiebungen im Element durch die diskreten Knotenfreiheitsgrade dargestellt worden sind, können die Ausdrücke (5.28) – (5.35) aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen in inkrementeller Form ausgewertet werden. Aus diesen ergeben sich durch Einführen der Verschiebungsansätze sofort die Elementmatrizen.

## 5.4 Herleitung der Elementmatrizen für das Schalenringelement

### 5.4.1 Lineare Elementsteifigkeitsmatrix

Die lineare Elementsteifigkeitsmatrix kann aus Beziehung (5.28) gewonnen werden, indem die Anfangsverformungen in den Anteilen  $\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta}$  und  $\overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}$  zu Null gesetzt und die inkrementellen Schnittgrößen  $\overset{+}{\tilde{n}}^{\alpha\beta}$  und  $\overset{+}{m}^{\alpha\beta}$  mit Hilfe eines linearen Elastizitätstensors (z.B. Gleichung (4.40) für lineare Isotropie) berechnet werden. Gleichung (5.42) gibt die Beziehung zur Berechnung der Koeffizienten der linearen Steifigkeitsmatrix an.

$$\begin{aligned}
 {}^{nm}k_e^{ji} = \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \int_0^{2\pi} \overset{+}{\tilde{n}}^{\alpha\beta}(\overset{m}{\mathbf{v}}^{\dagger i}) \cdot \overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta}(\delta^n \overset{+}{\mathbf{v}}^{\dagger j}) \right. \\
 + \overset{+}{m}^{\alpha\beta}(\overset{m}{\mathbf{v}}^{\dagger i}) \cdot \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}(\delta^n \overset{+}{\mathbf{v}}^{\dagger j}) \\
 + k_t \cdot \mathbf{a}^{\alpha\beta} \cdot \overset{+}{\mathbf{u}}_{\alpha}(\overset{m}{\mathbf{v}}^{\dagger i}) \cdot \overset{+}{\mathbf{u}}_{\beta}(\delta^n \overset{+}{\mathbf{v}}^{\dagger j}) \\
 \left. + k_n \cdot \overset{+}{\mathbf{u}}_3(\overset{m}{\mathbf{v}}^{\dagger i}) \cdot \overset{+}{\mathbf{u}}_3(\delta^n \overset{+}{\mathbf{v}}^{\dagger j}) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \quad (5.42)
 \end{aligned}$$

- mit:  $k_{\max}$  - Anzahl der Integrationspunkte in Meridianrichtung  
 $k$  - Zählindex für Integrationspunkte in Meridianrichtung  
 $k[\dots]$  - Auswertung der Funktion für den Integrationspunkt  $k$   
 $W$  - Wichtungsfaktor für numerische Integration  
 $i, j$  - Zählindizes für Elementfreiheitsgrade 1...12  
 $m, n$  - Zählindizes für Umfangswelle des Verschiebungsansatzes  $0 \dots n_{\max}$   
 $\overset{m}{\mathbf{v}}^{\dagger i}$  - inkrementelle Einheitsverschiebung, Freiheitsgrad  $i$ , Umfangswelle  $m$   
 $a$  - Metrikdeterminante

Die Integration in Meridianrichtung wird durch eine numerische Integration (GAUSS Quadratur [73]) ersetzt, wobei die Stützpunkte und die Wichtungsfaktoren auf das Intervall  $[0 \dots 1]$  transformiert werden müssen. Demnach werden an den Integrationspunkten  $k$  in Meridianrichtung die inkrementellen Verzerrungen  $\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta}$  und  $\overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}$  und die inkrementellen Schnittgrößen  $\overset{+}{\tilde{n}}^{\alpha\beta}$  und  $\overset{+}{m}^{\alpha\beta}$  unter Verwendung von linearer Kinematik und linearem Werkstoffgesetz sowie die tensoriellen Feldverschiebungen  $\mathbf{u}_{\alpha}$  und  $\mathbf{u}_3$  infolge Einheitsverschiebungszuständen in den Elementfreiheitsgraden berechnet.

Damit wird der Arbeitsausdruck (5.28) für ein Element ausgewertet, der direkt auf die Komponenten der linear elastischen Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{k}_e$  führt. Die Komponente  ${}^{nm}k_e^{ji}$  ist somit eine inkrementelle Kraft in der Umfangswelle  $n$  am Freiheitsgrad  $j$  infolge einer Einheitsverschiebung in der Umfangswelle  $m$  am Elementfreiheitsgrad  $i$ . Es ist anzumerken, dass die inkrementellen Schnittgrößen aufgrund der linearen Beziehungen die gleiche Umfangsverteilung in der Umfangswelle  $m$  wie die eingeprägte inkrementelle Verschiebung  ${}^m\overset{+}{v}_i$  haben. Gleiches gilt für die Verzerrungen infolge einer virtuellen Verschiebung  $\delta^n\overset{+}{v}_j$ , auch hier bleibt aufgrund der linearen Transformation die Umfangswelle  $n$  erhalten.

Demnach kann der Integralausdruck über den Elementumfang in Gleichung (5.42) nun weiter vereinfacht werden. Aufgrund der linearen Beziehungen haben die inkrementellen Verzerrungen einen Verlauf in der Umfangswelle  $n$  ( $\overset{+}{\alpha}_{11}, \overset{+}{\alpha}_{22}, \overset{+}{\beta}_{11}, \overset{+}{\beta}_{22}$ :  $\cos(n\theta^1)$ -Verlauf und  $\overset{+}{\alpha}_{12}, \overset{+}{\alpha}_{21}, \overset{+}{\beta}_{12}, \overset{+}{\beta}_{21}$ :  $\sin(n\theta^1)$ -Verlauf), analog ist dies auf die inkrementellen Schnittgrößen (Umfangswelle  $m$ ) übertragbar, so dass die folgenden Integrale aus den Produkten der harmonischen Funktionen für die Umfangsintegration berechnet werden müssen:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta^1) \cdot \cos(n\theta^1) = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } m = n = 0 \\ \pi & \text{falls } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases} \quad (5.43)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\theta^1) \cdot \sin(n\theta^1) = \begin{cases} 0 & \text{falls } m = n = 0 \\ \pi & \text{falls } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases} \quad (5.44)$$

Aufgrund der Beziehungen (5.43) und (5.44) werden somit alle Nebendiagonalmatrizen  ${}^{nm}\underline{k}_e$  für  $m \neq n$  zu Null. Die Steifigkeitsbeziehung ist damit im linearen Fall in den Umfangswellen entkoppelt: Ein inkrementeller Verschiebungszustand in der Umfangswelle  $m$  hat nur Knotenkräfte in der gleichen Umfangswelle  $n = m$  zur Folge, lediglich die Hauptdiagonalmatrizen  ${}^{nn}\underline{k}_e$  sind belegt. Dies bedeutet, dass im linearen Fall die Steifigkeitsbeziehungen für jedes Glied des Umfangsansatzes nacheinander aufgestellt und gelöst werden und im Anschluss die Gesamtlösung aus den Einzellösungen superponiert wird.

Die aufgezeigte Vorgehensweise zum Aufbau der linearen Steifigkeitsmatrix basiert auf der Bildung von dyadischen Produkten, wie sie in [41], [58] und [61] ausführlich erläutert wird. Programmtechnisch erfolgt der Aufbau der linearen Elementsteifigkeitsmatrix aber nach Gleichung (5.45), da zum einen gleich die Eigenschaft, dass alle

Nebendiagonalmatrizen verschwinden, und zum anderen der einfache, lineare Zusammenhang zwischen den inkrementellen Ansatzfreiwerten und den Verzerrungen über die Matrix  ${}^n\mathbf{H}$ , die die linearen kinematischen Beziehungen und Ansatzfunktionen enthält, ausgenutzt wird. Näheres hierzu ist [42] zu entnehmen.

$${}^{nn}\underline{k}_e = \pi \cdot \Delta Z \cdot \underline{\mathbf{G}}^T \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k [{}^n\mathbf{H}^T \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot {}^n\mathbf{H} \cdot \mathbf{W} \cdot \sqrt{a}] \cdot \underline{\mathbf{G}} \cdot \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

Beim Aufbau der tangentialen Steifigkeitsmatrix und des Vektors der inneren Knotenkräfte wird jedoch vom Konzept der dyadischen Produkte, wie es an dieser Stelle bereits für die linear elastische Steifigkeitsmatrix erläutert worden ist, vorteilhaft Gebrauch gemacht. Diese Formulierungsweise lässt eine anschauliche physikalische Interpretation der einzelnen Einträge als virtuelle inkrementelle Arbeiten infolge der Verschiebungszustände  ${}^m\hat{v}_i$  und  $\delta {}^n\hat{v}_j$  erkennen; weiterhin sind Änderungen in den verwendeten Theoriestufen einfacher durchzuführen, da Ansatzfunktionen und Kinematik getrennt behandelt werden.

### 5.4.2 Vektor der äußeren Knotenkräfte

Der Vektor der äußeren Knotenkräfte ergibt sich aus der Gleichung (5.32) durch Einführen der Ansätze für die virtuellen Verschiebungen (5.47). Analog zu den Verformungen (5.1) liegen die Belastungen über den Umfang als Fourierreihe vor (5.46) und lassen sich ebenso über die Ansatzfunktion  ${}^n\phi$  und die Freiwerte  ${}^n\hat{p}$  der Belastung ausdrücken. Flächenmomente  $s^\alpha$  wie Randkräfte werden im Rahmen dieser Darstellung nicht berücksichtigt, sie können alternativ auch als globale Knotenlasten behandelt werden.

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} {}^n p^1 \\ {}^n p^2 \\ {}^n p^3 \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{p_{\max}} {}^n\phi \cdot {}^n\hat{p} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned}
{}^n p_a^j &= \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{p_{\max}} {}^m p^\alpha \cdot \overset{+}{u}_\alpha (\delta^{\overset{+}{n} v^j}) \right. \\
&\quad \left. + {}^m p^3 \cdot \overset{+}{u}_3 (\delta^{\overset{+}{n} v^j}) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \\
&= \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \int_0^{2\pi} {}^n p^\alpha \cdot \overset{+}{u}_\alpha (\delta^{\overset{+}{n} v^j}) \right. \\
&\quad \left. + {}^n p^3 \cdot \overset{+}{u}_3 (\delta^{\overset{+}{n} v^j}) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \tag{5.47}
\end{aligned}$$

In Gleichung (5.47) ist wiederum von den Beziehungen (5.43) und (5.44) Gebrauch gemacht worden. Somit entfällt die Summation über die Fourierglieder der Belastung; es müssen lediglich Belastungs- und inkrementelle Verformungsglieder mit gleicher Umfangswelle integriert werden. Der Eintrag  ${}^n p_a^j$  stellt eine äußere Knotenkraft in der Umfangswelle  $n$  am Elementfreiheitsgrad  $j$  dar. Programmtechnisch gesehen erfolgt der Aufbau des Vektors der äußeren Knotenkräfte unter Verwendung der Ansätze für die virtuellen Verschiebungen und die Belastungen im Element in Matrixform mit Auswertung des Integralausdrucks lediglich für korrespondierende Fourierterme gemäß Gleichung (5.48).

$$\underline{{}^n p}_a = \pi \cdot \Delta Z \cdot \underline{G}^T \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \underline{{}^n \Phi}^T \cdot \underline{{}^n \Phi} \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \cdot \underline{{}^n \hat{p}} \cdot \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases} \tag{5.48}$$

### 5.4.3 Massenmatrix und Massenkräfte

Der Aufbau der Massenmatrix für das behandelte Ringelement ist von ŞANAL in dessen Arbeit [108] ausführlich beschrieben worden und wird an dieser Stelle kurz zusammengefasst. Aus der virtuellen Arbeit der inkrementellen Trägheitskräfte (5.31) ergeben sich durch Einführen der Ansatzfunktionen für die Beschleunigungen und virtuellen Verschiebungen die Koeffizienten der Massenmatrix nach Gleichung (5.49) mit der Annahme einer über den Umfang konstanten Dichte und Wandstärke.

$${}^{nm}m^{ji} = \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k [\rho h \cdot \int_0^{2\pi} a^{\alpha\beta} \cdot \overset{+}{\ddot{u}}_{\alpha} ({}^m\overset{+}{v}^i) \cdot \overset{+}{u}_{\beta} (\delta^n\overset{+}{v}^j) + \overset{+}{\ddot{u}}_3 ({}^m\overset{+}{v}^i) \cdot \overset{+}{u}_3 (\delta^n\overset{+}{v}^j) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a}] \quad (5.49)$$

Der Eintrag  ${}^{nm}m^{ji}$  in der Massenmatrix stellt also eine inkrementelle Trägheitskraft in der Umfangswelle  $n$  am Freiheitsgrad  $j$  infolge einer Einheitsbeschleunigung in der Umfangswelle  $m$  am Elementfreiheitsgrad  $i$  dar. Auch hier kann der Integralausdruck wieder vereinfacht werden; lediglich die Hauptdiagonalmatrizen  ${}^{nn}\underline{m}$  sind aufgrund der Beziehungen (5.43) und (5.44) von Null verschieden. Programmtechnisch erfolgt der Aufbau der Massenmatrix vorteilhaft nach Gleichung (5.50) unter direkter Substitution der inkrementellen Elementbeschleunigungen und virtuellen Verschiebungen durch die Ansatzfunktionen.

$${}^{nn}\underline{m} = \pi \cdot \Delta Z \cdot \underline{G}^T \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k [\rho h \cdot \overset{n}{\Phi}^T \cdot \begin{bmatrix} a^{11} & 0 & 0 \\ 0 & a^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \overset{n}{\Phi} \cdot W \cdot \sqrt{a}] \cdot \underline{G} \cdot \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.50)$$

Für den Vektor der Ungleichgewichtskräfte (Residuum) werden noch die Massenkräfte des Grundzustands benötigt. Diese berechnen sich formal nach Gleichung (5.35), indem die Feldbeschleunigungen des Grundzustands und die virtuellen Verschiebungen über die Ansatzfunktionen ausgedrückt werden (5.51). Auch hier fallen wieder alle Terme mit ungleicher Umfangswellenzahl heraus. Auf das gleiche Ergebnis für den Vektor der Massenkräfte führt die Multiplikation von Massenmatrix mit den Beschleunigungen im Grundzustand (5.52).

$$\begin{aligned}
{}^n p_m^j &= \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k [\rho \cdot h \cdot \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{n_{\max}} a^{\alpha\beta} \cdot {}^m \bar{u}_\alpha \cdot {}^+ u_\beta (\delta^{\,n\,+\,j}) \\
&\quad + {}^m \bar{u}_3 \cdot {}^+ u_3 (\delta^{\,n\,+\,j}) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a}] \\
&= \pi \cdot \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k [\rho \cdot h \cdot W \cdot \sqrt{a} \cdot [a^{\alpha\beta} \cdot {}^n \bar{u}_\alpha \cdot {}^+ u_\beta (\delta^{\,n\,+\,j}) \\
&\quad + {}^n \bar{u}_3 \cdot {}^+ u_3 (\delta^{\,n\,+\,j})]] \cdot \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.51)
\end{aligned}$$

$${}^n \underline{p}_m = {}^{nn} \underline{m} \cdot {}^n \bar{\underline{u}} \quad (5.52)$$

#### 5.4.4 Vektor der inneren Knotenkräfte

Der Vektor der inneren Knotenkräfte berechnet sich gemäß Gleichung (5.53) durch Einführen der Ansatzfunktionen für die Variation der Feldverschiebungen und Feldverzerrungen in (5.33). Bei der Auswertung des Integralausdrucks muss jedoch beachtet werden, dass die Zusammenhänge zwischen den inkrementellen Verschiebungen und den inkrementellen Verzerrungen aufgrund der Beziehung (5.4) nichtlinear sind, weiterhin sind die Schnittgrößen nichtlinear von den Verzerrungen und Verzerrungsgeschwindigkeiten des Grundzustands abhängig, so dass sie punktweise über den Umfang ausgewertet werden müssen. Die Komponente  ${}^n p_i^j$  stellt eine innere Knotenkraft in der Umfangswelle  $n$  am Freiheitsgrad  $j$  dar.

$$\begin{aligned}
{}^n p_i^j &= \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \int_0^{2\pi} \bar{n}^{\alpha\beta} \cdot {}^+ \alpha_{\alpha\beta} (\delta^{\,n\,+\,j}) + \bar{m}^{\alpha\beta} \cdot {}^+ \beta_{\alpha\beta} (\delta^{\,n\,+\,j}) \right. \\
&\quad + k_t \cdot a^{\alpha\beta} \cdot \bar{u}_\alpha \cdot {}^+ u_\beta (\delta^{\,n\,+\,j}) \\
&\quad \left. + k_n \cdot \bar{u}_3 \cdot {}^+ u_3 (\delta^{\,n\,+\,j}) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Zunächst müssen die Verzerrungen des Grundzustands gemäß Gleichung (5.54) und



(5.55) über den Umfang ausgewertet werden (ebenso Auswertung von Verzerrungsgeschwindigkeiten bei Berücksichtigung von Materialdämpfung), wobei die Symmetrieebene  $x^2 = 0$  natürlich ausgenutzt werden kann; anschließend werden aus den Verzerrungen (und evtl. Verzerrungsgeschwindigkeiten) des Grundzustands in den Umfangsstützpunkten die Schnittgrößen des Grundzustands durch Auswertung der Werkstoffgesetze berechnet.

$$\bar{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^{n_{\max}} [{}^{n_1} \bar{\varphi}_{\alpha\beta} + {}^{n_1} \bar{\varphi}_{\beta\alpha} + \sum_{n_2=0}^{n_{\max}} [{}^{n_1} \bar{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} {}^{n_2} \bar{\varphi}_{\lambda\beta} + {}^{n_1} \bar{\varphi}_{3\alpha} {}^{n_2} \bar{\varphi}_{3\beta}]] \quad (5.54)$$

$$\bar{\beta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^{n_{\max}} n_1 [{}^{\bar{\psi}}_{\alpha\beta} + {}^{\bar{\psi}}_{\beta\alpha} - \bar{\varphi}_{\lambda\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - \bar{\varphi}_{\lambda\beta} b_{\alpha}^{\lambda}] \quad (5.55)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\alpha}_{\lambda\rho} \quad \bar{\dot{\alpha}}_{\lambda\rho} \\ \bar{\beta}_{\lambda\rho} \quad \bar{\dot{\beta}}_{\lambda\rho} \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{nichtlineares Schichtenmodell} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\tilde{n}}^{\alpha\beta}(\theta^1) \\ \bar{\tilde{m}}^{\alpha\beta}(\theta^1) \end{array} \right.$$

**SIMPSON Integration** Zur numerischen Auswertung des Integrals über den Schalenumfang bietet sich die SIMPSON Regel [109] an. Dafür müssen zunächst die inkrementellen Verzerrungen an den einzelnen Umfangsstützpunkten nach den Gleichungen (5.56) und (5.57) berechnet werden. Wie man unschwer erkennt, setzen sich die inkrementellen Verzerrungen im 1. Verzerrungstensor  $\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta}$  nun auch aus anderen Anteilen als der Umfangswelle  $n$  der inkrementellen Verformung zusammen, die inkrementellen Verzerrungen im 2. Verzerrungstensor  $\overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}$  haben weiterhin nur Anteile in der Umfangswelle  $n$  aufgrund des linearen Zusammenhangs (Theorie kleiner Rotationen).

$$\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} (\delta^n \overset{+}{v}^j) = \frac{1}{2} [\delta^n \overset{+}{\varphi}_{\alpha\beta} + \delta^n \overset{+}{\varphi}_{\beta\alpha} + \sum_{n_1=0}^{n_{\max}} [\delta^n \overset{+}{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} {}^{n_1} \bar{\varphi}_{\lambda\beta} + \delta^n \overset{+}{\varphi}_{3\alpha} {}^{n_1} \bar{\varphi}_{3\beta} + {}^{n_1} \bar{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} \delta^n \overset{+}{\varphi}_{\lambda\beta} + {}^{n_1} \bar{\varphi}_{3\alpha} \delta^n \overset{+}{\varphi}_{3\beta}]] \quad (5.56)$$

$$\beta_{\alpha\beta}^+ (\delta^n v^j) = \frac{1}{2} [\delta^n \psi_{\alpha\beta}^+ + \delta^n \psi_{\beta\alpha}^+ - \delta^n \varphi_{\lambda\alpha}^+ b_{\beta}^{\lambda} - \delta^n \varphi_{\lambda\beta}^+ b_{\alpha}^{\lambda}] \quad (5.57)$$

Damit geht die Beziehung (5.53) durch Ersetzen des Integralausdrucks über den Umfang durch die numerische Integration nach SIMPSON mit Auswertung der einzelnen äquidistanten Umfangsstützstellen in Gleichung (5.58) über. Die Anzahl der Stützstellen für den halben Umfang muss dabei ungerade sein, da immer drei Stützwerte benötigt werden, um in einem Intervall den Funktionsverlauf mit einem quadratischen Polynom zu approximieren, wie es bei der SIMPSON Regel erfolgt.

$${}^n p_i^j = \frac{2}{3} \Delta\theta^1 \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \sqrt{a} \cdot W \cdot \sum_{l=1}^{l_{\max}} {}^l W \cdot {}^l [\dots] \right] \quad (5.58)$$

- mit:
- $l_{\max}$  - Anzahl der SIMPSON Integrationspunkte (halber Umfang)
  - $l$  - Zählindex für Umfangsintegrationspunkte  $1 \dots l_{\max}$
  - ${}^l W$  - Wichtungsfaktor für Umfangsstützstelle
    - für gerade  $l$ :  ${}^l W = 4$
    - für ungerade  $l$ :  ${}^l W = 2$
    - für  $l = 1$ :  ${}^l W = 1$
    - für  $l = l_{\max}$ :  ${}^l W = 1$
  - ${}^l [\dots]$  - Integrand aus Gleichung (5.53) für Umfangsstützpunkt  $l$  ausgewertet
  - $\Delta\theta^1$  - Abstand der Umfangsstützpunkte in Umfangsrichtung
 
$$\Delta\theta^1 = \frac{\pi}{l_{\max}-1}$$

**Integration über Fourierreihen** Eine alternative Methode, den Ausdruck (5.53) über den Umfang auszuwerten, besteht darin, die an diskreten Stützpunkten über den Umfang berechneten Schnittgrößen des Grundzustands in eine Fourierreihe zu überführen und mit den korrespondierenden fourierzerlegten inkrementellen Verzerrungsanteilen zu integrieren, was unter Berücksichtigung der Beziehungen (5.43) und (5.44) erfolgt. Dazu wird zunächst die Zusammensetzung des 1. Verzerrungstensors der inkrementellen Verzerrungen nach Gleichung (5.56) näher untersucht. Ein einzelnes Reihenglied der nichtlinearen Verzerrungsanteile (Umfangswelle  $n$  in der inkrementellen virtuellen Verschiebung und Umfangswelle  $n_1$  in der Verschiebung des Grundzustands)

aus Gleichung (5.56) besteht demnach aus den Anteilen, wie sie in Gleichung (5.59) angegeben sind:

$$\begin{aligned} \overset{+}{\alpha}_{11} (\delta^{n\overset{+}{v}j}, n_1\bar{v}), \overset{+}{\alpha}_{22} (\delta^{n\overset{+}{v}j}, n_1\bar{v}) : & \cos(n\theta^1) \cdot \cos(n_1\theta^1) \\ & \sin(n\theta^1) \cdot \sin(n_1\theta^1) \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \overset{+}{\alpha}_{12} (\delta^{n\overset{+}{v}j}, n_1\bar{v}), \overset{+}{\alpha}_{21} (\delta^{n\overset{+}{v}j}, n_1\bar{v}) : & \sin(n\theta^1) \cdot \cos(n_1\theta^1) \\ & \cos(n\theta^1) \cdot \sin(n_1\theta^1) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme können die in (5.59) auftretenden Produkte aus trigonometrischen Funktionen wieder in Summen gemäß der Gleichungen (5.60), (5.61) und (5.62) zerlegt werden. Demnach besitzt ein Reihenglied  $\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} (\delta^{n\overset{+}{v}j}, n_1\bar{v})$  des nichtlinearen Anteils der inkrementellen Verzerrung Anteile in der Umfangswelle  $|n - n_1|$  und  $|n + n_1|$ .

$$\cos(n\theta^1) \cdot \cos(n_1\theta^1) = \frac{1}{2} [\cos(|n - n_1|\theta^1) + \cos(|n + n_1|\theta^1)] \quad (5.60)$$

$$\sin(n\theta^1) \cdot \sin(n_1\theta^1) = \frac{1}{2} [\cos(|n - n_1|\theta^1) - \cos(|n + n_1|\theta^1)] \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \sin(n\theta^1) \cdot \cos(n_1\theta^1) = \frac{1}{2} [\sin(|n - n_1|\theta^1) \cdot \operatorname{sgn}(n - n_1) \\ + \sin(|n + n_1|\theta^1)] \end{aligned} \quad (5.62)$$

Mit diesen Überlegungen lassen sich die inkrementellen Verzerrungen im ersten Verzerrungstensor infolge einer inkrementellen Verschiebung in der Umfangswelle  $n$  sehr einfach als Fourierreihe darstellen, deren Glieder sich allein aus der Aufspaltung der nichtlinearen Verzerrungsanteile mit Hilfe der Beziehungen (5.60), (5.61) und (5.62) ergeben, wobei die höchste auftretende Umfangswelle  $n + n_{\max}$  ist. Beim zweiten Verzerrungstensor bleibt wie bereits erläutert die Umfangswelle  $n$  der inkrementellen Verschiebung erhalten.

$$\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta} (\delta^{n\overset{+}{v}j}, \bar{v}) = \sum_{n_1=0}^{n+n_{\max}} \begin{bmatrix} n_1 \overset{+}{\alpha}_{11} \cdot \cos(n_1\theta^1) & n_1 \overset{+}{\alpha}_{12} \cdot \sin(n_1\theta^1) \\ n_1 \overset{+}{\alpha}_{21} \cdot \sin(n_1\theta^1) & n_1 \overset{+}{\alpha}_{22} \cdot \cos(n_1\theta^1) \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

$$\overset{+}{\beta}_{\alpha\beta} (\delta^{n\uparrow j}) = \begin{bmatrix} {}^n\overset{+}{\beta}_{11} \cdot \cos(m\theta^1) & {}^n\overset{+}{\beta}_{12} \cdot \sin(m\theta^1) \\ {}^n\overset{+}{\beta}_{21} \cdot \sin(m\theta^1) & {}^n\overset{+}{\beta}_{22} \cdot \cos(m\theta^1) \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Die Schnittgrößen des Grundzustands, die in äquidistanten Umfangsstützstellen durch Auswerten der Verzerrungen (und ggf. Verzerrungsgeschwindigkeiten) des Grundzustands berechnet worden sind, werden nun mit Hilfe einer Fouriertransformation [109] in eine Reihe entwickelt, so dass sie sich mit Hilfe der Beziehungen (5.65) und (5.66) darstellen lassen. Die maximale Anzahl der Reihenglieder, die aus den an äquidistanten Umfangsstützstellen ausgewerteten Größen berechnet werden kann, ist dabei genau gleich der ausgewerteten Anzahl von Umfangsstützstellen des halben Umfangs  $l_{\max}$ .

$$\bar{\tilde{n}}^{\alpha\beta} = \sum_{n_1=0}^{l_{\max}-1} \begin{bmatrix} {}^{n_1}\bar{\tilde{n}}^{11} \cdot \cos(n_1\theta^1) & {}^{n_1}\bar{\tilde{n}}^{12} \cdot \sin(n_1\theta^1) \\ {}^{n_1}\bar{\tilde{n}}^{21} \cdot \sin(n_1\theta^1) & {}^{n_1}\bar{\tilde{n}}^{22} \cdot \cos(n_1\theta^1) \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

$$\bar{m}^{\alpha\beta} = \sum_{n_1=0}^{l_{\max}-1} \begin{bmatrix} {}^{n_1}\bar{m}^{11} \cdot \cos(n_1\theta^1) & {}^{n_1}\bar{m}^{12} \cdot \sin(n_1\theta^1) \\ {}^{n_1}\bar{m}^{21} \cdot \sin(n_1\theta^1) & {}^{n_1}\bar{m}^{22} \cdot \cos(n_1\theta^1) \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Nun werden die fourierzerlegten inkrementellen Verzerrungen infolge der Variation in der Einheitsverschiebung  $\delta^{n\uparrow j}$  am Freiheitsgrad  $j$  der Umfangswelle  $n$  sowie die fourierzerlegten Schnittgrößen des Grundzustands in die Beziehung (5.53) eingesetzt. Bei der Umfangsintegration müssen lediglich Glieder mit gleicher Umfangswelle gemäß (5.43) und (5.44) berücksichtigt werden, so dass sich die Summation auf eine einfache Reihe über Terme gleicher Umfangswelle reduziert. Der Übersichtlichkeit halber wird an dieser Stelle auf eine Behandlung und Darstellung der Bettungsanteile verzichtet, diese erfolgt in völliger Analogie (Berechnung der Bettungskräfte an diskreten Umfangsstützstellen, Entwicklung in Fourierreihen und Integration).

$${}^n p_i^j = \pi \cdot \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k [W \cdot \sqrt{a} \cdot \sum_{n_1} n_1 [\dots]] \quad (5.67)$$

$$\text{mit } {}^{n_1} [\dots] = [{}^{n_1} \bar{n}^{\alpha\beta} \cdot {}^{n_1} \bar{\alpha}_{\alpha\beta}^+ (\delta^{n_1 v^j}) + \underbrace{{}^{n_1} \bar{m}^{\alpha\beta} \cdot {}^{n_1} \bar{\beta}_{\alpha\beta}^+ (\delta^{n_1 v^j})}_{=0 \text{ für } n \neq n_1}] \cdot \begin{cases} 2 & n_1 = 0 \\ 1 & n_1 \neq 0 \end{cases}$$

Die Integration in Umfangsrichtung sollte jedoch vorzugsweise mit der numerischen Integration nach SIMPSON durchgeführt werden. Die Fouriertransformation der in den Umfangsstützpunkten ermittelten Schnittgrößen nimmt nur unnötige und deutlich spürbare Rechenzeit in Anspruch und bringt keine Steigerung der Genauigkeit, da die Genauigkeit der Fourierglieder von der Anzahl der ausgewerteten Umfangsstützstellen abhängt. Vorteile hat diese Integrationsmethode nur, wenn lediglich geometrische Nichtlinearitäten bei linearem Werkstoffgesetz behandelt werden; dann können aus den fourierzerlegten Verzerrungsanteilen direkt die fourierzerlegten Schnittgrößen berechnet werden.

### 5.4.5 Tangentiale Steifigkeitsmatrix

Wie bereits erläutert, setzt sich die tangentielle Steifigkeitsmatrix aus zwei Anteilen zusammen, nämlich der elastischen Steifigkeitsmatrix (mit Berücksichtigung der Anfangsverformungen in der inkrementellen Kinematik) sowie der geometrischen Steifigkeitsmatrix. Diese können aus den Beziehungen (5.28) und (5.29) durch Einführen der Ansätze ermittelt werden. Für die Integration in Umfangsrichtung können wieder sowohl die SIMPSON Integration als auch die Integration über Fourierreihen angewendet werden.

#### 5.4.5.1 Elastische Steifigkeitsmatrix

Zunächst wird die Vorgehensweise zur Bestimmung der elastischen Steifigkeitsmatrix aufgezeigt. Deren Komponenten  ${}^{nm} k_{ev}^{ji}$  ergeben sich nach Gleichung (5.68).

$$\begin{aligned}
{}^{nm}k_{ev}{}^{ji} = \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{max}} k \left[ \int_0^{2\pi} \tilde{n}^{\alpha\beta}({}^m\mathbf{v}^{\dagger i}) \cdot \overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta}(\delta {}^n\mathbf{v}^{\dagger j}) + \overset{+}{m}^{\alpha\beta}({}^m\mathbf{v}^{\dagger i}) \cdot \overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}(\delta {}^n\mathbf{v}^{\dagger j}) \right. \\
+ k_t \cdot \mathbf{a}^{\alpha\beta} \cdot \overset{+}{u}_{\alpha}(\delta {}^m\mathbf{v}^{\dagger i}) \cdot \overset{+}{u}_{\beta}(\delta {}^n\mathbf{v}^{\dagger j}) \\
\left. + k_n \cdot \overset{+}{u}_3(\delta {}^m\mathbf{v}^{\dagger i}) \cdot \overset{+}{u}_3(\delta {}^n\mathbf{v}^{\dagger j}) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \quad (5.68)
\end{aligned}$$

Die inkrementellen Verzerrungen  $\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta}$  infolge der virtuellen inkrementellen Verformung  $\delta {}^n\mathbf{v}^{\dagger j}$  sind bereits beim Aufstellen des Vektors der inneren Knotenkräfte nach (5.56) und (5.57) berechnet worden. Aus den Verzerrungsinkrementen  $\overset{+}{\alpha}_{\alpha\beta}$  und  $\overset{+}{\beta}_{\alpha\beta}$  infolge der inkrementellen Verformung  ${}^m\mathbf{v}^{\dagger i}$ , die sich in Analogie (unter Streichung des Variationsymbols) nach den Beziehungen (5.56) und (5.57) ergeben, werden nun die Inkremente in den Schnittgrößen durch Querschnittsintegration bestimmt.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\alpha}_{\lambda\rho} \quad \dot{\alpha}_{\lambda\rho} \quad \overset{+}{\alpha}_{\lambda\rho} \\ \bar{\beta}_{\lambda\rho} \quad \dot{\beta}_{\lambda\rho} \quad \overset{+}{\beta}_{\lambda\rho} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{nichtlineares Schichtenmodell} \Rightarrow \begin{cases} \overset{+}{\tilde{n}}^{\alpha\beta}(\theta^1) \\ \overset{+}{m}^{\alpha\beta}(\theta^1) \end{cases}$$

Der Integralausdruck über den Umfang aus Gleichung (5.68) wird nun mit Hilfe der SIMPSON Formel numerisch integriert. Dazu liegen bereits die inkrementellen Schnittgrößen und die inkrementellen Verzerrungen an den äquidistanten Umfangsstützpunkten vor, so dass daraus die Gleichung (5.69) hervorgeht.

$${}^{nm}k_{ev}{}^{ji} = \frac{2}{3} \Delta\theta^1 \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{max}} k \left[ \sqrt{a} \cdot W \cdot \sum_{l=1}^{l_{max}} {}^lW \quad {}^l[\dots] \right] \quad (5.69)$$

mit:  $l_{max}$  - Anzahl der SIMPSON Integrationspunkte (halber Umfang)  
 $l$  - Zählindex für Umfangsintegrationspunkte  $1 \dots l_{max}$   
 ${}^lW$  - Wichtungsfaktor für Umfangsstützstelle  
- für gerade  $l$ :  ${}^lW = 4$   
- für ungerade  $l$ :  ${}^lW = 2$

- für  $l = 1$ :  ${}^lW = 1$
- für  $l = l_{\max}$ :  ${}^lW = 1$
- ${}^l[\dots]$  - Integrand aus Gleichung (5.68) für Umfangsstützpunkt  $l$  ausgewertet
- $\Delta\theta^1$  - Abstand der Umfangsstützpunkte in Umfangsrichtung  

$$\Delta\theta^1 = \frac{\pi}{l_{\max}-1}$$

Eine Integration über Fourierreihen, wie sie beim Aufbau des Vektors der äußeren Knotenkräfte vorgeführt worden ist, ist alternativ möglich; sie erfolgt in völliger Analogie, und es gelten die gleichen Anmerkungen wie in dem betreffenden Abschnitt.

#### 5.4.5.2 Geometrische Steifigkeitsmatrix

Der zweite Anteil an der tangentialen Steifigkeitsmatrix, die geometrische Steifigkeitsmatrix, enthält die Schnittgrößen des bekannten Grundzustands sowie quadratische inkrementelle Verzerrungsanteile. Ihre Komponenten  ${}^{nm}k_g^{ji}$  bestimmen sich nach Gleichung (5.70); durch Annahme einer Theorie kleiner Rotationen treten dort, wie bereits in (5.29) gezeigt, lediglich Dehnkraftanteile auf.

$${}^{nm}k_g^{ji} = \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \int_0^{2\pi} \tilde{n}^{\alpha\beta} \cdot \overset{++}{\alpha}_{\alpha\beta} ({}^m\overset{+}{v}^i, \delta^n \overset{+}{v}^j) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \quad (5.70)$$

mit:

$$\overset{++}{\alpha}_{\alpha\beta} ({}^m\overset{+}{v}^i, \delta^n \overset{+}{v}^j) = \overset{+}{\varphi}_{\alpha}^{\lambda} ({}^m\overset{+}{v}^i) \cdot \overset{+}{\varphi}_{\lambda\beta} (\delta^n \overset{+}{v}^j) + \overset{+}{\varphi}_{3\alpha} ({}^m\overset{+}{v}^i) \cdot \overset{+}{\varphi}_{3\beta} (\delta^n \overset{+}{v}^j) \quad (5.71)$$

Zur Auswertung des Integralausdrucks über den Umfang in Gleichung (5.70) wird wiederum die numerische Integration nach SIMPSON herangezogen, alternativ kann jedoch auch eine Integration über Fourierreihen mit den bereits gemachten Erläuterungen und Anmerkungen durchgeführt werden.

Bei der SIMPSON Integration müssen die quadratischen inkrementellen Verzerrungen  $\alpha_{\alpha\beta}^{++} (m^{\dagger i}, \delta n^{\dagger j})$  infolge der beiden Einheitsverschiebungszustände  $m^{\dagger i}$  und  $\delta n^{\dagger j}$  sowie die Membrankräfte des Grundzustands  $\tilde{n}^{\alpha\beta}$  an allen Umfangsstützstellen ausgewertet werden. Das Integral über den Umfang aus Gleichung (5.70) wird durch eine Summation über die Umfangsstützstellen ersetzt, und es ergibt sich Gleichung (5.72).

$${}^{nm}k_g^{ji} = \frac{2}{3} \Delta\theta^1 \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \sqrt{a} \cdot W \cdot \sum_{l=1}^{l_{\max}} {}^lW \cdot {}^l[\dots] \right] \quad (5.72)$$

- mit:
- $l_{\max}$  - Anzahl der SIMPSON Integrationspunkte (halber Umfang)
  - $l$  - Zählindex für Umfangsintegrationspunkte  $1 \dots l_{\max}$
  - ${}^lW$  - Wichtungsfaktor für Umfangsstützstelle
    - für gerade  $l$ :  ${}^lW = 4$
    - für ungerade  $l$ :  ${}^lW = 2$
    - für  $l = 1$ :  ${}^lW = 1$
    - für  $l = l_{\max}$ :  ${}^lW = 1$
  - ${}^l[\dots]$  - Integrand aus Gleichung (5.70) für Umfangsstützpunkt  $l$  ausgewertet
  - $\Delta\theta^1$  - Abstand der Umfangsstützpunkte in Umfangsrichtung
 
$$\Delta\theta^1 = \frac{\pi}{l_{\max}-1}$$

Aus den Herleitungen dieses Abschnitts wird deutlich, dass die tangential Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{k}_t$  (Summe aus  $\underline{k}_{ev}$  und  $\underline{k}_g$ ) in den Umfangswellen gekoppelt ist. Dies bedeutet, dass im Allgemeinen alle Komponenten  ${}^{nm}k_t^{ji}$  besetzt sind. Diese Tatsache steht im Gegensatz zu den Eigenschaften der linear elastischen Steifigkeitsmatrix, bei der sämtliche Nebendiagonalmatrizen für  $n \neq m$  verschwinden. Die physikalische Interpretation hierfür ist, dass nun inkrementelle Verformungszuwächse in einer Umfangswelle  $m$  inkrementelle Knotenkräfte in einer anderen Umfangswelle  $n \neq m$  hervorrufen. Dabei muss allerdings bedacht werden, dass sich die Nebendiagonalglieder erst während der Berechnung mit Beginn des nichtlinearen Verhaltens (insbesondere das über die Umfangsrichtung ungleichmäßige Aufreißen von Stahlbeton) auffüllen. Bei nichtlinearen Berechnungen mit inkrementell iterativen Verfahren ist das Kriterium für einen aufgefundenen Gleichgewichtszustand allein das Verschwinden der linken Seite der Beziehung (5.27); dann sind die inneren mit den äußeren Knotenkräften im Gleichgewicht und die residuelle Norm ist numerisch Null. Es ist nicht zwingend notwendig, die Iteration mit den exakten tangentialen Steifigkeiten auszuführen; die Vernachlässi-



gung der Nebendiagonalterme führt zu einer höheren Anzahl von Gleichgewichtsiterationen, was sich allerdings lediglich in den letzten Lastschritten einer Traglastberechnung aufgrund der starken Nichtlinearitäten bemerkbar macht.

Wie im Kapitel 6 noch gezeigt werden wird, wirkt sich die Vernachlässigung der Nebendiagonalglieder bei nichtlinearen dynamischen Berechnungen geringfügiger aus als bei nichtlinearen statischen Problemen: Bei der Anwendung von Zeitintegrationsverfahren wird eine effektive Steifigkeit berechnet, die sich anteilig aus tangentialer Steifigkeitsmatrix, Massenmatrix und Dämpfungsmatrix zusammensetzt. Die Massenmatrix ist generell in den Fouriertermen entkoppelt, so dass das Größenverhältnis der Nebendiagonalglieder zu den Hauptdiagonalgliedern in der effektiven Steifigkeitsmatrix abnimmt. Weiterhin verringert sich der Einfluss der tangentialen Steifigkeitsmatrix an der effektiven Steifigkeitsmatrix mit kleinen Zeitschritten (siehe Abschnitt 6.3.4).

### 5.4.6 Dämpfungskräfte und Dämpfungsmatrix

Der Vollständigkeit halber werden noch zum Abschluss der Herleitung der Elementmatrizen der Aufbau des Vektors der äußeren Dämpfungskräfte und der Dämpfungsmatrizen infolge äußerer und innerer Dämpfung vorgeführt. Diese sind jedoch für die praktische Anwendung von untergeordneter Bedeutung, da zumeist die Dämpfungsparameter des umgebenden Mediums nicht bekannt sind, oder geeignete Werkstoffgesetze mit genauen Dämpfungsgrößen nicht vorliegen. Im Kapitel 3 ist bereits auf die Frage der Dämpfung eingegangen worden: Diese ist als ein unscharfer Eingangsparameter für die Berechnung anzusehen. Sie wird im Allgemeinen am Gesamttragwerk im Ausschwingversuch als logarithmisches Dämpfungsdekrement gemessen und in das LEHRsche Dämpfungsmaß [83] oder in die RAYLEIGH Dämpfungsparameter [90] (bei Verwendung von direkten Zeitintegrationsverfahren) umgerechnet.

#### 5.4.6.1 Äußere Dämpfungskräfte

Der Vektor der äußeren Dämpfungskräfte ergibt sich durch Einsetzen der Ansatzfunktionen des Ringelements für die unbekanntes Feldgeschwindigkeiten im Grundzustand sowie für die Variationen der inkrementellen Feldverschiebungen in Gleichung (5.34), wobei die Gebietsintegration in Umfangsrichtung analytisch ausgeführt wird. Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen werden nur Glieder mit gleicher Umfangswellenanzahl integriert, was auf den Ausdruck (5.73) für die Komponenten des Vektors der äußeren Knotenkräfte führt.

$$\begin{aligned}
{}^n p_{ca}^j &= \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \int_0^{2\pi} \sum_{n_1=0}^{n_{\max}} c_t \cdot a^{\alpha\beta} \cdot {}^{n_1} \bar{u}_\alpha \cdot {}^+ u_\beta (\delta {}^n v^j) \right. \\
&\quad \left. + c_n \cdot {}^{n_1} \bar{u}_3 \cdot {}^+ u_3 (\delta {}^n v^j) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \\
&= \pi \cdot \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ W \cdot \sqrt{a} \cdot [c_t \cdot a^{\alpha\beta} \cdot {}^n \bar{u}_\alpha \cdot {}^+ u_\beta (\delta {}^n v^j) \right. \\
&\quad \left. + c_n \cdot {}^n \bar{u}_3 \cdot {}^+ u_3 (\delta {}^n v^j) \right] \cdot \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.73)
\end{aligned}$$

Wie bereits erläutert, sind die inneren Dämpfungskräfte für den Grundzustand bereits in den inneren Knotenkräften (5.53) enthalten. Die Schnittgrößen im Grundzustand  $\bar{n}^{\alpha\beta}$  und  $\bar{m}^{\alpha\beta}$  sind von den Verzerrungen und den Verzerrungsgeschwindigkeiten des Grundzustands abhängig, eine Aufspaltung in diese beiden Anteile ist im nichtlinearen Fall nicht möglich und wird auch nicht benötigt. Für linear viskoelastisches Materialverhalten kann eine solche Aufspaltung und getrennte Behandlung vorgenommen werden, wie von BEEM [10] vorgeführt worden ist.

#### 5.4.6.2 Dämpfungsmatrix infolge äußerer Dämpfung

Die Dämpfungsmatrix infolge äußerer Dämpfung ergibt sich aus dem zweiten Term der Gleichung (5.30) durch Einsetzen der Ansatzfunktionen für die unbekannteren inkrementellen Feldgeschwindigkeiten sowie für die Variationen der inkrementellen Feldverschiebungen. Die Komponente  ${}^{nm}c_a^{ji}$  stellt demnach einen inkrementellen Zuwachs in den äußeren Dämpfungskräften in der Umfangswelle  $n$  am Freiheitsgrad  $j$  infolge einer inkrementellen Geschwindigkeit in der Umfangswelle  $m$  am Freiheitsgrad  $i$  dar. Ebenso wie die Massenmatrix ist auch die äußere Dämpfungsmatrix nur auf den Hauptdiagonalmatrizen  $n = m$  besetzt, da die Integrale über unterschiedliche Umfangswellen zu Null werden.

$$\begin{aligned}
{}^{nm}c_a^{ji} &= \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \int_0^{2\pi} c_t \cdot a^{\alpha\beta} \cdot \dot{u}_\alpha^+ ({}^m\dot{v}^+{}_i) \cdot u_\beta (\delta^{}n\dot{v}^+{}_j) \right. \\
&\quad \left. + c_n \dot{u}_3^+ ({}^m\dot{v}^+{}_i) \cdot u_3 (\delta^{}n\dot{v}^+{}_j) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \\
{}^{nn}c_a^{ji} &= \pi \cdot \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ W \cdot \sqrt{a} \cdot [c_t \cdot a^{\alpha\beta} \cdot \dot{u}_\alpha^+ ({}^n\dot{v}^+{}_i) \cdot u_\beta (\delta^{}n\dot{v}^+{}_j) \right. \\
&\quad \left. + c_n \dot{u}_3^+ ({}^n\dot{v}^+{}_i) \cdot u_3 (\delta^{}n\dot{v}^+{}_j) ] \right] \cdot \begin{cases} 2 & n=0 \\ 1 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.74)
\end{aligned}$$

#### 5.4.6.3 Dämpfungsmatrix infolge innerer Dämpfung

Der erste Term in Gleichung (5.30) führt auf die Dämpfungsmatrix infolge innerer Dämpfung. Zu deren Aufbau ist die Kenntnis der partiellen Ableitungen der Schnittgrößen nach den Verzerrungsgeschwindigkeiten gemäß den Gleichungen (5.23) und (5.24) erforderlich. Die Komponente  ${}^{nm}c_i^{ji}$  stellt somit einen inkrementellen Zuwachs in den inneren Knotenkräften in der Umfangswelle  $n$  am Freiheitsgrad  $j$  dar, verursacht durch eine inkrementelle Geschwindigkeit in der Umfangswelle  $m$  am Freiheitsgrad  $i$ . Im Allgemeinen ist die innere Dämpfungsmatrix wie auch die tangentielle Steifigkeitsmatrix voll besetzt.

$$\begin{aligned}
{}^{nm}c_i^{ji} &= \Delta Z \cdot \sum_{k=1}^{k_{\max}} k \left[ \int_0^{2\pi} \tilde{n}^{\alpha\beta} ({}^m\dot{v}^+{}_i) \cdot \dot{\alpha}_{\alpha\beta}^+ (\delta^{}n\dot{v}^+{}_j) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{m}^{\alpha\beta} ({}^m\dot{v}^+{}_i) \cdot \dot{\beta}_{\alpha\beta}^+ (\delta^{}n\dot{v}^+{}_j) d\theta^1 \cdot W \cdot \sqrt{a} \right] \quad (5.75)
\end{aligned}$$

Das Integral über den Umfang in Gleichung (5.75) kann nun wieder mit den beschriebenen Verfahren, SIMPSON Integration oder Integration über Fourierreihen nach vorangegangener Reihenentwicklung der inkrementellen Schnittgrößen und inkrementellen Verzerrungen, ausgewertet werden. Dies erfolgt in völliger Analogie zu den vorangehenden Abschnitten.

## 5.5 Numerische Lösungsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme

Im Allgemeinen kommen bei der Lösung nichtlinearer Problemstellungen mit Hilfe der Finiten Elemente Methode inkrementell iterative Lösungsverfahren zum Einsatz. Das Residuum, das bei aufgefundenem Gleichgewicht die Norm Null besitzt, liegt für den unbekanntem Verformungszustand  $\underline{v}$  gemäß Gleichung (5.27) in linearisierter Form vor. Die Linearisierung ist dabei als Potenzreihenentwicklung [115] um den bekannten Verformungszustand  $\bar{v}$  mit Abbruch nach dem ersten Reihenglied anzusehen. Durch Anwendung von geeigneten Zeitintegrationsverfahren, die im Kapitel 6 beschrieben werden, geht Gleichung (5.27) unter Einführung effektiver Größen in Gleichung (5.76) über. Im statischen Fall entspricht  $\hat{K}$  genau der tangentialen Steifigkeitsmatrix  $K_t$  und  $\bar{P}$  der Differenz aus  $P_a$  und  $P_i(\bar{v})$ .

$$\hat{K} \cdot \underline{v} = \bar{P} \quad (5.76)$$

In den folgenden Abschnitten werden nun praktikable Verfahren aufgezeigt, mit deren Hilfe nichtlineare Problemstellungen iterativ durch Lösen der Gleichung (5.76) behandelt werden. Diese vorgestellten Verfahren liegen bereits in modularer Form im Programmsystem FEMAS [11] vor.

### 5.5.1 NEWTON-RAPHSON Verfahren

Das NEWTON-RAPHSON Verfahren ist ein klassisches Verfahren zur iterativen Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen. Ausgehend von einem zuletzt für die Größen  $\bar{v}$ ,  $\dot{\bar{v}}$  und  $\ddot{\bar{v}}$  aufgefundenen Gleichgewichtszustand wird die Last im nächsten Zeitschritt  $\Delta t$  (oder nächsten Lastschritt  $\Delta \lambda$  bei statischen Berechnungen) verändert. Eine Laständerung bei dynamischen Berechnungen erfolgt auch ohne Änderung der äußeren Belastung im Zeitschritt  $\Delta t$ , da sich das Tragwerk weiterbewegen will. Dieser Schritt wird als *Inkrementschritt* bezeichnet, wobei durch Auflösen von (5.76) eine erste Näherung der Verformungszuwächse (und damit auch Geschwindigkeits- und Beschleunigungszuwächse gemäß den Ausführungen des Kapitels 6) berechnet wird. Der dabei aufgefundenen Zustand ist allerdings im Allgemeinen durch den Linearisierungsfehler nicht mit den äußeren Lasten im Gleichgewicht, so dass in darauf folgenden *Iterationsschritten* die Lösung verbessert wird. Zu diesem Zweck wird um den aktualisierten

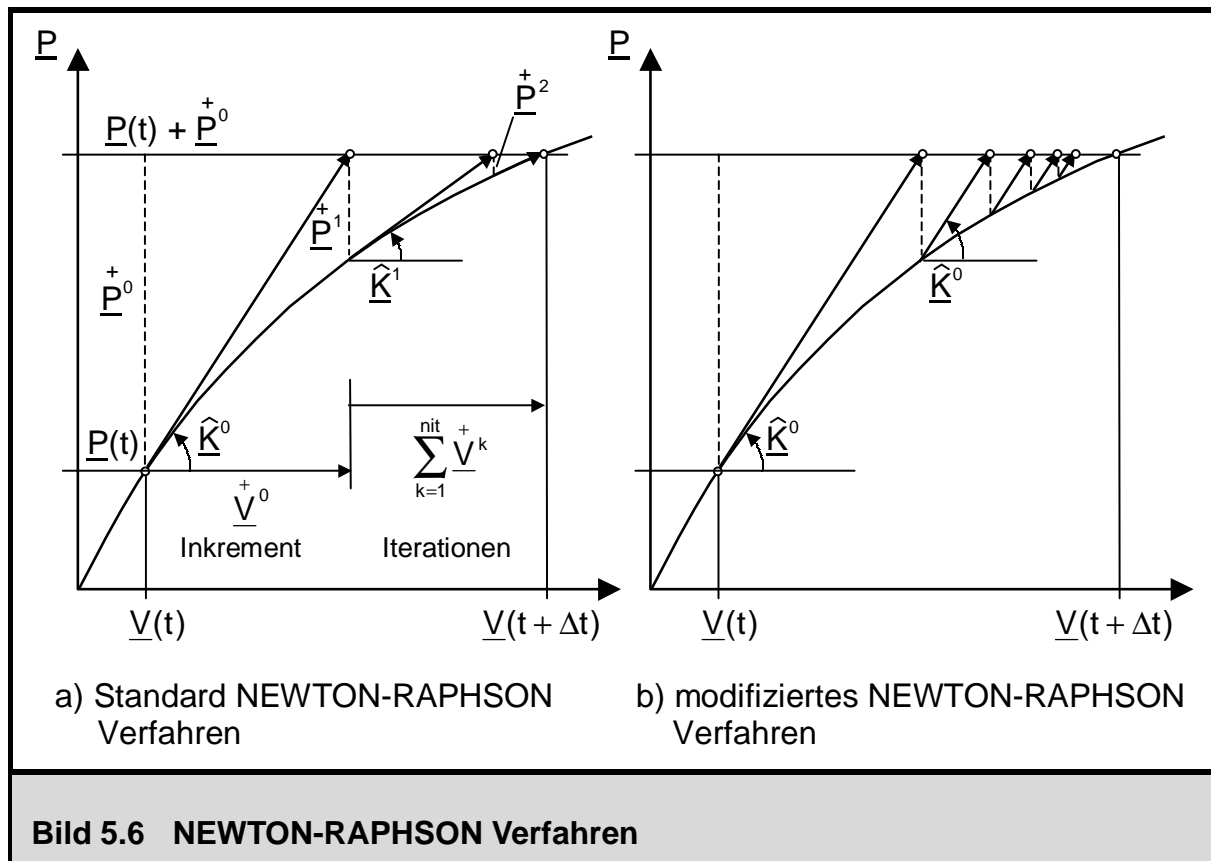


Bild 5.6 NEWTON-RAPHSON Verfahren

Verformungszustand wiederum eine Linearisierung ausgeführt, d.h. es werden für den neuen Zustand tangentiale Steifigkeitsmatrix und evtl. Dämpfungsmatrix neu bestimmt, sowie die Vektoren der inneren Knotenkräfte, der äußeren Dämpfungskräfte und der Trägheitskräfte berechnet. Somit kann eine neue effektive Steifigkeitsmatrix und ein neuer Vektor der Ungleichgewichtskräfte aufgefunden werden, mit denen gemäß Gleichung (5.76) im Iterationsschritt  $k$  wiederum neue Zuwächse in den Verformungen  $\underline{V}^k$ , Geschwindigkeiten  $\underline{\dot{V}}^k$  und Beschleunigungen  $\underline{\ddot{V}}^k$  berechnet werden. Dieses Verfahren ist als NEWTON-RAPHSON Verfahren in Standardform bekannt, charakteristisch für dieses ist, dass in jedem Iterationsschritt die tangentialen Matrizen neu aufgebaut werden. Im Bild 5.6 ist dieses am Beispiel eines Freiheitsgrades grafisch dargestellt. Es wird jedoch darauf hingewiesen, dass bei der Gleichgewichtsiteration nicht zwingend die genaue Tangente verwendet werden muss. Bild 5.6 enthält weiterhin das NEWTON-RAPHSON Verfahren in modifizierter Form, bei dem die tangentialen Matrizen nur zu Beginn eines Inkrementsschrittes berechnet und die nachfolgenden Iterationsschritte mit der gleichen Steifigkeit ausgeführt werden. Wie im Bild 5.6 zu sehen ist, führt dies zu einer höheren Anzahl von Iterationsschritten für einen Zeit- oder Lastschritt. Beide Verfahren führen jedoch zum gleichen Ergebnis; kennzeichnend für einen aufgefundenen Gleichgewichtszustand ist alleine das Verschwinden der rechten Seite von Gleichung (5.27). Die konsistente Linearisierung unter neuer Berechnung der tangentialen Matrizen in jedem Iterationsschritt erreicht dies nur mit der kleinsten Anzahl

von Iterationen. Die Verformungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nach Abschluss der Gleichgewichtsiteration ergeben sich wie folgt:

$$\underline{V}(t + \Delta t) = \underline{V}(t) + \sum_{k=0}^{n_{it}} \underline{\dot{V}}^k \quad (5.77)$$

$$\underline{\dot{V}}(t + \Delta t) = \underline{\dot{V}}(t) + \sum_{k=0}^{n_{it}} \underline{\ddot{V}}^k \quad (5.78)$$

$$\underline{\ddot{V}}(t + \Delta t) = \underline{\ddot{V}}(t) + \sum_{k=0}^{n_{it}} \underline{\ddot{V}}^k \quad (5.79)$$

### 5.5.2 RIKS-WEMPNER-WESSELS Verfahren

Im Allgemeinen stellt das NEWTON-RAPHSON Verfahren ein leistungsfähiges Verfahren zur Lösung nichtlinearer algebraischer Gleichungssysteme dar. In einigen Fällen versagt es jedoch; seine wesentliche Schwäche besteht darin, dass es keine Laststeuerung beinhaltet. Nach dem Aufbringen eines Lastinkrements wird für den neuen Lastzustand ohne Veränderung der Last versucht, iterativ einen neuen Gleichgewichtszustand aufzufinden, wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt worden ist. Auf abfallenden Lastpfaden kann das Verfahren in dieser Form nicht angewendet werden. Zur Beseitigung dieser Schwäche führten RIKS [106] und WEMPNER [122] das Bogenlängenverfahren ein. Dieses erweiterte die tangentielle Steifigkeitsbeziehung um eine zusätzliche Bestimmungsgleichung für den Lastparameter  $\lambda$  in Abhängigkeit der Bogenlänge. Der wesentliche Nachteil des herkömmlichen Bogenlängenverfahrens liegt darin, dass infolge dieser zusätzlichen Bestimmungsgleichung für  $\lambda$  die erweiterte Steifigkeitsbeziehung ihre symmetrische Eigenschaft verliert, so dass herkömmliche Speicher- und Lösungsverfahren wie die  $\underline{L}\underline{D}\underline{L}^T$ -Faktorisierung [136], die im übrigen im Gegensatz zur CHOLESKY Zerlegung auch bei indefiniten Matrizen funktioniert, nicht mehr angewendet werden können.

Mit den Ergänzungen von WESSELS [124] wird die genannte Schwäche des Bogenlängenverfahrens beseitigt. Im Gegensatz zu diesem erfolgt bei dem Verfahren nach RIKS-WEMPNER-WESSELS, das in [103] zusammenfassend dargestellt ist, die Iteration in der Normalenebene zum Vektor des Inkrementeschrittes durch dessen Endpunkt. Im Bild 5.7 ist der Iterationsvorgang für die Standardversion mit Steifigkeitsupdate in jedem Iterationsschritt sowie für das modifizierte Verfahren dargestellt. Im Folgenden wird der Ablauf des Standardverfahrens beschrieben, wobei dieser leicht auf das mo-

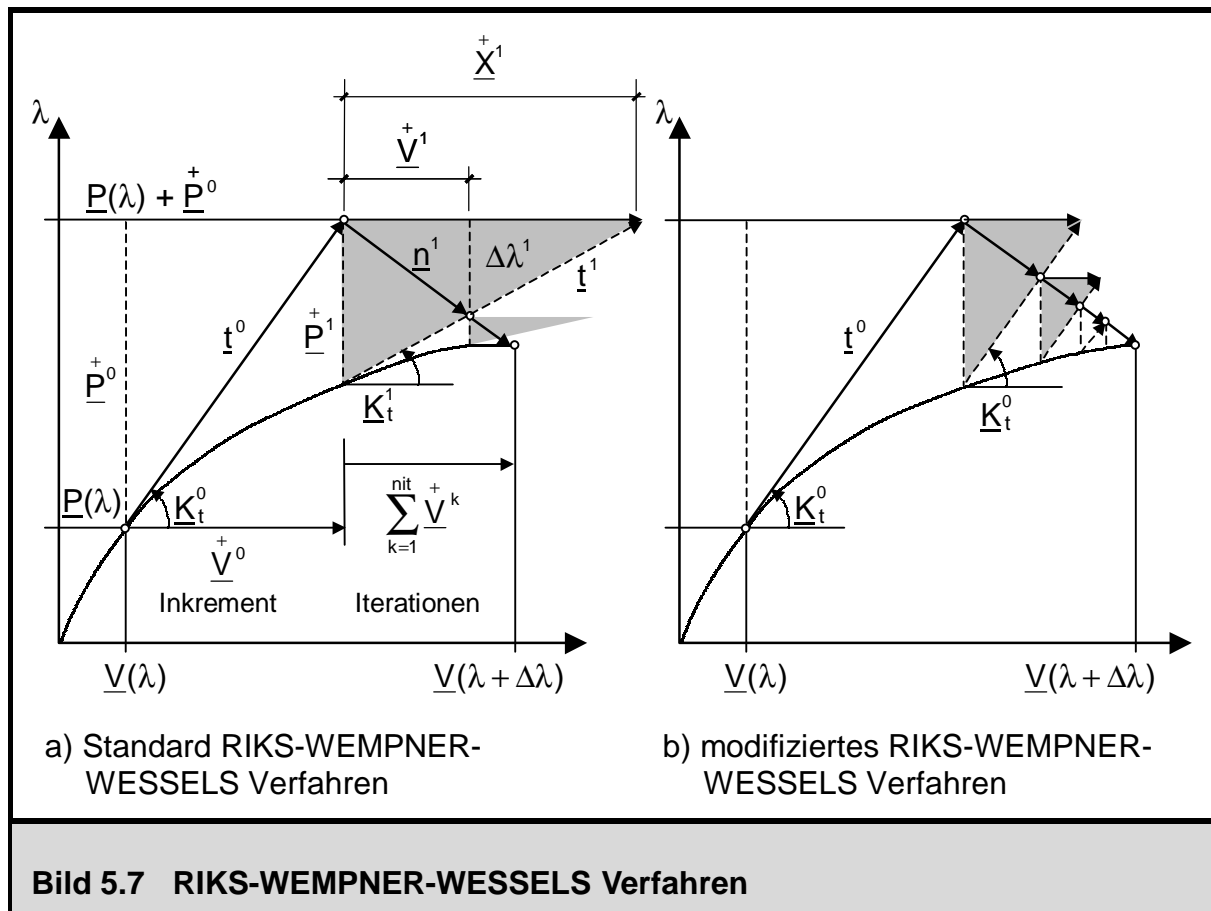


Bild 5.7 RIKS-WEMPNER-WESSELS Verfahren

difizierte Verfahren übertragen werden kann. Wie beim NEWTON-RAPHSON Verfahren wird zuerst ein Inkrementsschritt mit dem Differenzlastfaktor  $\Delta\lambda^0$  mit dem zugehörigen Tangentenvektor  $\underline{t}^0$  (5.80) an die Last-Verformungskurve ausgeführt.

$$\underline{t}^0 = \begin{bmatrix} \underline{V}^0 \\ \Delta\lambda^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{K}_t^0)^{-1} \cdot \underline{P}^0 \\ \Delta\lambda^0 \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Der Normalenvektor

$$\underline{n}^k = \begin{bmatrix} \underline{V}^k \\ \Delta\lambda^k \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

setzt sich nach Bild 5.7 aus der gesuchten Korrektur des Lastfaktors um  $\Delta\lambda^k$  und den gesuchten Verformungsincrementen  $\underline{V}^k$  im aktuellen Iterationsschritt  $k$  zusammen; er erfüllt weiterhin die Orthogonalitätsbeziehung (5.82).

$$\underline{\underline{t}}^0 \cdot \underline{\underline{n}}^k = \underline{\underline{V}}^0 \cdot \underline{\underline{V}}^k + \Delta\lambda^0 \cdot \Delta\lambda^k = 0 \quad (5.82)$$

Aus den gegebenen Ungleichgewichtskräften  $\underline{\underline{P}}^k$  des aktuellen Iterationsschrittes werden zunächst die zugehörigen Verformungsinkremente  $\underline{\underline{X}}^k$  gemäß (5.83) berechnet. Anschließend wird der Vektor  $\underline{\underline{t}}^k$  aus einer äußeren Referenzbelastung  $\Delta\lambda^{k*} \cdot \underline{\underline{P}}_a$  analog zum Inkrementschritt bestimmt, wobei der Lastfaktor  $\Delta\lambda^{k*}$  frei gewählt werden kann (5.84). Die endgültige Lösung  $\underline{\underline{n}}^k$  für den aktuellen Lastschritt kann nun als vektorielle Summe aus  $\underline{\underline{X}}^k$  und  $\underline{\underline{t}}^k$  nach Gleichung (5.85) gebildet werden, wobei der Skalierungsfaktor  $\xi^k$  des Vektors  $\underline{\underline{t}}^k$  für den Schnittpunkt mit der Normalenebene gesucht ist.

$$\underline{\underline{X}}^k = (\underline{\underline{K}}_t^k)^{-1} \cdot \underline{\underline{P}}^k \quad (5.83)$$

$$\underline{\underline{t}}^k = \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}}^{k*} \\ \Delta\lambda^{k*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{\underline{K}}_t^k)^{-1} \cdot \Delta\lambda^{k*} \cdot \underline{\underline{P}}_a \\ \Delta\lambda^{k*} \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

$$\underline{\underline{n}}^k = \underline{\underline{X}}^k + \xi^k \cdot \underline{\underline{t}}^k \quad (5.85)$$

Das Einsetzen der Beziehung (5.85) in (5.82) liefert die Bestimmungsgleichung für den Skalierungsfaktor  $\xi^k$ , mit dessen Kenntnis nun die gesuchten Verformungsinkremente und die Änderung des Lastfaktors im aktuellen Iterationsschritt berechnet werden können.

$$\xi^k = - \frac{\underline{\underline{V}}^0 \cdot \underline{\underline{X}}^k}{\underline{\underline{V}}^0 \cdot \underline{\underline{V}}^{k*} + \Delta\lambda^0 \cdot \Delta\lambda^{k*}} \quad (5.86)$$

$$\underline{\underline{V}}^k = \underline{\underline{X}}^k + \xi^k \cdot \underline{\underline{V}}^{k*} \quad (5.87)$$

$$\Delta\lambda^k = \xi^k \cdot \Delta\lambda^{k*} \quad (5.88)$$

Nach Abschluss der Gleichgewichtsiterationen ergeben sich nach Gleichung (5.89) die Verformungszuwächse und nach Gleichung (5.90) der Zuwachs im Lastfaktor für das



aktuelle Lastinkrement. Es wird nochmals darauf hingewiesen, dass im Gegensatz zum NEWTON-RAPHSON Verfahren beim Verfahren nach RIKS-WEMPNER-WESSELS auch die aufgebrachte Belastung über den Lastfaktor verändert wird. Demzufolge kann dieses Verfahren nur bei statischen Berechnungen eingesetzt werden, da bei dynamischen Berechnungen der Lastfaktor zu einer bestimmten Zeit durch die Anregungsfunktion fest vorgegeben ist. Die Gleichungen dieses Abschnitts sind ebenso für das modifizierte Iterationsverfahren gültig, dabei muss lediglich die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_t^k$  eines Iterationsschrittes durch die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_t^0$  zu Beginn des Inkrementeschrittes ersetzt werden. Die Verwendung der exakten Linearisierung in jedem Iterationsschritt beeinflusst wie bereits erläutert lediglich die Konvergenzgeschwindigkeit. Das Kriterium für das Erreichen des Gleichgewichtszustandes ist das Verschwinden des Vektors der Ungleichgewichtskräfte.

$$\Delta \underline{V} = \underline{V}^+{}^0 + \sum_{k=1}^{n_{it}} \Delta \underline{V}^+{}^k \quad (5.89)$$

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda^0 + \sum_{k=1}^{n_{it}} \Delta \lambda^k \quad (5.90)$$

## 5.6 Anwendungsbeispiele für statische Berechnungen

Zum Abschluss des Kapitels 5 wird das vorgestellte numerische Rechenmodell mit Ringelementen und dessen programmtechnische Umsetzung an zwei Testbeispielen für nichtlineare statische Berechnungen vorgeführt und überprüft. In der Arbeit von MEISWINKEL [88] sind unter anderem Rotationsschalen unter Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität sowie der physikalischen Nichtlinearität des Stahlbetons unter Verwendung von Schalenviereckelementen der Elementfamilie ROSH48, die im Programmsystem ROSHE3 [128] implementiert ist, untersucht worden. Für zwei dieser Beispiele werden im Rahmen der nächsten Abschnitte ergänzende Untersuchungen vorgenommen und Vergleichsrechnungen mit den erweiterten Schalenringelementen des Programmsystems ROSHE [130] durchgeführt.

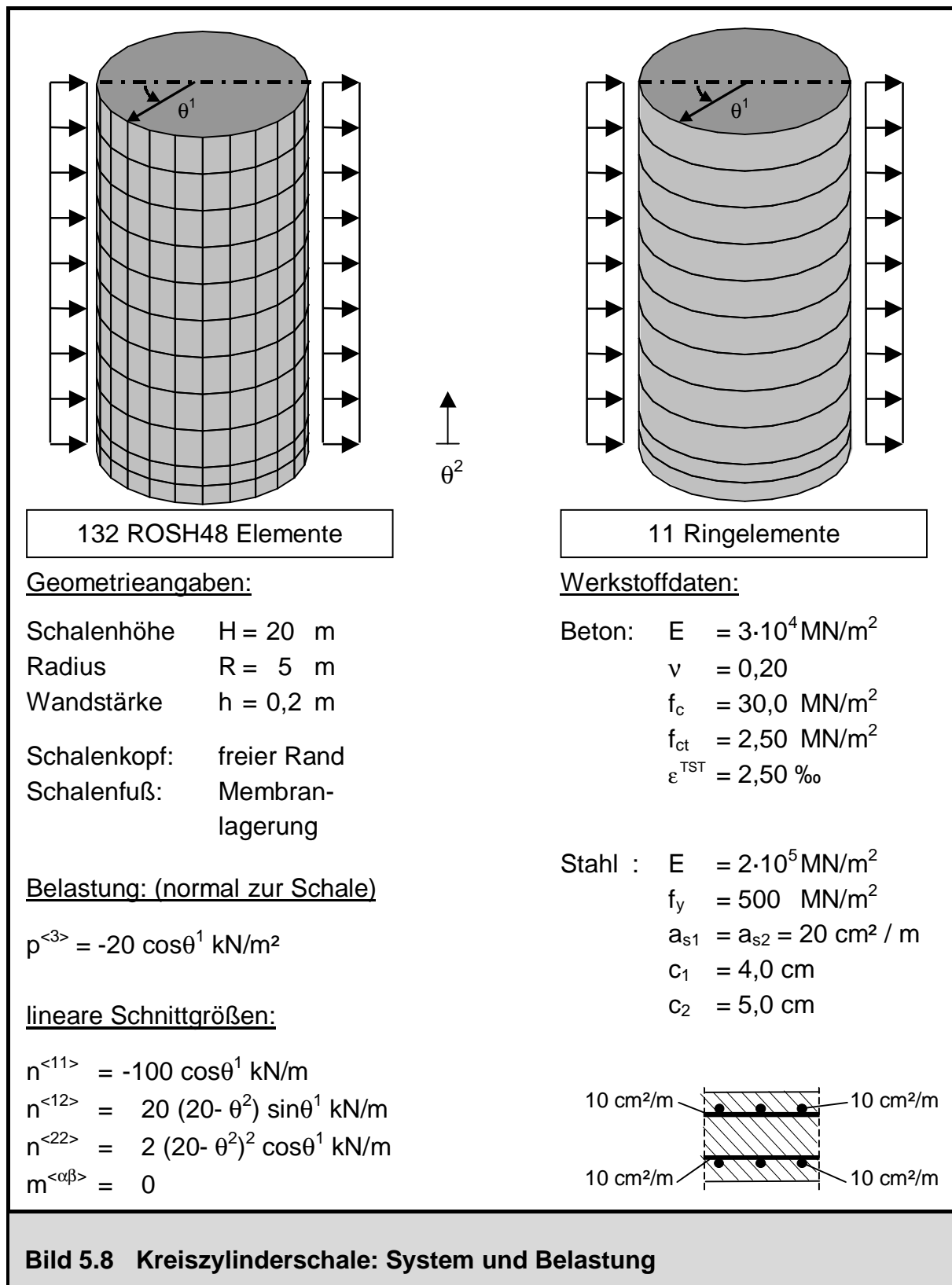


Bild 5.8 Kreiszylinderschale: System und Belastung

### 5.6.1 Kreiszylinderschale unter nicht-rotationssymmetrischer Belastung

Im Bild 5.8 ist das System einer Kreiszylinderschale mit Membranlagerung am Fuß unter einer nicht-rotationssymmetrischen Belastung  $p^{<3>} = -20 \cos(\theta^1)$  kN/m<sup>2</sup> (Fourierterm  $n = 1$ ) mit Angabe sämtlicher Materialdaten dargestellt. Den Untersuchungen werden zwei unterschiedliche Rechenmodelle zugrundegelegt: Zum einen wird die Schale unter Verwendung von 132 ROSH48 Schalenviereckelementen abgebildet, zum anderen wird ein Modell bestehend aus 11 konischen Ringelementen untersucht, wobei die Anzahl der verwendeten Umfangswellen  $n_{\max}$  zur Darstellung des Verformungszustandes offen gelassen wird. Die Ergebnisse der linearen Membranlösung sind ebenfalls im Bild 5.8 angegeben. Für die Meridiankraft am Schalenfuß im Meridian  $\theta^1 = 0^\circ$  liefert die lineare Lösung einen Wert von  $n^{<22>} = 800$  kN/m. Die Rissnormalkraft der Schale von 500 kN/m liegt allerdings deutlich unter diesem Wert, so dass die ersten Risse in der Schale bei einem Lastfaktor von  $\lambda = 0,63$  auftreten. Dieses Verhalten ist auch der Lastverformungskurve für den Schalenkopf im Meridian  $\theta^1 = 0^\circ$  des Bildes 5.9 zu entnehmen, die unter Verwendung von Ringelementen mit einem Verformungsansatz von 15 Umfangswellen berechnet worden ist. Deutlich zu erkennen ist der signifikante Steifigkeitsabfall in der Lastverformungskurve nach Überschreiten der Risslast von  $\lambda = 0,63$ . Die Belastung kann bis zu einem Lastfaktor von  $\lambda_u = 1,22$  gesteigert werden.

Um zu beurteilen, wie viele Umfangswellen zur Wiedergabe des nichtlinearen Verformungszustandes bei der Berechnung verwendet werden müssen, soll Bild 5.10 näheren Aufschluss geben. Darin sind die Radialverformungen am Schalenkopf für den Lastfaktor  $\lambda = 1,00$  über den Umfang dargestellt. Die lineare Lösung besitzt wie erwartet korrespondierend zur Belastung nur Verformungsanteile in der Umfangswelle 1, da ja in diesem Fall die Steifigkeitsbeziehungen entkoppelt sind. Für die nichtlineare Lösung sind Berechnungen mit 1, 2, 6 und 15 Umfangswellen durchgeführt und aufgetragen worden. Man erkennt deutlich, dass die Verformungen mit mindestens 2 Umfangswellen angesetzt werden müssen, um brauchbare Lösungen zu erhalten. Die Verwendung einer maximalen Anzahl von 6 oder gar 15 Umfangswellen führt zu einer nur unwesentlichen Genauigkeitssteigerung. In diesem Falle hätten also die Verformungen mit  $n_{\max} = 6$  ausreichend genau berechnet werden können, was den numerischen Aufwand gegenüber einer 2D-Diskretisierung erheblich reduziert. Es lassen sich allerdings keine generalisierenden Aussagen zur Wahl des höchsten Fourierterms treffen, dieser ist unter anderem abhängig von der betrachteten Systemgröße, wie auch vom Lastfaktor. Führt man eine Fourieranalyse für den nichtlinear berechneten Verformungszustand aus Bild 5.10 durch, so erkennt man, dass ungefähr 70% der Verformungen aus der Umfangswelle 1 stammen und 30% aus der Umfangswelle 2, die restlichen Umfangswellen liefern nahezu unbedeutende Beiträge.

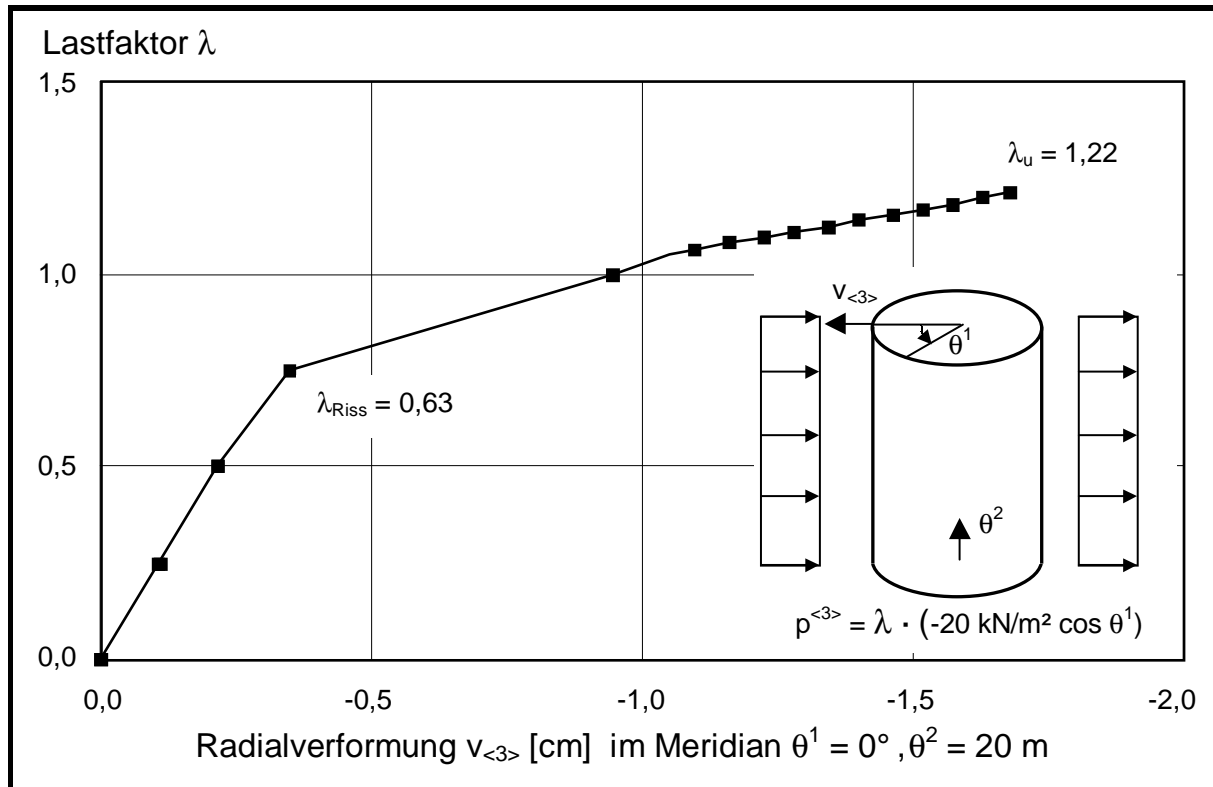


Bild 5.9 Traglastberechnung Kreiszyinderschale

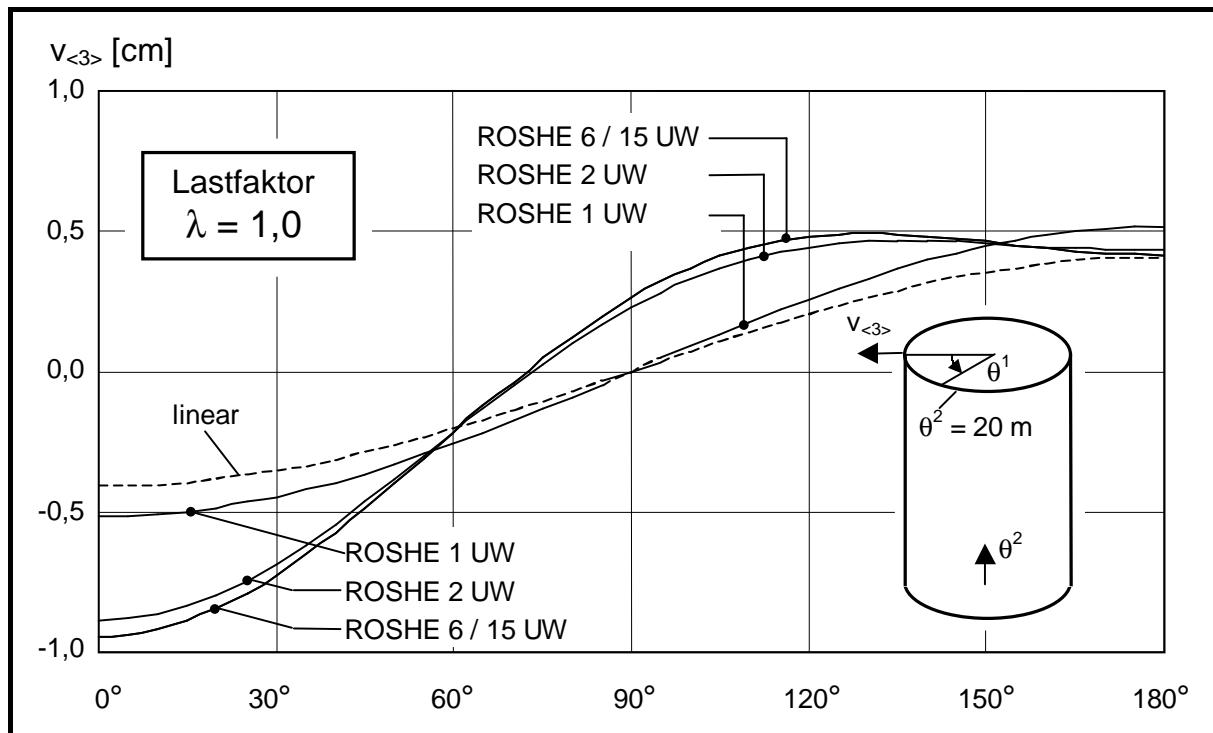


Bild 5.10 Radialverformungen am Schalenkopf

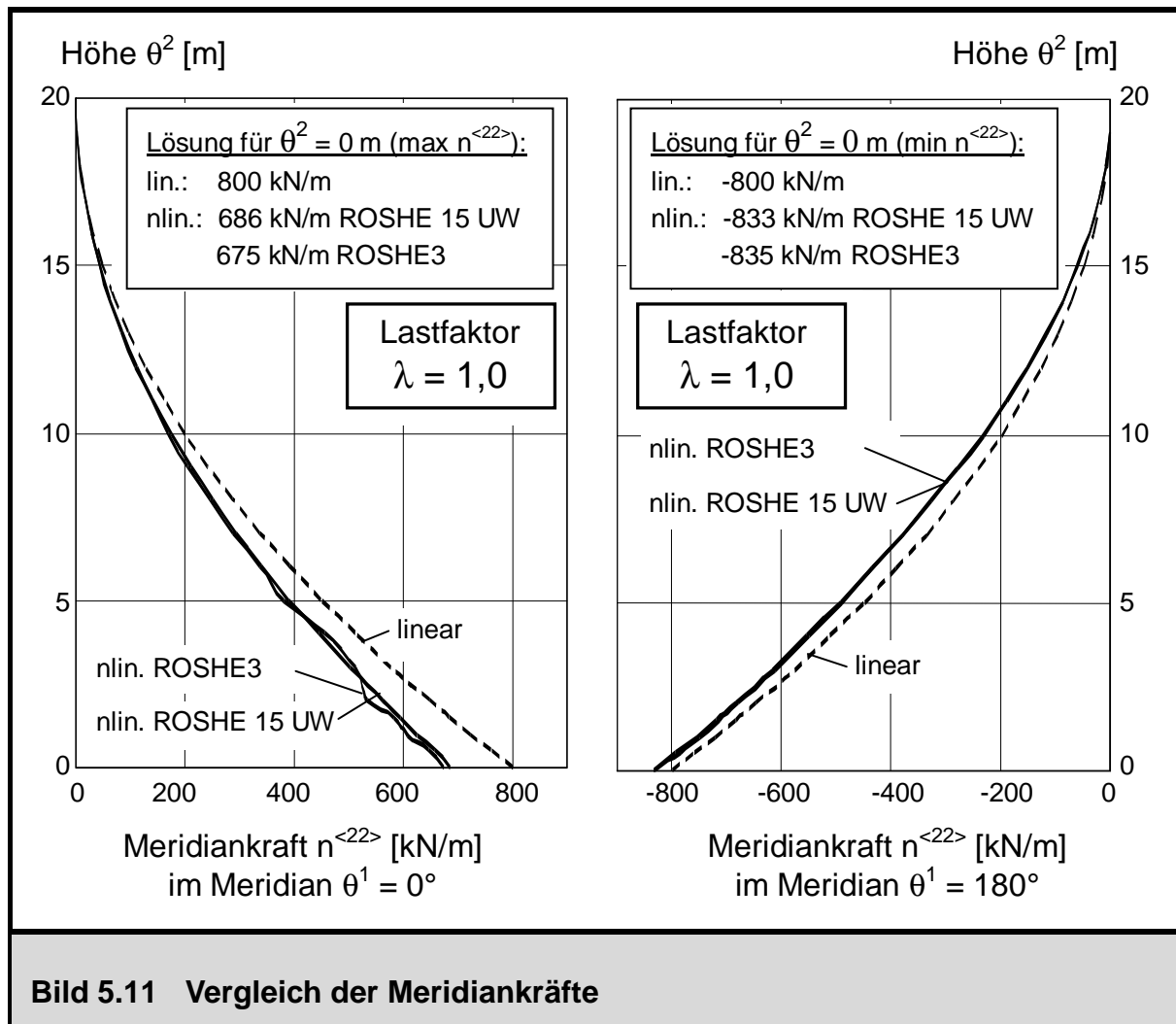


Bild 5.11 stellt die Meridiankräfte  $n^{<22>}$  in den Meridianen  $\theta^1 = 0^\circ$  und  $\theta^1 = 180^\circ$  dar. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung der Ringelementlösung mit der Schalenviereckelementlösung zu erkennen. Die maximalen Meridianzugkräfte am Schalenfuß reduzieren sich durch das Aufreißen des Stahlbetons von 800 kN/m auf 686 kN/m (Ergebnis ROSHE3: 675 kN/m), wohingegen sich die maximalen Meridiandruckkräfte am Schalenfuß von 800 kN/m vom Betrag her auf 833 kN/m (Ergebnis ROSHE3: 835 kN/m) erhöhen. Dabei treten im oberen Schalenbereich durch eine Ovalisierung des Rings Ringbiegemomente auf [88], die ebenfalls quantitativ nachvollzogen werden können, auf deren Darstellung an dieser Stelle allerdings verzichtet wird. Das erläuterte Anwendungsbeispiel zeigt im übrigen sehr schön, wie das lineare Tragverhalten einer Rotationsschale durch das Aufreißen des Stahlbetons verändert wird. Im linearen Fall treten Verformungs- und Schnittgrößenanteile lediglich in denen zur Belastung korrespondierenden Umfangswellen, in diesem speziellen Fall lediglich  $n = 1$ , auf. Im nichtlinearen Fall hingegen liegt eine Kopplung in den Fouriertermen vor, so dass die Belastung in der Umfangswelle  $n = 1$  Verformungen und Schnittgrößen in anderen Umfangswellen zur Folge haben. Während der Gleichgewichtsiteration entstehen innere

Knotenkräfte auch in anderen Umfangswellen, die in der Differenz mit der äußeren Belastung zu einem Residuum und demnach auch zu Verformungszuwächsen in diesen Umfangswellen führen. Nach Abschluss der Gleichgewichtsiteration halten jedoch die inneren Knotenkräfte der aufgebrachten äußeren Belastung das Gleichgewicht in der Umfangswelle  $n = 1$ , und die inneren Knotenkräfte in den restlichen Umfangswellen verschwinden. Die nichtlinearen Zusammenhänge werden hier besonders deutlich: Ein aus mehreren Fouriertgliedern zusammengesetzter Verformungszustand führt nach Auswerten der Gleichung (5.53) zu inneren Knotenkräften lediglich im Fourierterm  $n = 1$ . Die selben Effekte sind ebenfalls in [81] an einem ähnlichen Beispiel, bei dem die einzige Nichtlinearität im Abheben der Kreiszylinderschale am Fundamentfuß besteht, aufgezeigt und verifiziert worden.

### 5.6.2 Kühlturmschale unter Windbelastung

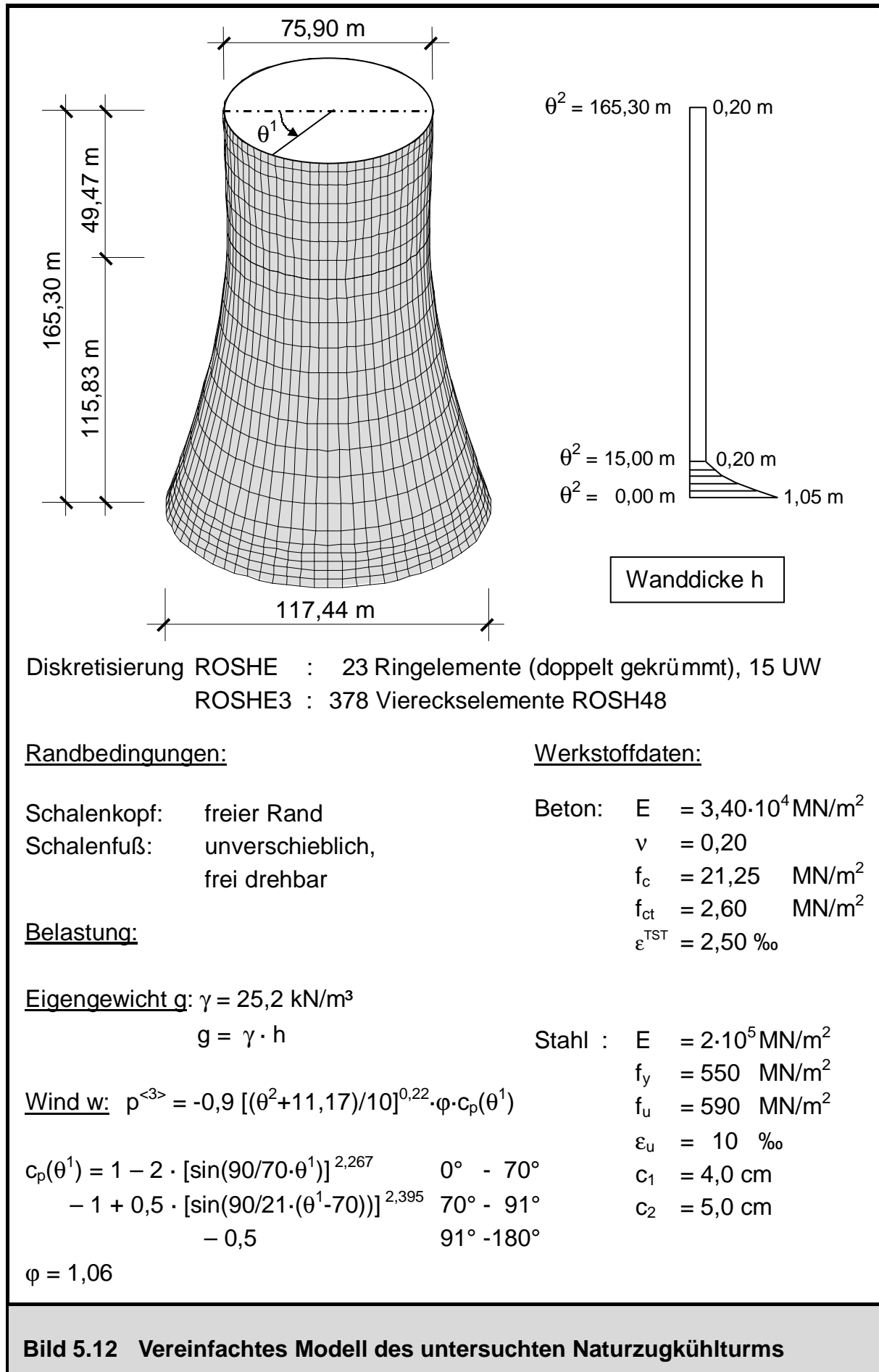
Als weiteres Anwendungsbeispiel zur nichtlinearen statischen Berechnung mit dem im Rahmen dieser Arbeit erweiterten doppelt gekrümmten Schalenringelement ist ein vereinfachtes Modell eines ausgeführten Naturzugkühlturms (Vernachlässigung des oberen Ringbalkens sowie Membranlagerung am Schalenfuß) herangezogen worden. Dessen Meridiankurve lässt sich durch die Beziehung

$$R(\theta^2) = -15,36 + 51,96 \cdot \sqrt{1 + \left[ \frac{\theta^2 - 115,83}{113,99} \right]^2} \quad \theta^2 \leq 115,83 \quad (5.91)$$

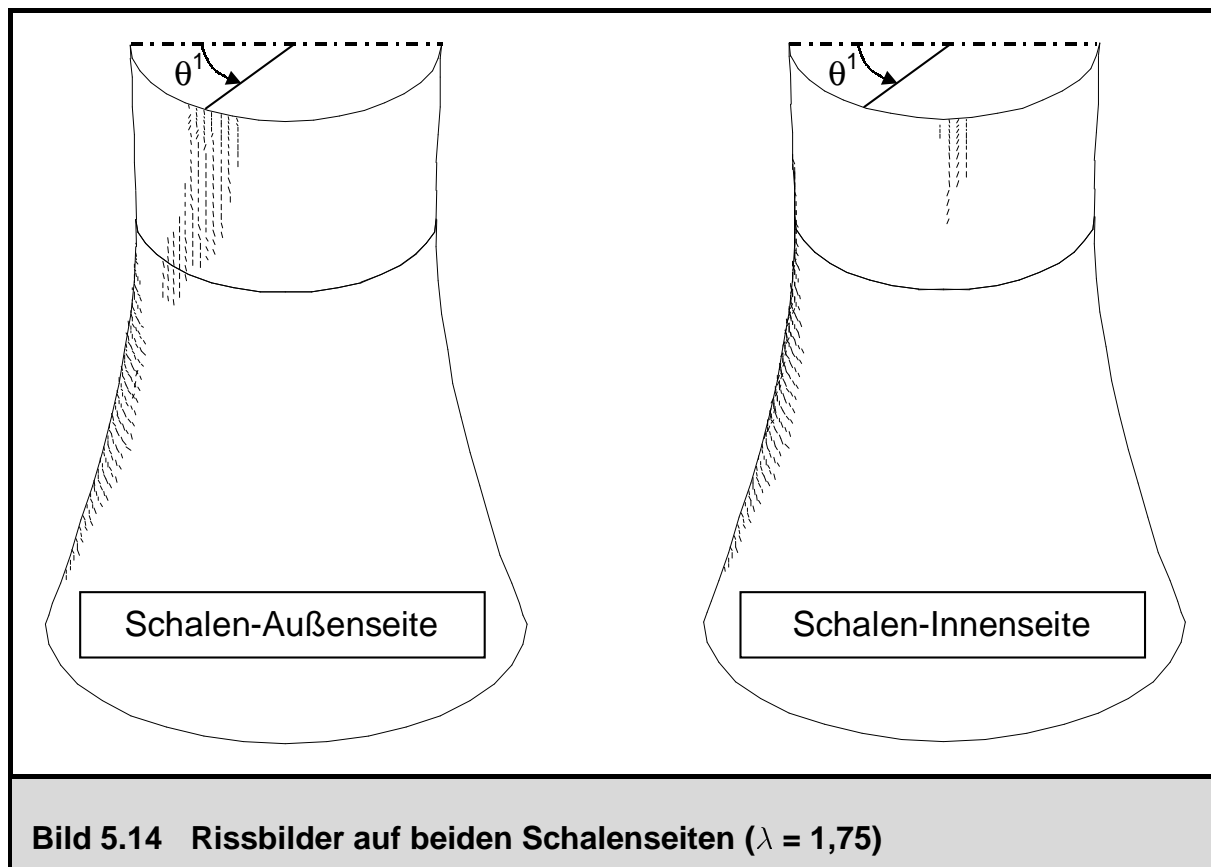
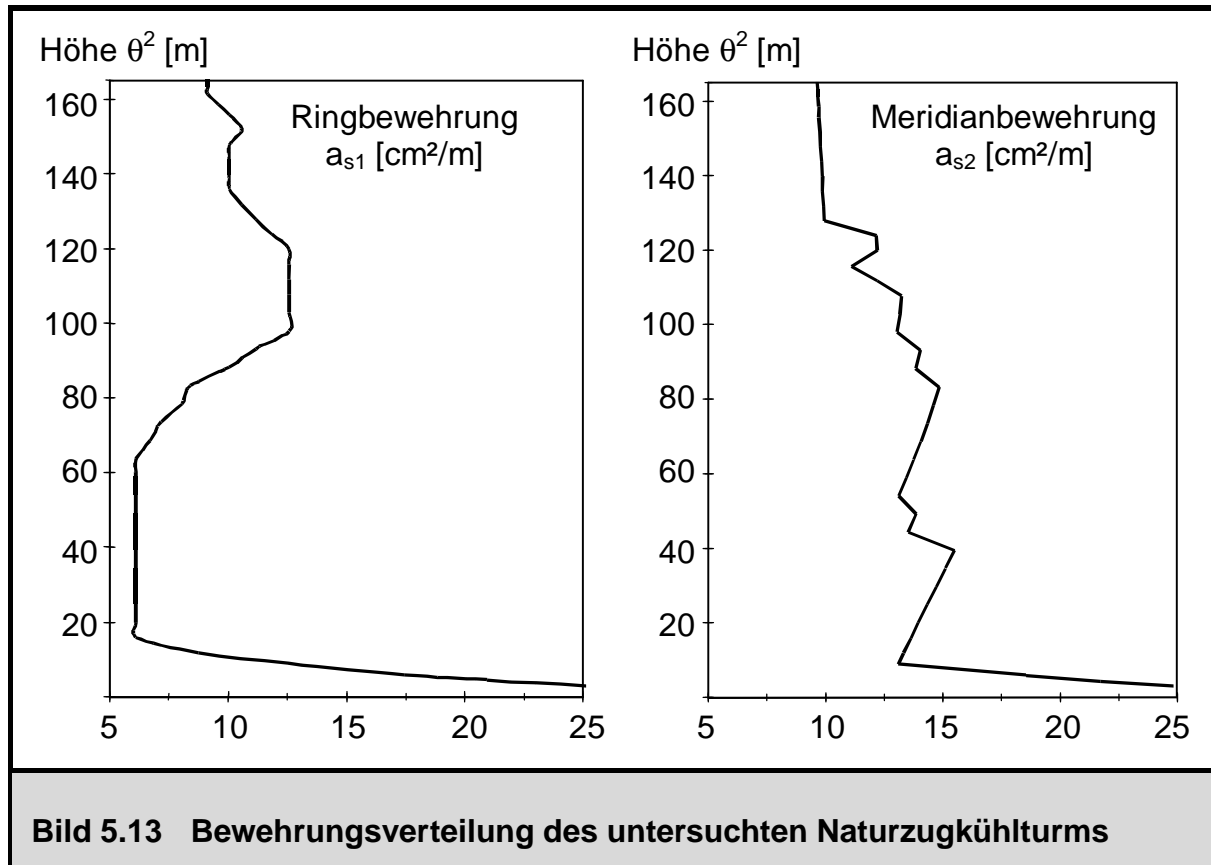
$$R(\theta^2) = 36,34 + 0,26 \cdot \sqrt{1 + \left[ \frac{\theta^2 - 115,83}{9,03} \right]^2} \quad \theta^2 > 115,83$$

beschreiben. Für dieses vereinfachte System, das im Bild 5.12 abgebildet ist, ist in [88] eine physikalisch nichtlineare Berechnung (2D-Diskretisierung mit Schalenviereckelementen ROSH48) durchgeführt worden. Im Rahmen dieser Arbeit sind mit dem in [88] gewählten numerischen Modell für die Einwirkungskombination bestehend aus Eigengewicht und Wind für ein Windlastniveau  $\lambda = 1,75$  ergänzende Untersuchungen vorgenommen, sowie mit den um die nichtlinearen Elementmatrizen erweiterten Schalenringelementen mit doppelter Krümmung Vergleichsrechnungen durchgeführt worden. Zur Darstellung der Windbelastung wie auch der Verformungen im Lösungsansatz wird eine Fourierreihe mit Abbruch nach der Umfangswelle 15 verwendet.

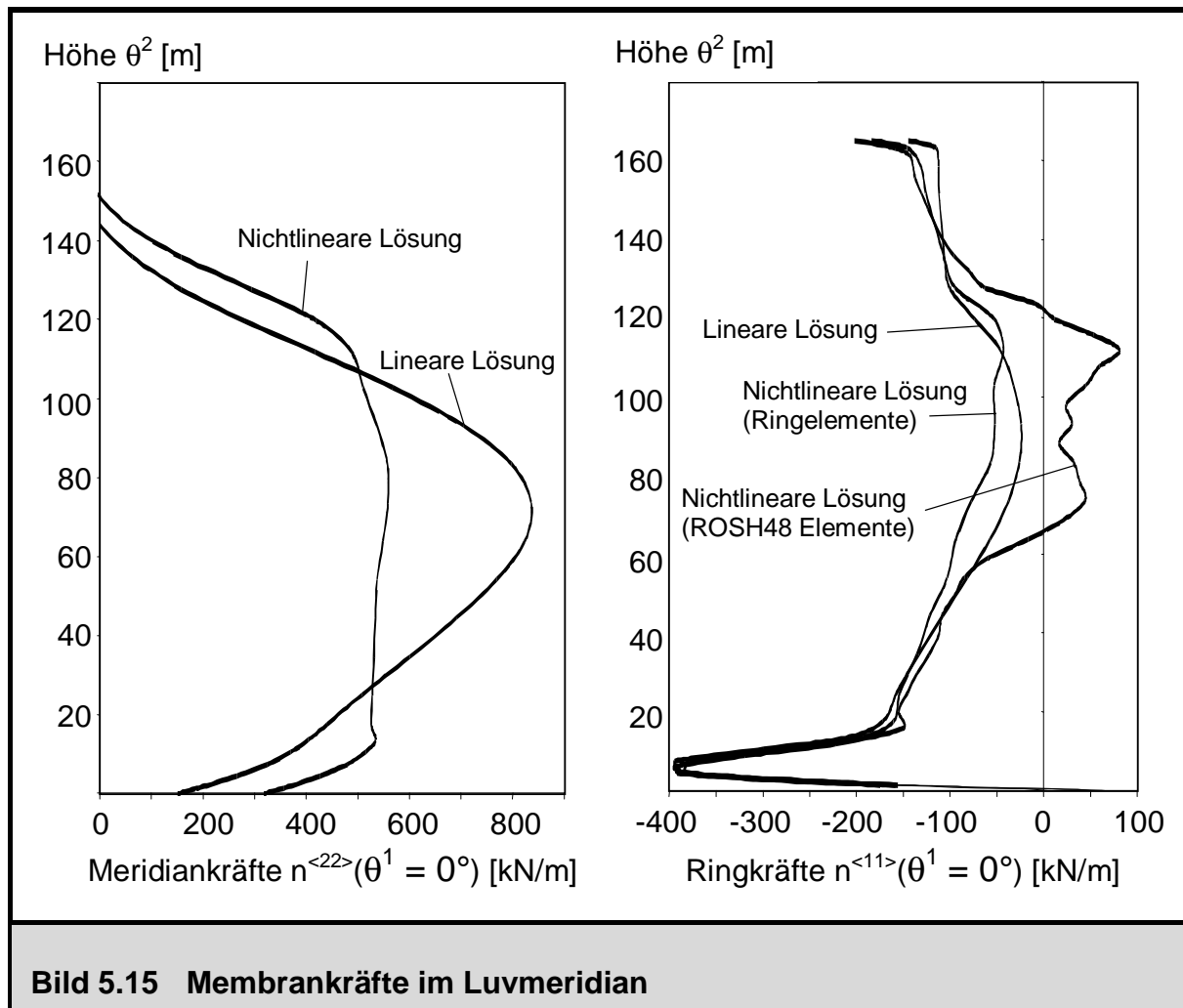
Die Meridiankraftbeanspruchung  $n^{<22>}$  infolge der Windkräfte der gegebenen Lastkombination bei  $\lambda = 1,75$  verursacht ein Aufreißen der Kühlturmschale (Bild 5.14) um



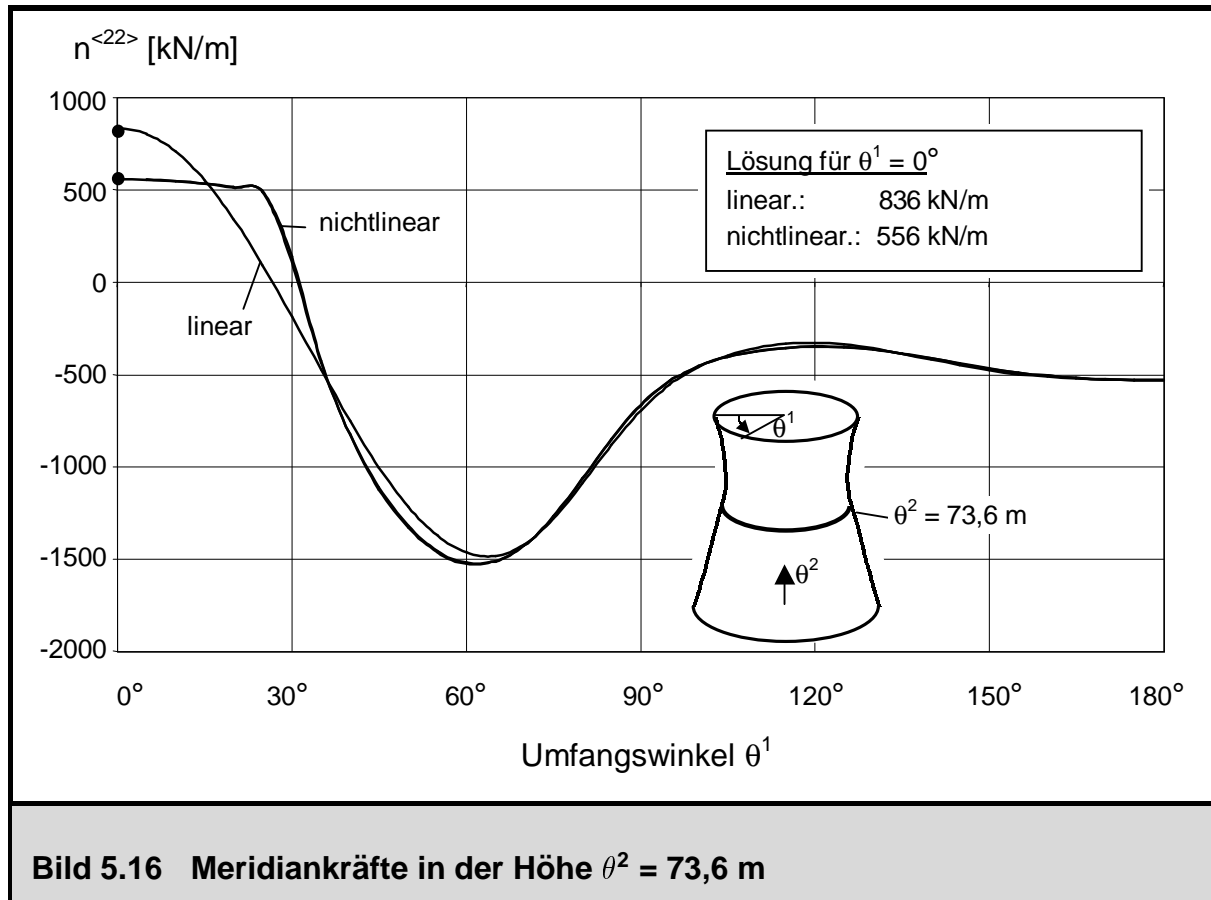
**Bild 5.12 Vereinfachtes Modell des untersuchten Naturzugkühlturms**



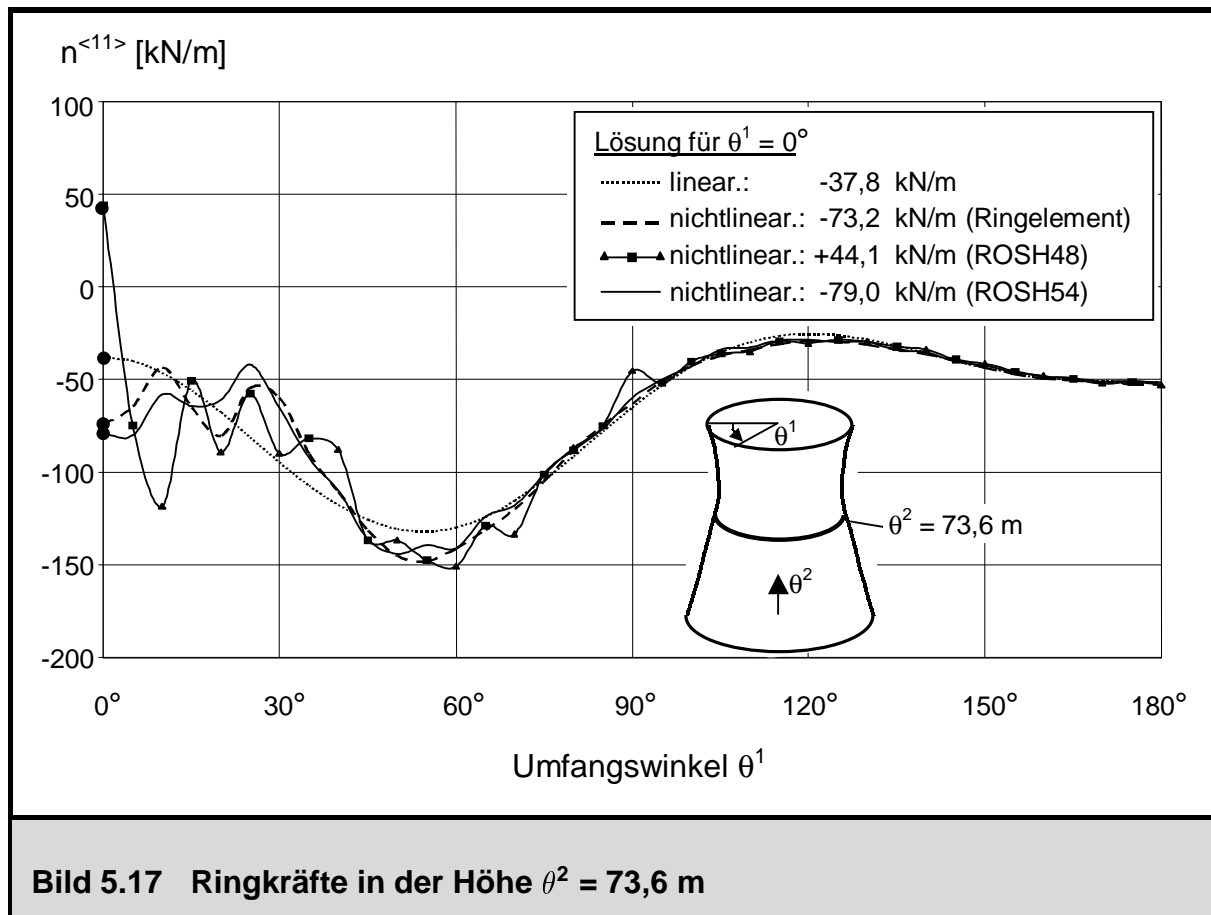




den Luvmeridian herum, ungefähr bis zum Umfangswinkel  $\theta^1 = 25^\circ$ . Diese Risse verlaufen durch die gesamte Schalenwand hindurch. Weiterhin sind oberhalb der Taille auf beiden Schalenseiten Vertikalrisse zu erkennen, die sich jedoch in unterschiedlichen Umfangsbereichen befinden und nicht durch die Schalenwand hindurchreichen. Sie sind Folge von Ringbiegemomenten  $m^{<11>}$ , die sich in diesen Regionen einstellen. Auf eine ausführlichere Erläuterung des nichtlinearen Beanspruchungszustands wird an dieser Stelle verzichtet, es sei hierzu auf [88] und [129] verwiesen. Im Folgenden werden für die beiden unterschiedlichen Rechenmodelle (2D Diskretisierung sowie Ringelementdiskretisierung) die berechneten Schnittgrößenzustände verglichen. Bild 5.15 zeigt die Verläufe der Meridiankraft  $n^{<22>}$  und der Ringkraft  $n^{<11>}$  über die Schalenhöhe im Luvmeridian  $\theta^1 = 0^\circ$ , da sich hier die stärksten Nichtlinearitäten infolge des Reißens einstellen. Für die Meridiankräfte können keine signifikanten Abweichungen zwischen den unterschiedlichen Modellen sowohl für die linearen als auch für die nichtlinearen Ergebnisse festgestellt werden. Die maximale Meridiankraft im Meridian  $\theta^1 = 0^\circ$  stellt sich zu  $n^{<22>} = 836$  kN/m bei der linearen Lösung in einer Schalenhöhe von  $\theta^2 = 73,63$  m ein. Werden die nichtlinearen Stahlbetoneigenschaften bei der Berechnung mit berücksichtigt, so reduziert sich die maximale Meridiankraft



von  $n^{<22>} = 836$  kN/m auf  $n^{<22>} = 556$  kN/m. Für die Schalenhöhe  $\theta^2 = 73,63$  m ist der Verlauf der Meridiankräfte über die Umfangsrichtung im Bild 5.16 aufgetragen. Im Übergangsbereich zwischen gerissenem und ungerissenem Beton ( $\theta^1 \approx 25^\circ$ ) ist sehr deutlich ein scharfer Knick zu erkennen. Die Rissnormalkraft von  $f_{ct} \cdot h = 520$  kN/m wird dort erreicht. Zwischen den Umfangswinkeln  $\theta^1 = 0^\circ$  und  $\theta^1 = 25^\circ$  liegt ein signifikanter Steifigkeitsverlust gegenüber den ungerissenen Bereichen vor, so dass sich die Meridiankräfte in steifere Bereiche zwischen  $\theta^1 = 20^\circ$  und  $\theta^1 = 35^\circ$  umverteilen. Für die dem Windstaupunkt abgewandten Schalenbereiche können keine Abweichungen zwischen der linearen und nichtlinearen Lösung festgestellt werden. Die Ringelementlösung zeigt somit in den Meridiankräften eine sehr gute Übereinstimmung mit der Lösung unter Verwendung einer 2D Diskretisierung mit den Schalenviereckelementen ROSH48. Weiterhin ist im Bild 5.15 der Verlauf der Ringkräfte  $n^{<11>}$  über die Schalenhöhe  $\theta^2$  im Meridian  $\theta^1 = 0^\circ$  aufgetragen. Diese müssen sich aus Gleichgewichtsgründen ebenso umverteilen. Für die lineare Lösung zeigt sich in beiden Modellen eine gute Übereinstimmung, wohingegen die nichtlinear berechneten Ringkräfte in diesem Meridian doch deutlich auseinander laufen. Für die Lösung mit den ROSH48 Schalenviereckelementen treten zwischen den Höhen  $\theta^2 = 70$  m und  $\theta^2 = 120$  m sogar Zugringkräfte auf. Um diese Diskrepanzen zu klären, ist im Bild 5.17 der Verlauf der Ringkräfte in Ringrichtung in der Schalenhöhe  $\theta^2 = 73,63$  m aufgetragen. Zwischen  $\theta^1 = 0^\circ$  und  $\theta^1 = 70^\circ$  weicht die nichtlineare Lösung von der linearen Lösung ab.

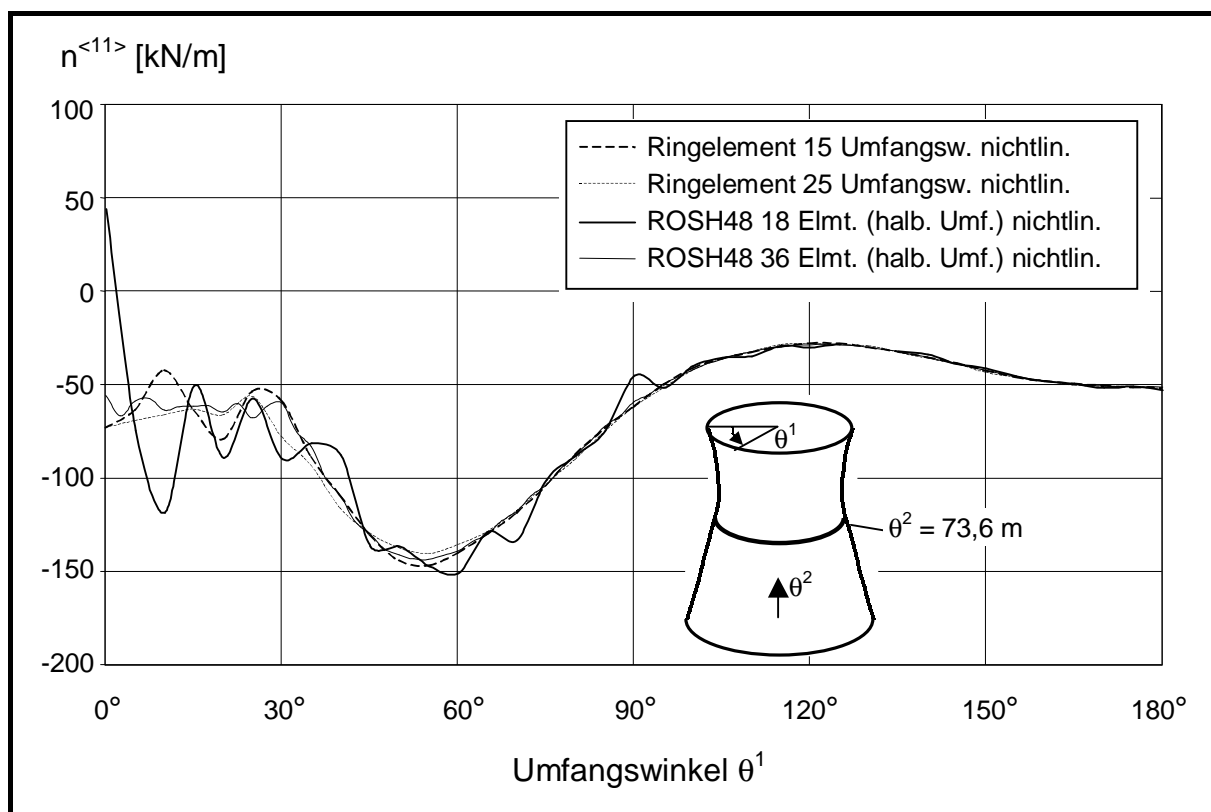


Die Ringkräfte, die mit den Schalenviereckelementen ROSH48 in deren Elementmitten berechnet worden sind (Markierung mit Quadraten), zeigen relativ gute Übereinstimmung mit der Ringelementlösung. Die Lösungen an den Elementrändern (Markierung mit Dreiecken) weichen jedoch nicht unerheblich ab, so dass sich der abgebildete, um die Ringelementlösung oszillierende Verlauf ergibt. Besonders in der Symmetrieachse  $\theta^1 = 0^\circ$ , in der aufgrund der Symmetriebedingung der Verlauf für  $n^{<sup>11</sup>}$  eigentlich eine horizontale Tangente haben müsste, wird dieser Effekt besonders deutlich. Verglichen mit der linearen Lösung an diesem Punkt von  $n^{<sup>11</sup>}(0^\circ) = -37,8$  kN/m fällt die nichtlineare Lösung mit Ringelementen auf  $n^{<sup>11</sup>}(0^\circ) = -73,2$  kN/m ab, wohingegen die nichtlineare Lösung mit den Schalenviereckelementen auf  $n^{<sup>11</sup>}(0^\circ) = +44,1$  kN/m ansteigt. Durch einfaches Anschreiben des Membrangleichgewichts unter Vernachlässigung der Querkräfte, was in [81] vorgeführt worden ist, kann gezeigt werden, dass die nichtlineare Ringelementlösung im Meridian  $\theta^1 = 0^\circ$  sehr gute Ergebnisse liefert. Jedoch muss ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass die dargestellten Spannungen in den Elementmitten der 2D Diskretisierung mit 18 Schalenviereckelementen ROSH48 über den halben Umfang offensichtlich gute Übereinstimmung zeigen, Abweichungen sind lediglich an den Elementrändern festzustellen.

Zum Vergleich hierzu ist weiterhin eine Diskretisierung mit den höherwertigen ROSH54 Dreieckelementen (36 Dreieckelemente für den halben Umfang) untersucht worden,

deren Ergebnis ebenso im Bild 5.17 eingetragen ist. Diese Elemente besitzen quintische Polynomansätze nach COWPER [41] für die unbekannt Komponenten der Feldverschiebungen im Gegensatz zu den ROSH48 Viereckelementen (bikubische Polynomansätze). Es fällt auf, dass mit dem höherwertigen Verschiebungsansatz auch die Schnittgrößen auf den Elementrändern besser werden; die Ringelementlösung sowie die Lösung mit den ROSH54 Dreieckelementen zeigen eine deutlich bessere Übereinstimmung.

Keineswegs soll im Rahmen dieses Anwendungsbeispiels der Eindruck erweckt werden, dass die verwendeten Schalenviereckelemente ROSH48 schlechte oder ungenaue Ergebnisse liefern, zumal es sich bei den dargestellten Ringkräften  $n^{<11>}$  um nicht bemessungsrelevante Größen handelt. Es zeigt sich in diesem Beispiel jedoch sehr schön das Wesen einer Weggrößenformulierung: Mit dem gewählten Verformungsansatz (18 ROSH48 Elemente über den halben Umfang bzw. 15 Umfangswellen für die Ringelemente) kann der Verlauf der Verformungen in Umfangsrichtung (insbesondere an den Steifigkeitsübergangsstellen) nur unzureichend approximiert werden; die dargestellten Ringkräfte berechnen sich nur als sekundäre Größen unter Anwendung der Kinematik und des Werkstoffgesetzes. Gleichgewicht ist nicht an jedem Punkt exakt erfüllt, sondern lediglich in schwacher Form (integrale Betrachtung). Wird eine



**Bild 5.18** Konvergenzuntersuchung für die Ringkräfte ( $\theta^2 = 73,6 \text{ m}$ )

Erhöhung des Ansatzes in Umfangsrichtung vorgenommen, so lassen sich nochmals deutliche Verbesserungen im Ringkraftverlauf beobachten. Im Bild 5.18 sind wiederum die Ringkraftverläufe für die nichtlineare Ringelementlösung (15 Umfangswellen) und die nichtlineare Lösung mit Schalenviereckelementen (18 Elemente über den halben Umfang) dargestellt. Zusätzlich sind Lösungen mit einem höherwertigen Ansatz in Umfangsrichtung darin aufgenommen (Ringelementlösung mit 25 Umfangswellen sowie Schalenviereckelementlösung mit 36 Elementen über den halben Umfang). Deutlich erkennt man, dass sich nach einer Erhöhung der Ansätze die Lösungen mit den beiden unterschiedlichen Modellen nun nahezu decken; lediglich nahe der Symmetrieachse ( $0^\circ - 10^\circ$ ) treten noch geringfügige Differenzen auf. Eine Konvergenz der Lösung zeichnet sich jedoch ab. Die im Bild 5.17 gezeigten Diskrepanzen sind somit die Folge eines Diskretisierungsfehlers, da ein zu grobes Elementnetz von 18 Elementen über den halben Umfang bzw. eine zu klein gewählte Anzahl von 15 Umfangswellen den nichtlinearen Verformungsverlauf und damit auch die daraus abgeleiteten Ringkräfte nicht ausreichend abbilden können. Die Ursachen sind in dem schroffen Steifigkeitswechsel zwischen den gerissenen und ungerissenen Bereichen bei ca.  $30^\circ$  zu suchen. Für die Berechnung der linearen Antwort hingegen reichen die ursprünglichen Diskretisierungen aus; es liegt eine konstante Steifigkeit in Ringrichtung vor und der sich einstellende Verformungsverlauf kann mit dem gewählten Ansatz ausreichend genau approximiert werden. Eine deutliche Verbesserung der berechneten Ringkräfte (die in der vorliegenden Größenordnung dieses Anwendungsbeispiels jedoch für Bemessungsaufgaben nicht von Interesse sind) kann demnach mit einer feineren Diskretisierung beziehungsweise einer Erhöhung des Ansatzes in Umfangsrichtung erzielt werden. Eine weitere Möglichkeit, die einen Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten darstellen könnte, bestünde in der Verwendung von gemischten Elementformulierungen basierend auf erweiterten Variationsprinzipien, wie sie von AYOUB und FILIPPOU [4] bereits für Stabelemente erfolgreich eingesetzt worden sind.

Der Vorteil der Ringelemente gegenüber den herkömmlichen ROSH48 Schalenelementen kann demzufolge in der Approximation der Verformungen in Umfangsrichtung gesehen werden. Deren Darstellung geschieht über eine Fourierreihe, die beliebig oft über die gesamte Umfangsrichtung stetig differenziert werden kann, ohne dabei einen Verlust in der Approximationsgüte hinzunehmen. Für die Auswertung der Verzerrungen, die letztendlich zu den Spannungen führen, ist es bei Ringelementen daher belanglos, an welchem Umfangsstützpunkt eine Auswertung erfolgt. Es hat sich ebenso gezeigt, dass beim Ringelementmodell im Vergleich zur 2D Diskretisierung mit ROSH48 Elementen ein geringerer Ansatz in Umfangsrichtung erforderlich ist. Die Zahl der Elemente über den halben Umfang kann aufgrund des Fourierreihenentwicklungssatzes direkt mit der Umfangswellenzahl des Ansatzes verglichen werden.

### 5.6.3 Anmerkungen zur Konvergenz bei statischen Berechnungen

Bei den Anwendungsbeispielen dieses Kapitels handelt es sich um Testbeispiele für nichtlineare statische Berechnungen. Diese sollen in erster Linie dazu dienen, die Richtigkeit der Vorgehensweise sowie die Herleitung und numerische Umsetzung des Schalenringelements durch Vergleichsrechnungen mit doppelt gekrümmten Schalenviereckelementen zu überprüfen und zu verifizieren. Wie bereits ausgeführt, ist dabei eine gute Übereinstimmung der Lösungen gefunden worden, wobei die 2D-Diskretisierungen mit Schalenviereckelementen unter Umständen in Umfangsrichtung zu grob gewählt worden sind und eine Netzverfeinerung zum Erreichen der gleichen Ergebnislösung erforderlich wird. Hier ist ein Vorteil der Ringelemente zu sehen, der in der Steuerung der Wertigkeit des Ansatzes in Umfangsrichtung über einen geschlossenen Fourierreihenansatz besteht.

Allerdings soll eine wesentliche Problematik bzw. ein Nachteil der Anwendung der Ringelemente in der vorliegenden programmtechnischen Umsetzung, der bereits bei der Herleitung angesprochen wurde, nochmals deutlich herausgestellt werden:

Wie im Abschnitt 5.4.1 gezeigt wurde, ist die lineare Elementsteifigkeitsmatrix und somit auch die globale lineare Systemsteifigkeitsmatrix lediglich auf den Hauptdiagonalmatrizen besetzt. Sämtliche Terme  ${}^{nm}\underline{K}_e$  werden zu Null für unterschiedliche Umfangswellen  $n \neq m$ . Dies wiederum bedeutet, dass bei einer linearen Berechnung Verschiebungsinkremente  ${}^m\underset{+}{\underline{v}}$  in der Umfangswelle  $m$  lediglich innere Knotenkraftinkremente  ${}^n\underset{+}{\underline{p}}_i$  in der gleichen Umfangswelle  $n = m$  verursachen. Bei einer allgemeinen nicht rotationssymmetrischen Belastung in Umfangsrichtung, die als Fourierreihe zerlegt vorliegt, wird somit bei einer linearen Berechnung das Problem für jedes Fourierglied unabhängig gelöst und im Anschluss daran zur Gesamtlösung zusammengesetzt.

Bei einer nichtlinearen Berechnung liegt keine Entkopplung in den Fouriergliedern vor. Darauf ist bereits bei der Herleitung der tangentialen Elementsteifigkeitsmatrix im Abschnitt 5.4.5 hingewiesen worden. Die Kopplungen werden sowohl durch physikalische als auch durch geometrische Nichtlinearitäten verursacht. Dies bedeutet, dass nun Verschiebungsinkremente  ${}^m\underset{+}{\underline{v}}$  in der Umfangswelle  $m$  auch innere Knotenkraftinkremente  ${}^n\underset{+}{\underline{p}}_i$  in anderen Umfangswellen  $n \neq m$  zur Folge haben. Das System ist nun nicht mehr entkoppelt. Insbesondere am Beispiel der Kreiszyinderschale aus Abschnitt 5.6.1 ist dieser Sachverhalt sehr deutlich geworden: Der Vektor der äußeren Belastung  ${}^n\underset{+}{\underline{p}}_a$  besitzt nur Anteile in Umfangswelle  $n = 1$ . Dieser steht im Gleichgewicht mit dem Vektor der inneren Knotenkräfte  ${}^n\underset{+}{\underline{p}}_i$ , der natürlich ebenso nur Anteile in Umfangswelle  $n = 1$  besitzt. Zu diesem Gleichgewichtszustand gehört aber ein Verformungsvektor, der nun Verformungsanteile in höheren Umfangswellen  $n > 1$  besitzt.

<u>Beispiel Kreiszyinderschale (Konvergenzschranke <math>10^{-3}</math>)</u>		
Schritt 1:	3 Iterationen	0,25 p
Schritt 2:	3 Iterationen	0,50 p
Schritt 3:	29 Iterationen	0,75 p
Schritt 4:	70 Iterationen	1,00 p
<u>Beispiel Kühlturmschale (Konvergenzschranke <math>10^{-4}</math>)</u>		
Schritt 0:	2 Iterationen	1,15g + 0,00 w
Schritt 1:	2 Iterationen	1,15g + 0,25 w
Schritt 2:	2 Iterationen	1,15g + 0,50 w
Schritt 3:	2 Iterationen	1,15g + 0,75 w
Schritt 4:	2 Iterationen	1,15g + 1,00 w
Schritt 5:	2 Iterationen	1,15g + 1,25 w
Schritt 6:	6 Iterationen	1,15g + 1,50 w
Schritt 7:	37 Iterationen	1,15g + 1,75 w

**Tabelle 5.1 Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte zur Konvergenz**

Im Rahmen der numerischen Umsetzung des Ringelements im Programmsystem ROS-HE wird bei der nichtlinearen Lösungsfindung die Kopplung der Umfangswellen in der tangentialen Steifigkeitsmatrix nicht berücksichtigt. Für das gezeigte Anwendungsbeispiel der Kreiszyinderschale bedeutet dies, dass zunächst nach dem Aufreißen innere Knotenkräfte in höheren Umfangswellen infolge der zugehörigen Verschiebungsincremente entstehen. Der Iterationsprozess der Gleichgewichtsfindung läuft nun solange, bis sämtliche inneren Knotenkräfte in Umfangswellen  $n \neq 1$  zu Null geworden sind. In Tabelle 5.1 ist die Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte pro Inkrement, die zum Erreichen der gewünschten Genauigkeitsschranke benötigt werden, für die beiden gezeigten Anwendungsbeispiele dieses Kapitels angegeben. Es wird deutlich, dass mit dem Eintreten des Reißens viele Iterationen notwendig werden, um die ungewünschten Ungleichgewichtskräfte herauszuitrieren und einen Gleichgewichtszustand aufzufinden. Eine quadratische Konvergenz [131] der Verschiebungszuwächse  $\underline{V}^k$  eines Lastinkrements bzw. eines Zeitschritts gemäß Gleichung (5.92), wie sie bei Verwendung einer konsistenten Linearisierung (keine Vernachlässigung der Nebendiagonalmatrizen) vorliegt, stellt sich nach dem Auftreten signifikanter Nichtlinearitäten bei dem verwendeten Rechenverfahren nicht ein.

$$\left\| \left( \underline{V}^{k+1} - \sum_{it=0}^{n_{it}} \underline{V}^{it} \right) \right\| \leq \text{const} \cdot \left\| \left( \underline{V}^k - \sum_{it=0}^{n_{it}} \underline{V}^{it} \right) \right\|^2 \quad (5.92)$$

Bei Systemen mit sehr vielen Freiheitsgraden oder bei Verwendung von sehr vielen

Reihengliedern zur Lösungsdarstellung kann die gewählte Vorgehensweise der Vernachlässigung der Nebendiagonalterme in der tangentialen Steifigkeitsmatrix zu Konvergenzproblemen bei statischen Berechnungen führen. In besonders ungünstigen Fällen wird eine Lösungsfindung unmöglich: Eine Verbesserung der Ungleichgewichtskräfte einiger Systemfreiheitsgrade führt dabei zu einer Verschlechterung der Ungleichgewichtskräfte anderer Systemfreiheitsgrade. Besonders deutlich wird dies bei einem System, bei dem die Last nur aus einem einzigen Fourierterm besteht (Anwendungsbeispiel Kreiszyinderschale). Werden zu viele Fourierglieder für die Lösungsdarstellung angesetzt, kann der Fall eintreten, dass keine Lösung mehr aufgefunden werden kann, da die Inkremente in einem einzelnen Iterationsschritt durch Verwendung einer entkoppelten tangentialen Steifigkeitsmatrix nicht „optimal“ wie bei der Verwendung einer konsistenten Linearisierung berechnet werden und sich die Ungleichgewichtskräfte der einzelnen Systemfreiheitsgrade gegenseitig ungünstig beeinflussen. Eine Abhilfe gegen dieses Problem bei nichtlinearen statischen Aufgabenstellungen besteht nur in der programmtechnischen Modifikation der Ringelementimplementati-on und der Bereitstellung der Nebendiagonalterme der tangentialen Steifigkeitsmatrix, was allerdings nur mit einem erheblichen Aufwand und einer völligen Umstrukturierung des Programmsystems ROSHE zu erreichen ist.

Bei dynamischen Problemstellungen treten die angesprochenen Konvergenzprobleme durch Vernachlässigung der Nebendiagonalmatrizen in der tangentialen Steifigkeitsmatrix nicht mehr auf, da die Zusammensetzung der effektiven Steifigkeitsmatrix durch die Zeitschrittweite gesteuert wird. Zusätzlich zur tangentialen Steifigkeitsmatrix gehen hier noch Dämpfungs- und Massenanteile ein, die nur auf den Hauptdiagonalmatrizen besetzt und somit entkoppelt sind. Je kleiner die Zeitschrittweite bei impliziten Verfahren gewählt wird, desto kleiner wird der Fehler der in einem Iterationsschritt berechneten Inkremente; explizite Zeitintegrationsverfahren hingegen benötigen überhaupt keine Steifigkeitsmatrix zur Berechnung der Bewegungsgrößen des nächsten Zeitschritts. Diese Sachverhalte bei dynamischen Berechnungen werden ausführlich im Abschnitt 6.3.4 behandelt. Bei den in den Kapiteln 6 und 7 durchgeführten dynamischen Untersuchungen ist durchweg eine schnelle Konvergenz festzustellen.

## 5.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel sind die Elementmatrizen für ein doppelt gekrümmtes Schalenringelement, aufbauend auf den Darstellungen nach ECKSTEIN et al. [42], hergeleitet worden. Die Besonderheit der Ringelemente liegt in der Darstellung der unbekanntenen Feldverschiebungen in Ringrichtung mit Hilfe von Fourierreihen. Im Gegensatz zum li-



nearen Fall sind die Steifigkeitsbeziehungen nun im Allgemeinen nicht mehr in den Umfangswellen entkoppelt. Der Prozess der Gleichgewichtsfindung muss allerdings nicht mit der exakten Linearisierung erfolgen, wie bei der Vorstellung der iterativen Lösungsverfahren für nichtlineare algebraische Gleichungssysteme gezeigt worden ist, so dass die Nebendiagonalmatrizen in der tangentialen Steifigkeitsmatrix bei der Gleichgewichtsiteration vernachlässigt werden können. Für zwei Anwendungsbeispiele nichtlinearer statischer Berechnungen von Rotationsschalen sind die Ringelementlösungen und damit die Richtigkeit der vorgestellten Vorgehensweise und numerischen Umsetzung anhand von 2D Diskretisierungen verifiziert worden. Dabei sind gewisse Vorteile der Ringelemente gegenüber herkömmlichen Schalenelementen deutlich geworden.

- Der Diskretisierungsaufwand beschränkt sich auf die Unterteilung der Meridianrichtung in einzelne Ringelemente.
- Oftmals ist der Ansatz einer geringen Anzahl von Fouriergliedern zur Beschreibung des Verformungszustandes in Ringrichtung bereits ausreichend, was den numerischen Aufwand gegenüber einer 2D Diskretisierung reduziert (Beispiel Kreiszyinderschale). Praktische Anwendungen hierfür wären Erdbebenberechnungen; in diesem Fall besitzt die Belastung nur Anteile in der Umfangswelle  $n = 0$  und  $n = 1$ .
- Eine Netzverfeinerung in Umfangsrichtung bei einem 2D Modell entspricht einer Erhöhung der Anzahl der Fourierterme, so dass die gewählte Approximationsgüte ohne Neudiskretisierung überprüft werden kann.
- Die Verformungen sind durch die Wahl harmonischer Reihenansätze in Ringrichtung unendlich oft stetig differenzierbar. Dies hat Vorteile bei der Verzerrungs- und damit auch Schnittgrößenberechnung in Ringrichtung, wobei es keine Rolle spielt, an welcher Umfangsstelle Verzerrungen ausgewertet werden.
- Bei dynamischen Berechnungen kann ebenfalls von dem vorgeschlagenen Verfahren unter Vernachlässigung der Nebendiagonalmatrizen in der tangentialen Steifigkeitsmatrix Gebrauch gemacht werden. Diese Vernachlässigung wirkt sich auf die Gleichgewichtsiteration weniger gravierend aus, da sich die effektive Steifigkeitsmatrix anteilmäßig aus  $\underline{K}_t$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{M}$  zusammensetzt, wobei  $\underline{M}$  und näherungsweise auch  $\underline{C}$  als entkoppelt angesehen werden können und der Anteil von  $\underline{K}_t$  mit kleinen Zeitschritten abnimmt, was im Kapitel 6 noch gezeigt werden wird.

Der wesentliche Nachteil oder die Grenze der Anwendung von Ringelementen liegt allerdings in der Beschränkung auf rotationssymmetrische Strukturen. Beispielsweise müssen zur Modellierung von Öffnungen in Rotationsschalen vollständige 2D Diskretisierungen des Systems erstellt werden; alternativ kann eine Kopplung von Ringele-

menten in den rotationssymmetrischen Bereichen mit herkömmlichen Schalenelementen in den gestörten Geometriebereichen, wie sie von GOULD [53] vorgeschlagen wird, vorgenommen werden.

Bisher sind in diesem Kapitel lediglich alle erforderlichen Elementmatrizen für dynamische Berechnungen mit Ringelementen durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen und Einführen der Ansatzfunktionen für ein finites Ringelement hergeleitet worden. Im Kapitel 6 werden nun Lösungsverfahren für lineare und nichtlineare dynamische Problemstellungen mit den Anpassungen an die Erfordernisse von Ringelementen vorgestellt. Darunter fallen direkte Zeitintegrationsverfahren, aber auch modale Lösungsverfahren als neuartiger Aspekt.

## Kapitel 6

# Lösungsverfahren für die Bewegungsgleichungen

### 6.1 Vorbemerkungen

Die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit (4.47) in inkrementeller Form unter Berücksichtigung von Trägheits- und Dämpfungskräften führt direkt auf das Bewegungsdifferentialgleichungssystem (5.27). In diesem Kapitel wird die Funktionsweise von klassischen Zeitintegrationsverfahren am Beispiel des NEWMARK Verfahrens vorgeführt und an die Belange des erläuterten Ringelementkonzepts angepasst, so dass eine Lösung des Bewegungsdifferentialgleichungssystems im Zeitbereich erfolgen kann.

Als weiterer neuartiger Aspekt der vorliegenden Arbeit wird im Anschluss an die Vorstellung der direkten Zeitintegration die Formulierung modaler Verfahren zur Lösung der linearisierten Bewegungsgleichungen von Rotationsschalen aufgezeigt. Die modale Analyse stellt ein klassisches Standardverfahren zum Lösen linearer dynamischer Problemstellungen dar; jedoch auch zur Lösung von physikalisch nichtlinearen dynamischen Fragestellungen kann sie herangezogen werden, wie in vereinzelt Ansätzen in der neueren Literatur zu finden ist [17], [70]. Gerade zur nichtlinearen dynamischen Berechnung von Rotationsschalen mit Ringelementen bietet sich dieses Verfahren vorteilhaft an: Das lineare Eigenschwingproblem, aus dem die Eigenvektoren gewonnen werden, ist bei Rotationsschalen in den Umfangswellen entkoppelt, d.h. es können unabhängig voneinander Eigenformen für die einzelnen Umfangsharmonischen berechnet werden. Für die Gesamtlösung im Zeitbereich wird nun im Rahmen der modalen Analyse der Ansatz gemacht, dass sich nämlich die Verformungen, Geschwindigkeiten

und Beschleunigungen aus einer vorschreibbaren Anzahl von Eigenvektoren aus den gewünschten Umfangswellen darstellen lassen. Dieses Lösungsverfahren der modalen Superposition zur Behandlung nichtlinearer dynamischer Problemstellungen mittels inkrementell iterativer Vorgehensweise wird ebenfalls ausführlich in diesem Kapitel behandelt.

## 6.2 Überblick über direkte Zeitintegrationsverfahren

Bei den Bewegungsgleichungen handelt es sich um ein im Allgemeinen nichtlineares Differentialgleichungssystem 2. Ordnung. Es müssen hierbei vorgeschriebene Anfangswerte zum Startpunkt der Bewegung berücksichtigt werden (Anfangswertproblem). Die Lösung der Bewegungsgleichungen erfolgt schrittweise, das dynamische Gleichgewicht wird in diskreten Zeitpunkten erfüllt. Die Bezeichnung „direkte Zeitintegration“ bedeutet, dass keine Transformation der Bewegungsgleichung auf eine andere Form vor der numerischen Integration vorgenommen wird [6]. Zeitableitungen werden im aktuellen Integrationsintervall durch Differenzenquotienten ersetzt, so dass eine Algebraisierung des Bewegungsdifferentialgleichungssystems erfolgt. Eine prinzipielle Einteilung der direkten Zeitintegrationsverfahren ist in explizite und implizite Verfahren möglich. Dabei wird weiterhin noch zwischen Einschritt- und Mehrschrittverfahren unterschieden. Einschrittverfahren verwenden nur Zustandsgrößen in den Zeitpunkten  $t$  und  $t+\Delta t$ , wohingegen Mehrschrittverfahren auch noch auf Größen vor dem Zeitpunkt  $t$  zurückgreifen. Aus diesem Grund ist nur bei Einschrittverfahren eine Änderung der Schrittweite während der Berechnung ohne Probleme möglich.

Explizite Integrationsverfahren gewinnen die Lösung für den Zeitschritt  $t+\Delta t$  durch Anschreiben des dynamischen Gleichgewichts im aktuellen Zeitpunkt  $t$ . Ihr Nachteil liegt allerdings in der bedingten numerischen Lösungsstabilität. Um sicher zu stellen, dass die Lösung während der Integration nicht numerisch instabil wird, sind sehr enge Restriktionen an die Wahl der Integrationszeitschrittweite geknüpft. Diese orientiert sich an der kleinsten Periode des Systems und kann zu sehr kurzen Zeitschritten führen. Der Einsatz von expliziten Integrationsverfahren ist vorrangig bei sehr kurzzeitigen Vorgängen (wie z.B. Stoß- und Anprallvorgängen) zu sehen, bei denen höhere Frequenzen eine bedeutende Rolle in der Antwort spielen. Einer der bekanntesten Vertreter ist das Central-Difference-Verfahren [67] (explizites Zweischrittverfahren).

Im Gegensatz dazu formulieren implizite Integrationsverfahren die dynamischen Gleichgewichtsbedingungen zum Zeitschritt  $t+\Delta t$ . Durch geeignete Wahl der Integrationsparameter kann eine unbedingte Stabilität des Zeitintegrationsalgorithmus (d.h. stabile Lösung unabhängig von der Wahl der Integrationszeitschrittweite) erreicht werden, al-

lerdings nur unter Voraussetzung linearer Verhältnisse. Besonders bei der Berechnung von Systemen mit überwiegend niederfrequenten Antworten lassen sich diese Verfahren vorteilhaft einsetzen. Als klassische Vertreter der impliziten Integrationsalgorithmen sind die Verfahren nach HOUBOLT [65], WILSON [125] und NEWMARK [92] zu nennen. Die folgenden Anforderungen sind dabei generell an die Integrationsverfahren zu stellen [63]:

- Für lineare Berechnungen sollte eine unbedingte Stabilität gewährleistet sein.
- Die numerische Dissipation zur Dämpfung höherer Eigenformen in der Gesamtlösung sollte durch einen anderen Parameter als den Zeitschritt gesteuert werden. Das Verfahren sollte im Sonderfall auch dissipationsfrei arbeiten können.
- Die niedrigen Eigenformen dürfen durch die numerische Dissipation nicht zu stark gedämpft werden.

Unter den genannten impliziten Integrationsalgorithmen ist das Verfahren nach NEWMARK hinsichtlich der geforderten Eigenschaften am leistungsstärksten anzusehen. Von seiner ursprünglichen Version [92] ist es bis in die heutige Zeit weiterentwickelt worden (z.B. HHT-Verfahren [62], [63] oder generalisiertes  $\alpha$ -Verfahren [25]). Stellvertretend wird im Folgenden die inkrementell iterative Formulierung des NEWMARK Verfahrens in Anlehnung an BEEM [10] erläutert und für die Besonderheiten von Ringelementen modifiziert.

## 6.3 Direkte Zeitintegration nach NEWMARK

### 6.3.1 Allgemeine Ansätze

Das Verfahren nach NEWMARK macht einen konstanten Ansatz für die Beschleunigungen in einem Integrationsintervall (6.1), wobei die Beiträge der Zeitpunkte  $t$  und  $t+\Delta t$  über den Parameter  $\delta$  gesteuert werden. Daraus ergeben sich durch Integration die Geschwindigkeiten (6.2) und weiterhin die Verschiebungen (6.3). Mit den Integrationsparametern  $\delta$  und  $\gamma$  wird die numerische Dissipation höherer Schwingungsanteile gesteuert; für  $\gamma = \frac{\delta}{2}$  wird Gleichung (6.2) unter Beachtung der getroffenen Annahme eines im Intervall konstanten Beschleunigungsverlaufs exakt integriert.

$$\ddot{\underline{V}}(\tau) = [1 - \delta] \cdot \ddot{\underline{V}}_t + \delta \cdot \ddot{\underline{V}}_{t+\Delta t} \quad \text{für } t \leq \tau \leq t + \Delta t \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{V}}_{t+\Delta t} &= [[1 - \delta] \cdot \ddot{\underline{V}}_t + \delta \cdot \ddot{\underline{V}}_{t+\Delta t}] \cdot \Delta t + \dot{\underline{V}}_t \\ &= a_6 \cdot \ddot{\underline{V}}_t + a_7 \cdot \ddot{\underline{V}}_{t+\Delta t} + \dot{\underline{V}}_t \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\underline{V}_{t+\Delta t} = \left[ \left[ \frac{1}{2} - \gamma \right] \cdot \ddot{\underline{V}}_t + \gamma \cdot \ddot{\underline{V}}_{t+\Delta t} \right] \cdot \Delta t^2 + \dot{\underline{V}}_t \cdot \Delta t + \underline{V}_t \quad (6.3)$$

Durch Umstellen von Gleichung (6.3) ergeben sich die unbekanntenen Beschleunigungen  $\ddot{\underline{V}}_{t+\Delta t}$  am Ende des Integrationsintervalls (6.4) in Abhängigkeit der Verschiebung  $\underline{V}_{t+\Delta t}$ , wobei alle anderen Größen zum Zeitpunkt  $t$  bekannt sind. Die Beschleunigungen werden in (6.2) eingesetzt, so dass auch die unbekanntenen Geschwindigkeiten  $\dot{\underline{V}}_{t+\Delta t}$  alleine noch von den unbekanntenen Verschiebungen  $\underline{V}_{t+\Delta t}$  abhängig sind (6.5). Weiterhin erfolgt ein Übergang auf die inkrementellen Zuwächse der Beschleunigungen (6.6) und Geschwindigkeiten (6.7), wobei zur Abkürzung die Konstanten  $a_0$  bis  $a_7$  eingeführt werden. Es sei noch angemerkt, dass sich das NEWMARK Verfahren im linearen Fall durch seine unbedingte Stabilität (kein „Aufschaukeln“ der Lösung gegen Unendlich bei zu großem Integrationszeitschritt) bei geeigneter Wahl der Parameter  $\delta$  und  $\gamma$  auszeichnet, was durch eine Analyse des spektralen Radius der „Vergrößerungsmatrix“ oder „amplification matrix“ (lineare Beziehung zwischen den Zustandsgrößen zum Zeitpunkt  $t$  und  $t+\Delta t$ ) gezeigt werden kann [6]. Dazu ist an die Wahl der Integrationsparameter  $\delta$  und  $\gamma$  die Stabilitätsbedingung (6.8) geknüpft [24], die auf die Kriterien für unbedingte (6.9) und bedingte Stabilität (6.10) führen.

$$\ddot{\underline{V}}_{t+\Delta t} = a_0 \cdot [\underline{V}_{t+\Delta t} - \underline{V}_t] - a_2 \cdot \dot{\underline{V}}_t - a_3 \cdot \ddot{\underline{V}}_t \quad (6.4)$$

$$\dot{\underline{V}}_{t+\Delta t} = a_1 \cdot [\underline{V}_{t+\Delta t} - \underline{V}_t] - a_4 \cdot \dot{\underline{V}}_t - a_5 \cdot \ddot{\underline{V}}_t \quad (6.5)$$

$$\underline{\ddot{V}}^+ = \underline{\ddot{V}}_{t+\Delta t} - \underline{\ddot{V}}_t = a_0 \cdot \underline{V}^+ - a_2 \cdot \underline{\dot{V}}_t - [a_3 + 1] \cdot \underline{\ddot{V}}_t \quad (6.6)$$

$$\underline{\dot{V}}^+ = \underline{\dot{V}}_{t+\Delta t} - \underline{\dot{V}}_t = a_1 \cdot \underline{V}^+ - [a_4 + 1] \cdot \underline{\dot{V}}_t - a_5 \cdot \underline{\ddot{V}}_t \quad (6.7)$$

$$\text{mit: } a_0 = \frac{1}{\gamma \Delta t^2} \quad a_1 = \frac{\delta}{\gamma \Delta t} \quad a_2 = \frac{1}{\gamma \Delta t} \quad a_3 = \frac{1}{2\gamma} - 1$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\gamma} - 1 \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2} \cdot \left[ \frac{\delta}{\gamma} - 2 \right] \quad a_6 = \Delta t \cdot [1 - \delta] \quad a_7 = \delta \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta - 2\gamma}} \quad \text{Stabilitätskriterium} \quad (6.8)$$

$$2\gamma \geq \delta \geq \frac{1}{2} \quad \text{unbedingte Stabilität} \quad (6.9)$$

$$\delta \geq \frac{1}{2}, \quad \gamma < \frac{\delta}{2} \quad \text{bedingte Stabilität} \quad (6.10)$$

Mit diesen Ansätzen und Umformungen ist es gelungen, die Geschwindigkeits- und Beschleunigungszuwächse der inkrementellen Bewegungsgleichung (5.27) durch bekannte Größen sowie durch die Verformungszuwächse auszudrücken. Das Differentialgleichungssystem ist somit algebraisiert; dessen Lösung erfolgt in inkrementell iterativer Vorgehensweise mit dem NEWTON-RAPHSON Verfahren (Abschnitt 5.5.1, Bild 5.6) unter Verwendung von effektiven Steifigkeitsmatrizen und effektiven Lastvektoren. Das RIKS-WEMPNER-WESSELS Verfahren ist ungeeignet, da es eine Lastskalierung enthält. Diese darf nicht vorgenommen werden, denn die Intensität der äußeren Belastung ist durch die Last-Zeit-Funktion für dynamische Problemstellungen fest vorgegeben.

Besonders bei dynamischen Problemstellungen ist die Durchführung einer Gleichgewichtsiteration nach einem Inkrementenschritt von großer Bedeutung, da jeder Fehler, der zu einer bestimmten Zeit in die inkrementelle Lösung eingegangen ist, die Lösung zu den nachfolgenden Zeiten in pfadabhängiger Weise beeinträchtigen kann [6], [7]. Die Behandlung von Inkrement- und Iterationsschritten wird nun in den nächsten beiden Abschnitten erläutert.

### 6.3.2 Inkrementschritt

Ausgehend von einem bereits aufgefundenen dynamischen Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt  $t$ , der durch das Verschwinden der rechten Seite von Gleichung (5.27) gekennzeichnet ist, ändert sich die äußere Belastung während eines Zeitschritts  $\Delta t$ . Die Bewegungsgleichung für einen Inkrementschritt (Kopfzeiger 0) lautet demnach:

$$\underline{K}_t^0 \cdot \underline{\dot{V}}^0 + \underline{C}^0 \cdot \underline{\dot{V}}^0 + \underline{M} \cdot \underline{\ddot{V}}^0 = \underline{P}_a(t + \Delta t) - \underline{P}_a(t) \quad (6.11)$$

An dieser Stelle werden die Ansätze für die inkrementellen Beschleunigungen (6.6) und die inkrementellen Geschwindigkeiten (6.7) in Gleichung (6.11) eingesetzt. Dabei wird das Bewegungsdifferentialgleichungssystem in die algebraische Form eines statischen Problems überführt, wobei eine effektive Steifigkeitsmatrix und ein effektiver Lastvektor als äquivalente Größen der statischen Systemgleichung definiert werden. Auch wenn sich die äußere Belastung während eines Integrationsintervalls nicht ändert, enthält der effektive Lastvektor dennoch weitere Anteile, die aus der Fortbewegung des Systems in dem aktuellen Integrationsintervall herrühren, da ja zu Beginn des Intervalls die Anfangsbedingungen  $\underline{\dot{V}}_t = \underline{\dot{V}}$  und  $\underline{\ddot{V}}_t = \underline{\ddot{V}}$  zu berücksichtigen sind.

$$\begin{aligned} [\underline{K}_t^0 + a_0 \cdot \underline{M} + a_1 \cdot \underline{C}^0] \cdot \underline{\dot{V}}^0 &= \underline{P}_a(t + \Delta t) - \underline{P}_a(t) \\ &+ \underline{M} \cdot [a_2 \cdot \underline{\dot{V}} + [a_3 + 1] \cdot \underline{\ddot{V}}] \\ &+ \underline{C}^0 \cdot [[a_4 + 1] \cdot \underline{\dot{V}} + a_5 \cdot \underline{\ddot{V}}] \end{aligned}$$

$$\underline{\hat{K}}^0 \cdot \underline{\dot{V}}^0 = \underline{\hat{P}}^0 \quad (6.12)$$

Gleichung (6.12) wird nun mit herkömmlichen Verfahren nach den unbekanntem Verformungszuwächsen aufgelöst; es ergibt sich eine erste Abschätzung der unbekanntem Zustandsgrößen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ .



$$\underline{V}_{t+\Delta t}^0 = \underline{V}_t + \underline{V}^+{}^0 = \underline{V}^- \quad (6.13)$$

$$\underline{\ddot{V}}_{t+\Delta t}^0 = a_0 \cdot \underline{V}^+{}^0 - a_2 \cdot \underline{\dot{V}}_t - a_3 \cdot \underline{\ddot{V}}_t = \underline{\ddot{V}}^- \quad (6.14)$$

$$\underline{\dot{V}}_{t+\Delta t}^0 = \underline{\dot{V}}_t + a_6 \cdot \underline{\ddot{V}}_t + a_7 \cdot \underline{\ddot{V}}_{t+\Delta t}^0 = \underline{\dot{V}}^- \quad (6.15)$$

Im Allgemeinen befindet sich das System nach dem Inkrementenschritt noch nicht im Gleichgewicht, da nur eine Linearisierung zu Beginn des Zeitpunkts  $t$  betrachtet worden ist. Es wird nun eine Gleichgewichtsiteration durchgeführt, bis die verbleibenden Ungleichgewichtskräfte verschwinden.

### 6.3.3 Iterationsschritt

Mit den Zustandsgrößen  $\underline{V}_{t+\Delta t}^{k-1}$ ,  $\underline{\dot{V}}_{t+\Delta t}^{k-1}$  und  $\underline{\ddot{V}}_{t+\Delta t}^{k-1}$  aus dem vorangehenden Iterationsschritt wird die inkrementelle Bewegungsgleichung für einen neuen Iterationsschritt (Kopfzeiger  $k$ ) aufgebaut (6.16), wobei auf deren rechten Seite die Ungleichgewichtskräfte zu finden sind. Die Ansätze (6.6) und (6.7) vereinfachen sich zu (6.17) und (6.18), da die Anfangsbeschleunigungen und Anfangsgeschwindigkeiten bereits im Inkrementenschritt berücksichtigt worden sind.

$$\underline{K}_t^k \cdot \underline{V}^+{}^k + \underline{C}^k \cdot \underline{\dot{V}}^+{}^k + \underline{M} \cdot \underline{\ddot{V}}^+{}^k = \underline{P}_a(t + \Delta t) - \underline{P}_i^k - \underline{P}_{ca}^k - \underline{P}_m^k \quad (6.16)$$

$$\underline{\ddot{V}}^+{}^k = \underline{\ddot{V}}^k - \underline{\ddot{V}}^{k-1} = a_0 \cdot \underline{V}^+{}^k \quad (6.17)$$

$$\underline{\dot{V}}^+{}^k = \underline{\dot{V}}^k - \underline{\dot{V}}^{k-1} = a_1 \cdot \underline{V}^+{}^k \quad (6.18)$$

Wiederum wird Gleichung (6.16) durch Einsetzen von (6.17) und (6.18) algebraisiert, so dass gemäß (6.19) eine effektive Steifigkeitsmatrix und ein effektiver Lastvektor für den Iterationsschritt  $k$  definiert werden. Gleichung (6.19) wird nun aufgelöst, woraus die

unbekannten Zustandsgrößen (6.20) – (6.22) im aktuellen Iterationsschritt  $k$  berechnet werden.

$$\begin{aligned} [\underline{K}_t^k + a_0 \cdot \underline{M} + a_1 \cdot \underline{C}^k] \cdot \underline{\dot{V}}^k &= \underline{P}_a(t + \Delta t) - \underline{P}_i^k - \underline{P}_{ca}^k - \underline{P}_m^k \\ \hat{\underline{K}}^k \cdot \underline{\dot{V}}^k &= \underline{\dot{P}}^k \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\underline{V}_{t+\Delta t}^k = \underline{V}_{t+\Delta t}^{k-1} + \underline{\dot{V}}^k = \underline{\dot{V}} \quad (6.20)$$

$$\underline{\ddot{V}}_{t+\Delta t}^k = \underline{\ddot{V}}_{t+\Delta t}^{k-1} + a_0 \cdot \underline{\dot{V}}^k = \underline{\ddot{V}} \quad (6.21)$$

$$\underline{\dot{V}}_{t+\Delta t}^k = \underline{\dot{V}}_{t+\Delta t}^{k-1} + a_1 \cdot \underline{\dot{V}}^k = \underline{\dot{V}} \quad (6.22)$$

Mit diesen verbesserten Zustandsgrößen des Iterationsschrittes  $k$  wird nun erneut der Vektor der Ungleichgewichtskräfte aufgebaut. Verschwindet dessen Norm, so liegt ein Gleichgewichtszustand vor; andernfalls werden nach dem beschriebenen Verfahren in einem folgenden Iterationsschritt nochmals Zuwächse der Zustandsgrößen berechnet.

#### 6.3.4 Besonderheiten bei Ringelementen

Eine Besonderheit von Ringelementen liegt darin, dass bei nichtlinearen Verhältnissen die Entkopplung der Steifigkeitsbeziehung in den Fourietermen verloren geht, wie bei der Herleitung der Elementmatrizen im Kapitel 5 gezeigt worden ist. Bei statischen Problemstellungen wirkt sich die Vernachlässigung dieser Nebendiagonalmatrizen in der Steifigkeitsmatrix im Rahmen des gewählten modifizierten Iterationsverfahren deutlich auf die Anzahl der benötigten Gleichgewichtssiterationen aus. Bei dynamischen Fragestellungen allerdings verliert das beschriebene Problem an Bedeutung, wie im Folgenden erläutert wird:

Durch die Algebraisierung des inkrementellen Bewegungsdifferentialgleichungssystems mittels Zeitintegrationsverfahren ergeben sich effektive Steifigkeitsmatrizen, die gemäß Gleichungen (6.12) und (6.19) aus einer Linearkombination von tangentialer Steifigkeitsmatrix, Dämpfungsmatrix und Massenmatrix bestehen. Im Gegensatz zur tangentialen Steifigkeitsmatrix ist die Massenmatrix von den aktuellen Zustandsgrößen nicht

$\underline{\underline{K}}_t$                        $\underline{\underline{M}}$                        $\underline{\underline{C}}$

$\hat{\underline{\underline{K}}} = \underline{\underline{K}}_t + a_0 \cdot \underline{\underline{M}} + a_1 \cdot \underline{\underline{C}}$                        $a_0 = \frac{1}{\gamma \Delta t^2}$                        $a_1 = \frac{\delta}{\gamma \Delta t}$

$\underline{\underline{C}}$  a)  $\underline{\underline{C}}_a + \underline{\underline{C}}_i$   
 b)  $\alpha_M \cdot \underline{\underline{M}} + \alpha_K \cdot \underline{\underline{K}}_t$   
 c)  $\alpha_M \cdot \underline{\underline{M}} + \alpha_K \cdot \underline{\underline{K}}_e$

${}^{nm} \hat{\underline{\underline{K}}}$ : Inkrementelle Knotenkräfte in Umfangswelle n infolge inkrementeller Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in Umfangswelle m

**Bild 6.1 Zusammensetzung der effektiven Steifigkeitsmatrix**

abhängig (kleine Verzerrungen vorausgesetzt). Ihre entkoppelte Form (Bandstruktur um die Hauptdiagonale) nach Gleichung (5.49) bleibt somit während der gesamten Berechnung erhalten. Sämtliche Nebendiagonalmatrizen verschwinden; inkrementelle Knotenbeschleunigungen in einer Umfangswelle n haben lediglich inkrementelle Knotenkräfte in der gleichen Umfangswelle zur Folge. Ähnliches gilt für die Dämpfungsmatrix: Diese setzt sich im allgemeinen Fall anteilig aus innerer und äußerer Dämpfung zusammen. Der Anteil aus äußerer Dämpfung (5.74) hat die gleiche Gestalt wie die Massenmatrix, er ist in den Umfangswellen entkoppelt. Der Anteil aus innerer Dämpfung (5.75) verhält sich wie die tangentielle Steifigkeitsmatrix, die Entkopplung in den Umfangswellen geht bei Auftreten von Nichtlinearitäten verloren. In vielen Fällen kann die Dämpfungsmatrix jedoch aufgrund fehlender Eingangsparameter für äußere und innere Dämpfung nicht explizit aufgestellt werden. Abhilfe dafür ist die Verwendung einer RAYLEIGH-Dämpfung, die sich als Linearkombination aus Massenmatrix und Steifigkeitsmatrix zusammensetzt. Bei Stahlbeton erhöht sich die Materialdämpfung

mit dem Aufreißen, da nun durch Reibung in den Rissen Energiedissipation stattfindet. Somit ist es realistischer, als Steifigkeitsmatrix in der RAYLEIGH-Dämpfung die lineare Steifigkeitsmatrix anzusetzen; bei Verwendung der aktuellen tangentialen Steifigkeitsmatrix hingegen würde die Dämpfung beim Aufreißen abnehmen.

Man erkennt nun beim Zusammenbau der einzelnen Matrizen zur effektiven Steifigkeitsmatrix an den Parametern  $a_0$  und  $a_1$  das Gewicht der beteiligten Matrizen. Der Parameter  $a_1$ , der den Beitrag der Dämpfungsmatrix beschreibt, ist umgekehrt proportional zum Zeitschritt  $\Delta t$ . Der Koeffizient der Massenmatrix  $a_0$  hingegen ist sogar umgekehrt proportional zum Quadrat des Zeitschritts. Daraus folgt, dass die Bedeutung der Nebendiagonalmatrizen gegenüber den Hauptdiagonalmatrizen in der effektiven Steifigkeitsmatrix sehr stark abnimmt, da nun zusätzliche Massen- und Dämpfungsanteile lediglich auf die Hauptdiagonale der tangentialen Steifigkeitsmatrix addiert werden, wobei sich die Wichtung dieser Anteile mit kleinen Zeitschritten noch verstärkt. Im Bild 6.1 ist dieser Sachverhalt nochmals aufgezeigt. Der Beitrag der in den Umfangsharmonischen entkoppelten Massenmatrix zur effektiven Steifigkeitsmatrix wird also bei kleinen Zeitschritten dominieren, so dass das eingangs beschriebene Problem der Gleichgewichtsauffindung durch Vernachlässigung der Nebendiagonalanteile bei dynamischen Berechnungen nicht auftritt.

## 6.4 Modale Analyse

Eine andere Möglichkeit im Gegensatz zu direkten Zeitintegrationsverfahren, das Bewegungsdifferentialgleichungssystem zu lösen, besteht in der Verwendung der modalen Analyse. Deren Grundidee ist es, die Verformungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines Systems aus einer Linearkombination der Eigenformen der freien ungedämpften Schwingung darzustellen. Durch diese Transformation der Systemfreiheitsgrade auf generalisierte Koordinaten wird eine Entkopplung der Bewegungsgleichung in äquivalente Einmassenschwinger erreicht, wobei deren Anzahl gleich der Zahl der Systemfreiheitsgrade ist. Im Allgemeinen tragen jedoch die höheren Eigenformen nur noch unwesentlich zur Gesamtlösung bei, so dass nach einer begrenzten Anzahl von Eigenformen der Lösungsansatz abgebrochen werden kann. Die modale Analyse ist ein klassisches Verfahren zur linearen dynamischen Berechnung von Tragwerken, da sie das lineare Bewegungsdifferentialgleichungssystem durch eine Überführung in modale Bewegungskordinaten entkoppelt, die äquivalenten Einmassenschwingergleichungen unabhängig voneinander löst und danach unter Verwendung des Superpositionsprinzips die Gesamtlösung aus den Eigenformen, die über die generalisierten Bewegungskordinaten skaliert werden, wieder zusammensetzt.

Weiterhin bildet sie die Grundlage des Antwortspektrenverfahrens und ist zu dessen Verständnis unabkömmlich.

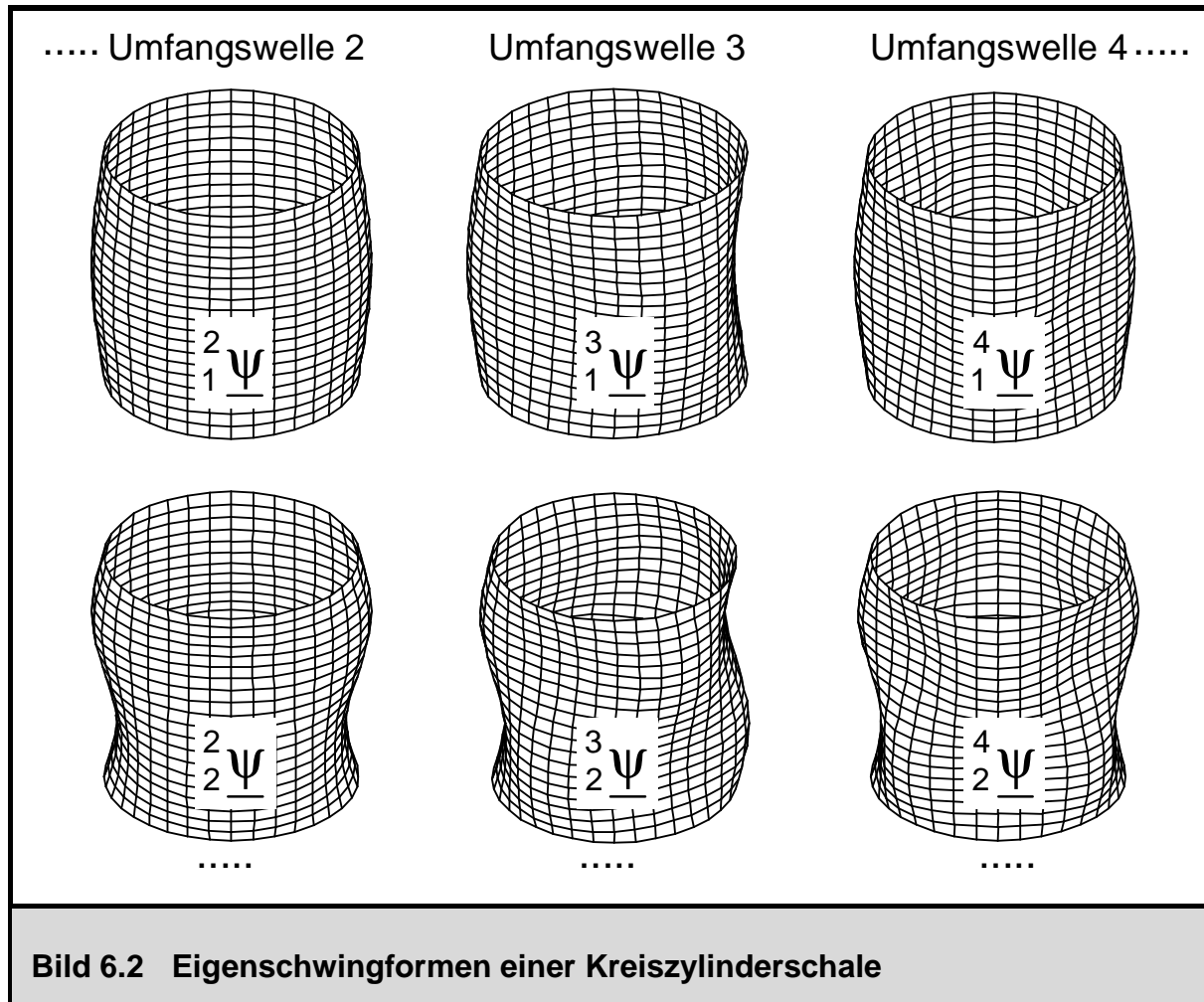
Auch nichtlineare dynamische Problemstellungen können mit der modalen Analyse behandelt werden. Dies erscheint zunächst aufgrund der Ungültigkeit des Superpositionsprinzips widersprüchlich, jedoch mit einem Übergang auf eine inkrementelle Formulierung und Darstellung der Zuwächse der Verformungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den linearisierten Schritten über eine Superposition aus den Eigenformen gelingt eine Formulierung, in deren Rahmen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden können. In der Literatur sind dazu vereinzelt Ansätze zu finden [8], [51], [70], [17]. In diesem Kapitel wird hergeleitet, wie das ursprüngliche Verfahren der modalen Analyse zur geometrisch und physikalisch nichtlinearen dynamischen Analyse von Rotationsschalen mit Ringelementen modifiziert werden kann. Zum Abschluss dieses Kapitels wird die Gültigkeit des Verfahrens der nichtlinearen modalen Analyse an einem Anwendungsbeispiel verifiziert, wobei nochmals deren Besonderheiten aufgezeigt werden.

### 6.4.1 Modale Analyse für lineare Problemstellungen

Ausgangspunkt für die modale Analyse bildet das lineare Eigenschwingproblem, das für eine Umfangswelle  $n$  des Verformungsansatzes in Gleichung (6.23) angegeben ist. Die Entkopplung des Eigenwertproblems in den Umfangswellen folgt aus den im Kapitel 5 beschriebenen Eigenschaften der linearen Steifigkeitsmatrix und der Massenmatrix. Damit lassen sich pro Umfangswelle unabhängig Eigenpaare (Eigenkreisfrequenzen mit zugehörigen Schwingformen) bestimmen, deren Anzahl maximal der Anzahl der Systemfreiheitsgrade ist. Im Bild 6.2 sind zur Verdeutlichung die ersten beiden Eigenformen der Umfangsharmonischen  $n = 2$  bis  $n = 4$  einer Kreiszylinderschale dargestellt.

Die Freiheitsgrade und deren Zeitableitungen werden nun durch eine Superposition der zugehörigen Eigenvektoren ausgedrückt, wie die Gleichungen (6.24) – (6.26) für ein einzelnes Fourierglied des Umfangsansatzes angeben. Die Größe  $q_i$  stellt eine modale Bewegungskordinate dar, die die Beiträge der Eigenform  $i$  in Umfangswelle  $n$  an der Gesamtlösung beschreibt.

$$[{}^n\mathbf{K}_e - q_i \omega^2 \cdot {}^n\mathbf{M}] \cdot {}^n\psi = \underline{0} \quad (6.23)$$



**Bild 6.2** Eigenschwingformen einer Kreiszyinderschale

$${}^n \underline{V} = \sum_i {}^n \underline{\psi} \cdot {}^n \dot{q} \quad (6.24)$$

$${}^n \underline{\dot{V}} = \sum_i {}^n \underline{\psi} \cdot {}^n \ddot{q} \quad (6.25)$$

$${}^n \underline{\ddot{V}} = \sum_i {}^n \underline{\psi} \cdot {}^n \ddot{q} \quad (6.26)$$

Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehungen zwischen zwei verschiedenen Eigenvektoren

$${}^n \underline{\psi}^T \cdot {}^{nn} \underline{K}_e \cdot {}^n \underline{\psi} = 0 \quad \text{und} \quad {}^n \underline{\psi}^T \cdot {}^{nn} \underline{M} \cdot {}^n \underline{\psi} = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (6.27)$$

wird das lineare Bewegungsdifferentialgleichungssystem (6.28) durch Einsetzen der

Gleichungen (6.24) – (6.26) und anschließender Multiplikation von links mit den transponierten Eigenvektoren entkoppelt. Es entstehen unabhängige Differentialgleichungen 2. Ordnung für die skalaren Größen der generalisierten Bewegungskordinaten  ${}^n q$ . Für die  $i$ . Eigenform in der Umfangsharmonischen  $n$  ist eine solche äquivalente Einmassenschwingergleichung (6.29) angegeben.

$${}^{nn}\underline{M} \cdot {}^n \ddot{\underline{V}} + {}^{nn}\underline{C} \cdot {}^n \dot{\underline{V}} + {}^{nn}\underline{K}_e \cdot {}^n \underline{V} = {}^n \underline{P}_a \quad (6.28)$$

$${}^n m \cdot {}^n \ddot{q} + 2 {}^n \xi {}^n \omega {}^n m \cdot {}^n \dot{q} + {}^n k \cdot {}^n q = {}^n p \quad (6.29)$$

$${}^n m = {}^n \underline{\psi}^T \cdot {}^{nn}\underline{M} \cdot {}^n \underline{\psi} \quad (6.30)$$

$${}^n k = {}^n \underline{\psi}^T \cdot {}^{nn}\underline{K}_e \cdot {}^n \underline{\psi} \quad (6.31)$$

$${}^n p = {}^n \underline{\psi}^T \cdot {}^n \underline{P}_a \quad (6.32)$$

$${}^n \xi \stackrel{!}{=} \frac{{}^n \underline{\psi}^T \cdot {}^{nn}\underline{C} \cdot {}^n \underline{\psi}}{2 {}^n \omega {}^n m} \quad (6.33)$$

- mit:  ${}^n m$  - generalisierte Masse für Eigenform  $i$  in Umfangswelle  $n$  (6.30)  
 ${}^n k$  - generalisierte Steifigkeit für Eigenform  $i$  in Umfangswelle  $n$  (6.31)  
 ${}^n p$  - generalisierte Kraft für Eigenform  $i$  in Umfangswelle  $n$  (6.32)  
 ${}^n \omega$  - Eigenkreisfrequenz für Eigenform  $i$  in Umfangswelle  $n$   $\sqrt{\frac{{}^n k}{{}^n m}}$   
 ${}^n \xi$  - LEHRsches Dämpfungsmaß für Eigenform  $i$  in Umfangswelle  $n$

Gleichung (6.29) wird nun für alle Eigenformen  $i$  aller Umfangswellen  $n$  mit bekannten Verfahren der linearen Dynamik des Einmassenschwingers integriert [108], [26], [24]. Anschließend werden die aufgefunden Verläufe für die generalisierten Bewegungskordinaten wieder in (6.24) – (6.26) eingesetzt, und es ergeben sich durch Superposition aller Eigenformen über alle Umfangswellen die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Systemfreiheitsgrade, mit denen im Nachlauf Spannungen oder Schnittgrößen berechnet werden.

### 6.4.2 Antwortspektrenverfahren – Bezug zur modalen Analyse

Eine enge Verbindung besteht zwischen der modalen Analyse und dem Antwortspektrenverfahren; letzteres ist als Standardverfahren in den verschiedensten Vorschriften (z.B. [35], [38], [91]) zur Berechnung der Tragwerksbeanspruchungen infolge Erdbebeneinwirkungen zu finden. FISCHER erläutert in [50] die Übertragung des Verfahrens auf Rotationsschalen, die im Folgenden kurz zusammengefasst wird.

Beziehung (6.34) beschreibt die Bewegungsgleichung (lineare Dynamik) einer Rotationsschale infolge Fußpunkterregung in einer Umfangswelle  $n$ . Es wird davon ausgegangen, dass sich der Boden als Starrkörper ausschließlich in den Umfangswellen 0 und 1 bewegt. Vertikalbeschleunigungen erzeugen einen äquivalenten Lastvektor in der Umfangswelle 0, Horizontalbeschleunigungen hingegen einen äquivalenten Lastvektor in der Umfangswelle 1. Höhere Umfangswellen als  $n = 1$  sind somit bei der linearen Lösung für die Antwortschwingung nicht von Interesse.

$${}^{nn}\underline{K} \cdot {}^n\underline{V} + {}^{nn}\underline{C} \cdot {}^n\underline{\dot{V}} + {}^{nn}\underline{M} \cdot {}^n\underline{\ddot{V}} = -{}^{nn}\underline{M} \cdot {}^n\underline{\ddot{V}}_{gr} \quad (6.34)$$

Durch Übergang auf modale Koordinaten gemäß den Ausführungen des letzten Abschnitts wird Gleichung (6.34) entkoppelt, wobei die Bewegungsgleichung eines äquivalenten Einmassenschwingers nun folgendermaßen lautet:

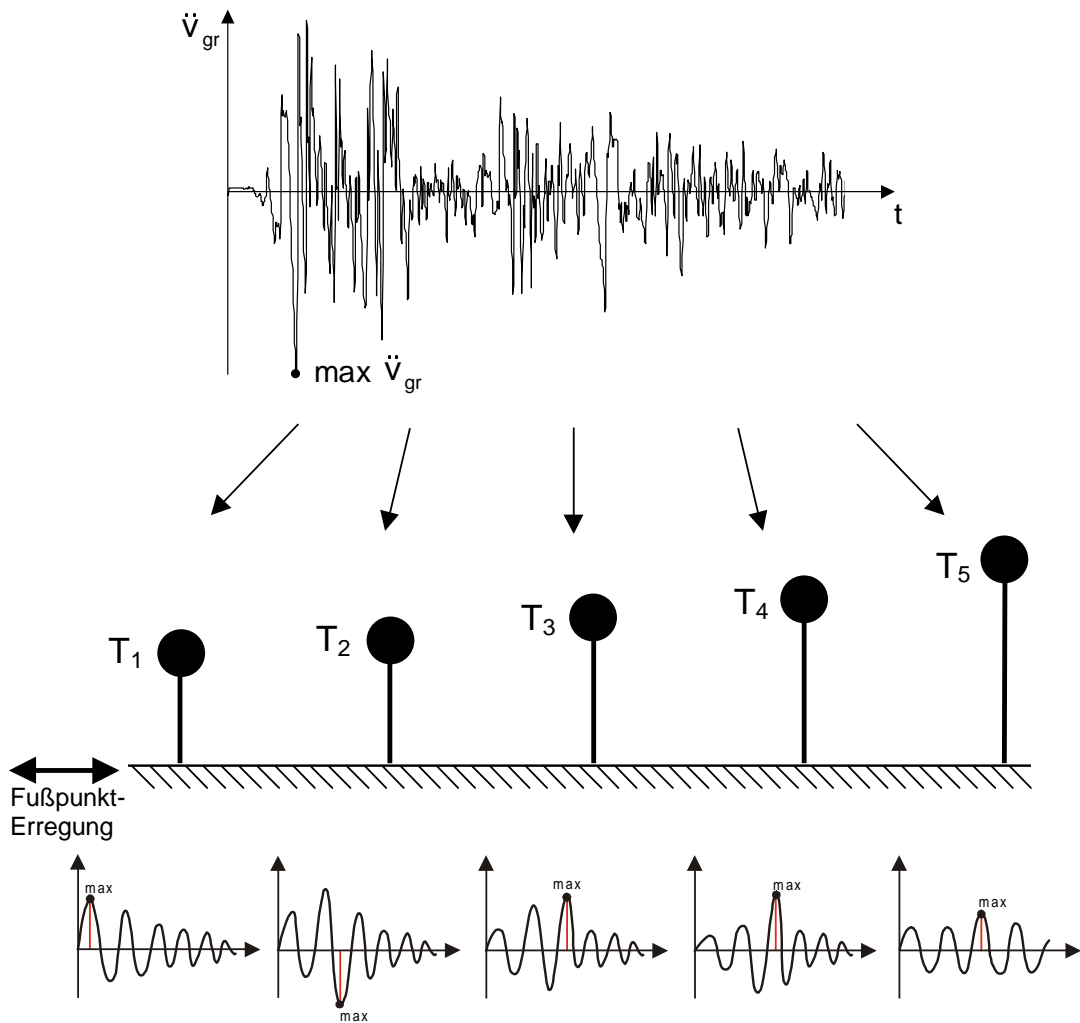
$${}_i^i\ddot{q} + 2{}_i^i\xi{}_i^i\omega \cdot {}_i^i\dot{q} + {}_i^i\omega^2 \cdot {}_i^i q = -\frac{{}_i^i\psi^T \cdot {}^{nn}\underline{M}}{{}_i^i m} \cdot {}^n\underline{\ddot{V}}_{gr} \quad (6.35)$$

Für die einzelnen modalen Bewegungsgleichungen werden nun keine Lösungen im Zeitbereich berechnet; stattdessen sind die maximalen Antworten von Einmassenschwingern in Abhängigkeit deren Periode infolge einer Fußpunkteinheitserregung in Antwortspektren enthalten. Im Bild 6.3 ist die Ermittlung eines Antwortspektrums dargestellt: Darin sind auf der Abszisse die Eigenschwingzeiten von Einmassenschwingern aufgetragen und auf der Ordinate die maximale Beschleunigung der Antwortschwingung, wobei der Kurvenscharparameter das LEHRsche Dämpfungsmaß ist. (Genau genommen ist die Pseudobeschleunigung aufgetragen, der Unterschied ist jedoch für praktische Dämpfungsmaße gering. In [24] sind hierzu ausführliche Erläuterungen zu finden). Die maximale Beschleunigung des äquivalenten Einmassenschwingers ergibt sich demnach nach Gleichung (6.36).



Integration der Bewegungsgleichungen  
infolge von Beschleunigungsverläufen für  
unterschiedliche Einmassenschwinger

$$\ddot{v} + 2\xi\omega \cdot \dot{v} + \omega^2 \cdot v = -\ddot{v}_{gr}$$



Lösung:  $v(t)$ ,  $\dot{v}(t)$ ,  $\ddot{v}(t)$  in Abhängigkeit von  $T$  und  $\xi$ , Auftragung  $\beta$

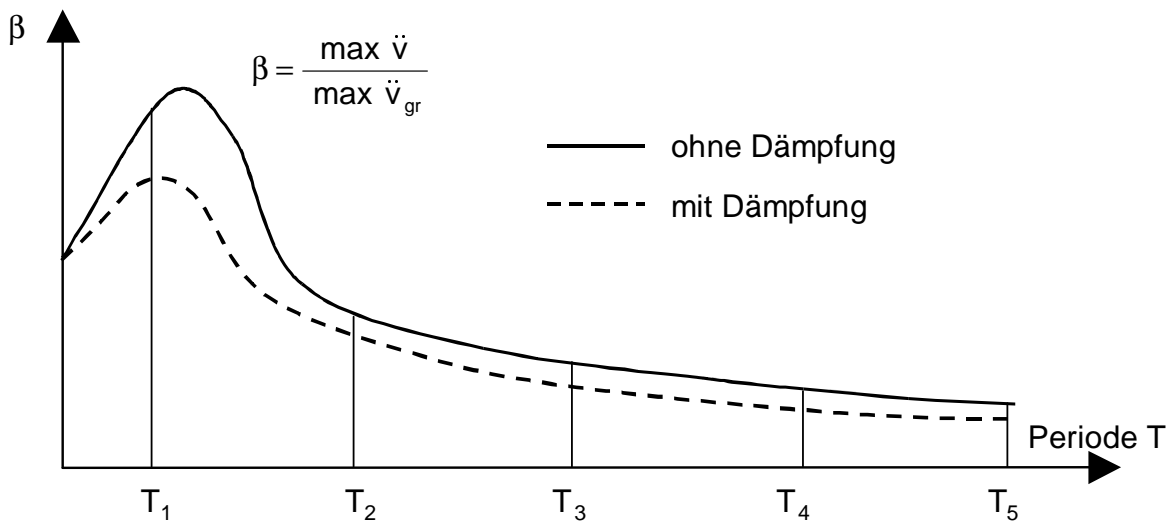


Bild 6.3 Ermittlung von Antwortspektren

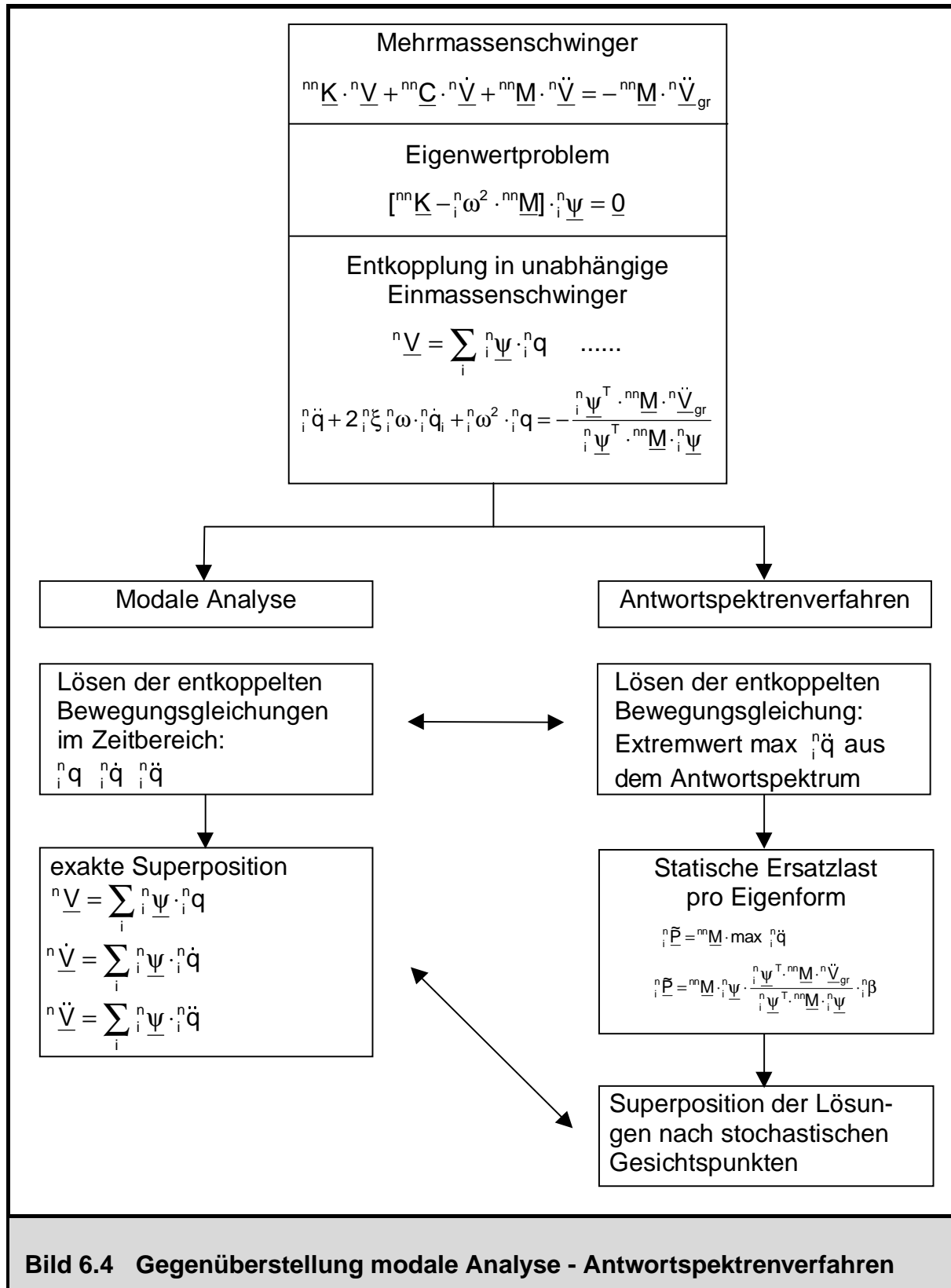


Bild 6.4 Gegenüberstellung modale Analyse - Antwortspektrenverfahren

$$\max_i {}^n\ddot{q}_i = {}^n\beta \cdot \frac{{}^n\underline{\psi}_i^T \cdot {}^{nn}\underline{M}}{{}^n m} \cdot {}^n\ddot{\underline{V}}_{gr} \quad (6.36)$$

$$\mathbf{P}_i^{\sim} = \mathbf{M}^{nn} \cdot \underline{\psi}_i \cdot \beta_i \cdot \frac{\underline{\psi}_i^T \cdot \mathbf{M}^{nn}}{m_i^n} \cdot \ddot{\mathbf{V}}_{gr} \quad (6.37)$$

Durch Einsetzen von  $\max \ddot{q}_i$  in (6.26) berechnen sich die maximalen Beschleunigungen der Systemfreiheitsgrade für die Eigenform  $i$ . Weiterhin wird mit diesem Beschleunigungsvektor ein Ersatzlastvektor nach Gleichung (6.37) aufgebaut, mit dem eine statische Berechnung durchgeführt wird, aus der die Tragwerksbeanspruchungen gewonnen werden. Beim Antwortspektrenverfahren wird allerdings keine Aussage gemacht, zu welchem Zeitpunkt die Maximallösung für eine Eigenform eintritt. Deswegen müssen die Teillösungen für die einzelnen Eigenformen nach stochastischen Gesichtspunkten superponiert werden. In der Literatur (z.B. [24]) sind hierzu verschiedene Verfahren zu finden: SRSS-Regel (square root of sum of squares), ABSSUM-Regel (absolute sum) und CQC-Regel (complete quadratic combination). Die CQC-Regel ist immer dann anzuwenden, wenn mehrere Eigenformen mit sehr eng beieinander liegenden Eigenfrequenzen an der Gesamtlösung beteiligt sind und diese noch deutliche Anteile in den modalen Massen ergeben, da hierbei deren Korrelation berücksichtigt werden muss, wie es z.B. bei Rohrleitungssystemen von Kernkraftwerken [24] der Fall ist. Bei gleichmäßig verteilter Steifigkeit und Massenbelegung über das Tragwerk und somit ausreichend unkorrelierten Eigenfrequenzen ist jedoch im Allgemeinen die Verwendung der SRSS-Regel ausreichend. DER KIUREGHIAN gibt in [32] eine Beziehung für den Korrelationskoeffizienten zweier an der Gesamtschwingung partizipierenden Eigenformen in Abhängigkeit des Verhältnisses der beiden Eigenfrequenzen an.

Aus Bild 6.4 wird nochmals der Zusammenhang des Antwortspektrenverfahrens mit der modalen Analyse deutlich. Bis zur Entkopplung der Bewegungsgleichung des Mehrmassenschwingers laufen beide Verfahren identisch ab. Die modale Analyse löst nun die entkoppelten äquivalenten Einmassenschwingergleichungen im Zeitbereich und superponiert die Eigenformen mit den ermittelten generalisierten Bewegungskordinaten wieder zur Gesamtlösung. Beim Antwortspektrenverfahren hingegen wird die maximale Antwort der äquivalenten Einmassenschwinger in Abhängigkeit deren Periode und Dämpfung nun einem vorgegebenen Antwortspektrum entnommen. Mit dieser maximalen Antwort eines äquivalenten Einmassenschwingers ergeben sich gemäß Gleichung (6.37) statische Ersatzlasten, für die Tragwerksbeanspruchungen berechnet werden. Im Gegensatz zur modalen Analyse, bei der die Zeitpunkte des Auftretens der maximalen Antworten der äquivalenten Einmassenschwinger durch deren Zeitverlauf bekannt ist, geht beim Antwortspektrenverfahren diese Information verloren, so dass die Superposition der Teillösungen aus den einzelnen Beiträgen der Eigenformen nicht mehr exakt durchgeführt werden kann.

In [89] wird ein weiteres Verfahren vorgestellt, bei dem vereinfachte statische Ersatz-

lasten zur Ermittlung der Tragwerksbeanspruchungen angesetzt werden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass dabei die Erdbebenbelastung formal als einzelner statischer Lastfall behandelt wird, der leicht mit anderen Lastfällen kombiniert werden kann. Ausgangspunkt dieses Verfahrens bildet die Ermittlung einer gesamten Erdbebenkraft des Tragwerks in Fundamenthöhe (für horizontale Bewegungen mit „base shear“ bezeichnet). Diese ergibt sich aus dem Produkt aus Gesamttragwerksmasse und Erdbebenbeschleunigung, die mit dem Responsebeiwert  $\beta$  der ersten Tragwerkeigenperiode überhöht wird. Für Rotationsschalen kann nach Gleichung (6.38) eine solche statische Ersatzlast angegeben werden.

$${}^n\tilde{\underline{P}} = {}^{nn}\underline{M} \cdot {}^n\ddot{\underline{V}}_{\text{gr}} \cdot {}^n_1\beta \quad (6.38)$$

Bei dieser Ersatzlast wird lediglich der Vektor infolge Massenträgheitskräften aus Bodenbeschleunigungen mit dem Responsewert  $\beta$  der ersten Eigenfrequenz aus dem Antwortspektrum multipliziert. Beim Vergleich von Beziehung (6.38) mit (6.37) fallen folgende Merkmale auf:

- Im Gegensatz zum Antwortspektrenverfahren werden statische Ersatzlasten nur in Abhängigkeit der Tragwerksgrundperiode bestimmt.
- Bei der Höhenverteilung der vereinfachten statischen Ersatzlasten findet nach Gleichung (6.38) die Gestalt sowie der Massenbeteiligungsfaktor der ersten Eigenform keine Berücksichtigung. Es wird lediglich eine Aussage über die resultierende Gesamterdbebenkraft in der Bodenfuge gemacht.

Im Allgemeinen ist das Antwortspektrenverfahren der Verwendung der statischen Ersatzlast nach Gleichung (6.38) vorzuziehen, insbesondere aufgrund des zweiten genannten Merkmals bzw. Kritikpunkts. Dennoch können mit diesem Verfahren zum Teil recht gute Abschätzungen für globale Antwortgrößen wie z.B. für Stützenkräfte einer auf ein Stützenfachwerk aufgelagerten Rotationsschale oder für Fundamentkräfte und Bodenpressungen getroffen werden. In [31] werden die Beanspruchungen einer Kühlturmschale infolge Erdbeben mit Ersatzlasten ermittelt und zur Bildung von Lastfallkombinationen mit anschließender Bemessung verwendet, wobei zuvor überprüft worden ist, dass die Ergebnisse aus den Ersatzlasten im Vergleich mit den Ergebnissen des Antwortspektrenverfahrens insbesondere für die bemessungsrelevanten Stützenkräfte auf der sicheren Seite liegen. Ebenso werden bei den Anwendungsbeispielen im Kapitel 7 Ergebnisse der statischen Ersatzlasten herangezogen und mit den Ergebnissen des Antwortspektrenverfahrens und dynamischen Zeitverlaufsberechnungen verglichen, wobei sich für die Bodenpressungen und maximalen Stützenkräfte gute Übereinstimmungen ergeben werden.

### 6.4.3 Modale Analyse für nichtlineare Problemstellungen

Wie bereits eingangs erwähnt, ist die modale Analyse ein klassisches Verfahren der linearen Dynamik, da sie die Bewegungsgleichungen entkoppelt, diese unabhängig voneinander löst und sich anschließend des Superpositionsprinzips bedient und die Teillösungen wieder zur Gesamtlösung zusammensetzt. Durch Übergang auf eine inkrementelle Formulierung und Entkopplung der Bewegungsgleichungen im Inkrement- bzw. Iterationsschritt können mit der modalen Analyse auch Nichtlinearitäten berücksichtigt werden. Die jüngsten Veröffentlichungen auf diesem Themengebiet stammen von KHUDADA und GESCHWINDNER [70] sowie von BUCHER [17]. KHUDADA und GESCHWINDNER setzen dieses Verfahren zur nichtlinearen dynamischen Berechnung von Stahlrahmentragwerken unter Erdbebenbeanspruchungen ein, wobei die entkoppelten Bewegungsgleichungen mit Hilfe des DUHAMEL Integrals [26] iterativ gelöst werden. BUCHER verwendet die nichtlineare modale Analyse zur Spannungsberechnung in einem Betonblock infolge eines Meißelschlags (kurzzeitige Stoßbelastung), wobei eine Lösung der entkoppelten Bewegungsgleichungen mit Hilfe des zentralen Differenzenverfahrens erfolgt. Das Ziel dieser Vorgehensweise bestand in diesem Fall darin, die Anzahl der Freiheitsgrade und somit Bewegungsmöglichkeiten des Systems zu reduzieren, um somit bei der Zeitintegration mit dem bedingt stabilen zentralen Differenzenverfahren die Wahl einer größeren Zeitschrittweite zu ermöglichen. In beiden Fällen werden die Eigenformen des linearen Eigenschwingproblems zur Darstellung der nichtlinearen Lösung im Zeitbereich verwendet. Diese Vorgehensweise bietet sich geradezu prädestiniert als Verfahren zur nichtlinearen dynamischen Berechnung von Rotationsschalen in Kombination mit der Verwendung von Ringelementen an: Die Eigenformen des linearen Eigenschwingproblems sind in den Umfangswellen entkoppelt, wie im Bild 6.2 zu erkennen ist. Aufgrund dieser Eigenschaft bleibt auch bei nichtlinearen dynamischen Problemstellungen die sehr anschauliche Darstellungsmöglichkeit der Lösung in Fouriergliedern erhalten. Liegt zum Beispiel eine fourierzerlegte dynamische Belastung in den Umfangswellen  $0 - p_{\max}$  vor, so wird nach dem Verfahren der nichtlinearen modalen Analyse die Antwortschwingung aus den Eigenformen der Umfangswellen  $0 - n_{\max}$  des linearen Eigenschwingproblems dargestellt, wobei  $n_{\max}$  die höchste Umfangswellenanzahl in der Antwort angibt, die mindestens gleich  $p_{\max}$  ist. Die partizipierenden Eigenformen können daher aufgrund ihrer Sortierung nach Umfangswellen für den Lösungsansatz sehr einfach selektiert werden. Im Folgenden wird die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommene Abwandlung des Verfahrens der modalen Analyse zur Berücksichtigung von Nichtlinearitäten bei der dynamischen Berechnung von Rotationsschalen mit Ringelementen näher erläutert:

Den Ausgangspunkt der Betrachtungen bildet wiederum das lineare Eigenwertproblem der freien ungedämpften Schwingung (6.23), aus dem pro Umfangswelle ei-

ne gewünschte Anzahl von Eigenkreisfrequenzen und Eigenschwingformen bestimmt wird, die maximal gleich der Anzahl der Systemfreiheitsgrade sein kann. Gemäß der Gleichungen (6.24) – (6.26) werden bei der nichtlinearen modalen Analyse die gleichen Ansätze wie im linearen Fall gemacht; die Lösungen für die Verformungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden mittels einer Linearkombination aus einer Anzahl von Eigenformen des linearen Eigenschwingproblems (6.23) repräsentiert. Physikalisch gesehen ist dieser Vorgang nichts weiter als eine Koordinatentransformation der Systemfreiheitsgrade auf generalisierte Bewegungskordinaten. Deren Ermittlung muss nun jedoch mit inkrementell iterativen Verfahren erfolgen, da die einzelnen Teilschwingungen aufgrund der Nichtlinearitäten nun nicht mehr unabhängig voneinander erfolgen. Die linearisierte Bewegungsgleichung für einen Inkrementschritt (Predictor-Schritt, Fortbewegung des Tragwerks im Zeitschritt  $\Delta t$  nach zuvor aufgefundenem Gleichgewichtszustand) kann gemäß Gleichung (6.39) für die Zuwächse in einer Umfangswelle  $n$  angegeben werden.

$${}^{nn}\underline{K}_t^0 \cdot {}^n\underline{V}^+{}^0 + {}^{nn}\underline{C}^0 \cdot \dot{{}^n\underline{V}}^+{}^0 + {}^{nn}\underline{M} \cdot \ddot{{}^n\underline{V}}^+{}^0 = {}^n\underline{P}_a(t + \Delta t) - {}^n\underline{P}_a(t) \quad (6.39)$$

Analog dazu lautet die inkrementelle Bewegungsgleichung für einen Iterationsschritt (Corrector-Schritt):

$${}^{nn}\underline{K}_t^k \cdot {}^n\underline{V}^+{}^k + {}^{nn}\underline{C}^k \cdot \dot{{}^n\underline{V}}^+{}^k + {}^{nn}\underline{M} \cdot \ddot{{}^n\underline{V}}^+{}^k = {}^n\underline{P}_a(t + \Delta t) - {}^n\underline{P}_i^k - {}^n\underline{P}_{ca}^k - {}^n\underline{P}_m^k \quad (6.40)$$

Wie leicht zu erkennen ist, haben die Beziehungen (6.39) und (6.40) den gleichen formalen Aufbau und lassen sich zu Gleichung (6.41) zusammenfassen. Diese repräsentiert einen linearisierten Integrationsschritt mit der Ungleichgewichtskraft  ${}^n\underline{P}^+{}^k$ , der durch modale Superposition im Folgenden gelöst wird.

$${}^{nn}\underline{K}_t^k \cdot {}^n\underline{V}^+{}^k + {}^{nn}\underline{C}^k \cdot \dot{{}^n\underline{V}}^+{}^k + {}^{nn}\underline{M} \cdot \ddot{{}^n\underline{V}}^+{}^k = {}^n\underline{P}^+{}^k \quad (6.41)$$

$$\underline{\overset{+}{V}}^k = \sum_i \underline{\overset{+}{\psi}}_i \cdot \underline{\overset{+}{q}}^k \quad (6.42)$$

$$\underline{\overset{\cdot}{V}}^k = \sum_i \underline{\overset{\cdot}{\psi}}_i \cdot \underline{\overset{\cdot}{q}}^k \quad (6.43)$$

$$\underline{\overset{\ddot{}}{V}}^k = \sum_i \underline{\overset{\ddot{}}{\psi}}_i \cdot \underline{\overset{\ddot{}}{q}}^k \quad (6.44)$$

Die Ansätze (6.42) – (6.44) für die inkrementellen Zuwächse der gesuchten Zustandsgrößen  $\underline{\overset{+}{V}}$ ,  $\underline{\overset{\cdot}{V}}$  und  $\underline{\overset{\ddot{}}{V}}$  werden in Gleichung (6.41) eingebracht, die anschließend mit den transponierten Eigenvektoren von links multipliziert wird. Damit lassen sich wie folgt auch für den nichtlinearen Fall modale Bewegungsgrößen für die Inkrement- und Iterationsschritte bestimmen.

$$\underline{\overset{+}{k}}^k = \underline{\overset{+}{\psi}}^T \cdot \underline{\overset{+}{K}}_t^k \cdot \underline{\overset{+}{\psi}} \quad (6.45)$$

$$\underline{\overset{+}{m}} = \underline{\overset{+}{\psi}}^T \cdot \underline{\overset{+}{M}} \cdot \underline{\overset{+}{\psi}} \quad (6.46)$$

$$\underline{\overset{+}{\omega}}^k = \sqrt{\frac{\underline{\overset{+}{k}}^k}{\underline{\overset{+}{m}}}} \quad (6.47)$$

$$\underline{\overset{+}{c}}^k \stackrel{!}{=} 2 \underline{\overset{+}{\xi}} \underline{\overset{+}{\omega}}^k \underline{\overset{+}{m}} \quad (6.48)$$

$$\underline{\overset{+}{p}}^k = \underline{\overset{+}{\psi}}^T \cdot \underline{\overset{+}{P}}^k \quad (6.49)$$

$$= \underline{\overset{+}{\psi}}^T \cdot [\underline{\overset{+}{P}}_a(t + \Delta t) - \underline{\overset{+}{P}}_a(t)] \quad \text{für Inkrementschritt} \quad (6.50)$$

$$\stackrel{!}{=} \underline{\overset{+}{\psi}}^T \cdot [\underline{\overset{+}{P}}_a(t + \Delta t) - \underline{\overset{+}{P}}_i - \underline{\overset{+}{P}}_m] - 2 \underline{\overset{+}{\xi}} \underline{\overset{+}{\omega}}^k \underline{\overset{+}{m}} \cdot \underline{\overset{-}{\dot{q}}} \quad (6.51)$$

Die modalen Massen  $\underline{\overset{+}{m}}$  müssen nur einmal ermittelt werden, da sich die Massenmatrix während der Berechnung nicht ändert. Die Dämpfungsmatrix wird nicht explizit aufgebaut, stattdessen werden die generalisierten Dämpfungen über die LEHRschen Dämpfungsmaße ausgedrückt. In diesem Zusammenhang wird für die Eigenkreisfrequenz in Gleichung (6.48) und (6.51) deren Ursprungswert verwendet, da bei Werkstoffen wie Stahlbeton mit höherem Grad der Nichtlinearität die innere Dissipation ansteigt,

was dem Ansatz der aktuellen Kreisfrequenz bei Steifigkeitsverlust widerspricht. Wiederum können mit den nach Gleichungen (6.45) – (6.51) berechneten modalen Größen äquivalente Einmassenschwingergleichungen angeschrieben werden, für die eine unabhängige Integration pro Umfangswelle im aktuellen Inkrement- oder Iterationsschritt erfolgt. Die Terme auf den Nebendiagonalen werden im Rahmen eines modifizierten Iterationsverfahrens vernachlässigt, so dass entkoppelte Beziehungen vorliegen.

$$\begin{aligned}
 {}_1^n k^k \cdot {}_1^n \ddot{q}^k + {}_1^n c^k \cdot {}_1^n \dot{q}^k + {}_1^n m \cdot {}_1^n \ddot{q}^k &= {}_1^n p^k \\
 {}_2^n k^k \cdot {}_2^n \ddot{q}^k + {}_2^n c^k \cdot {}_2^n \dot{q}^k + {}_2^n m \cdot {}_2^n \ddot{q}^k &= {}_2^n p^k \\
 \vdots & \\
 {}_i^n k^k \cdot {}_i^n \ddot{q}^k + {}_i^n c^k \cdot {}_i^n \dot{q}^k + {}_i^n m \cdot {}_i^n \ddot{q}^k &= {}_i^n p^k \\
 \vdots &
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

Die Integration der linearisierten unabhängigen Einmassenschwingerbewegungsgleichungen (6.52) erfolgt numerisch mit bekannten Methoden der linearen Dynamik. Im Rahmen dieser Arbeit kommt dafür die Trapezregel [6] zum Einsatz. Um eine bessere Approximation des Verlaufs der Beschleunigungen (und somit auch der Verformungen und Geschwindigkeiten) im Integrationsintervall  $\Delta t$  zu erhalten, wird der globale Integrationszeitschritt  $\Delta t$  in mehrere Hilfsschritte unterteilt, deren Länge  $\Delta_i^{n\tilde{t}^k}$  von der aktuellen Eigenkreisfrequenz des betrachteten Einmassenschwingers (6.47) abhängt. Eine Faustregel besagt, dass die Integrationszeitschrittweite zwischen  $\frac{1}{10}$  bis  $\frac{1}{100}$  der Periodendauer zu wählen ist. Nach der Wahl der Unterteilung der Periode in  $n_{\text{per}}$  Schritte ergibt sich die erforderliche Anzahl von Integrationshilfsschritten  $n_t$  gerundet zur nächsten Ganzzahl nach Gleichung (6.53). Jede äquivalente Einmassenschwingergleichung wird mit einer unterschiedlichen Anzahl von Hilfsschritten in Abhängigkeit der zugehörigen Eigenkreisfrequenz integriert. Daher wird für höhere Eigenformen (kleinere Perioden) eine größere Anzahl von Hilfsschritten benötigt. Mit der Trapezregel wird keine numerische Dämpfung erzeugt, jede Einmassenschwingerbeziehung wird in einem Inkrement- oder Iterationsschritt mit ihrer erforderlichen Genauigkeit integriert, wobei sich die Zeitschrittweite der Hilfsschritte nach Gleichung (6.54) berechnet.

$${}_i^n n_t^k = \frac{\Delta t \cdot {}_i^n \omega^k \cdot n_{\text{per}}}{2\pi} \tag{6.53}$$

$$\Delta_i^{n\tilde{t}^k} = \frac{\Delta t}{{}_i^n n_t^k} \tag{6.54}$$



Die Vorgehensweise zur Integration einer generalisierten Bewegungskordinate in einem globalen Zeitintervall wird im Folgenden näher erläutert. Zur Vereinfachung wird bei der Herleitung auf die Kopfzeiger zur Bezeichnung der Umfangswelle  $n$ , der Nummer der modalen Koordinate  $i$  und der Nummer des Iterationsschrittes  $k$  verzichtet. Mit den Anfangsbedingungen  $\dot{q}^-$  und  $\ddot{q}^-$  zu Beginn des Inkrementsschrittes nach aufgefundenem Gleichgewicht beschreibt Gleichung (6.55) die Bewegungsgleichung für eine generalisierte Koordinate im ersten Hilfsschritt des Inkrementsschrittes. Diese wird durch Einführen einer mittleren Beschleunigung für den aktuellen Hilfsschritt algebraisiert (6.56) und nach den Verformungszuwächsen  $\dot{q}^+$  aufgelöst. Gemäß den Gleichungen (6.57) – (6.58) werden daraus die zugehörigen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsinkremente bestimmt, und es erfolgt ein Update der generalisierten Koordinate und ihrer Zeitableitungen für den nächsten Hilfsschritt.

$$k \cdot \dot{q}^+ + c \cdot \dot{q}^+ + m \cdot \ddot{q}^+ = \frac{p}{n_t} \quad (6.55)$$

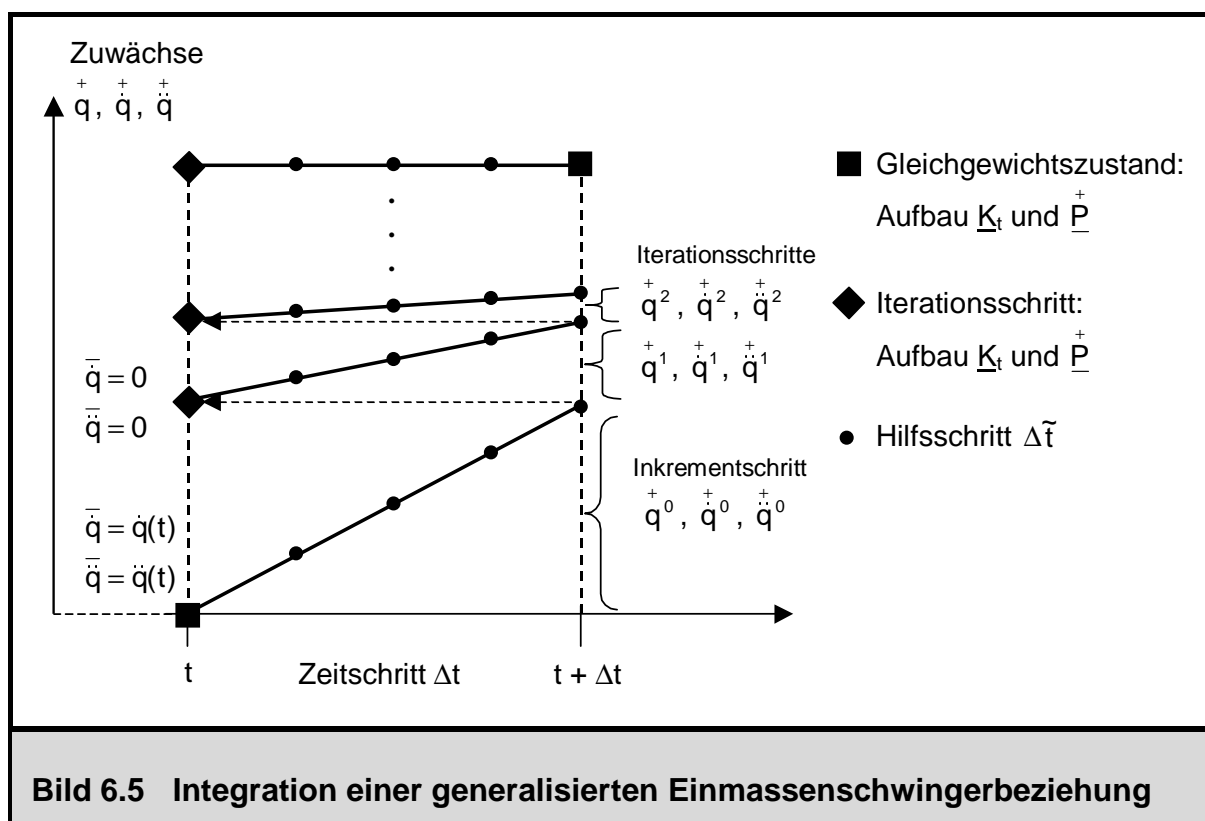
$$\left[ k + \frac{2}{\Delta \tilde{t}} \cdot c + \frac{4}{(\Delta \tilde{t})^2} \cdot m \right] \cdot \dot{q}^+ = \frac{p}{n_t} + c \cdot 2 \cdot \dot{q}^- + m \cdot \left[ \frac{4}{\Delta \tilde{t}} \cdot \dot{q}^- + 2 \cdot \ddot{q}^- \right] \quad (6.56)$$

$$\dot{q}^+ = \frac{2}{\Delta \tilde{t}} \cdot \dot{q}^+ - 2 \cdot \dot{q}^- \quad (6.57)$$

$$\ddot{q}^+ = \frac{4}{(\Delta \tilde{t})^2} \cdot \dot{q}^+ - \frac{4}{\Delta \tilde{t}} \cdot \dot{q}^- - 2 \cdot \ddot{q}^- \quad (6.58)$$

Die Gleichungen (6.56) – (6.58) werden demnach so oft hintereinander gelöst, bis das Inkrement in der für die aktuelle Eigenkreisfrequenz berechneten Anzahl von Hilfsschritten  $n_t$  (6.53) mit den Anfangsbedingungen aus dem jeweils vorangehenden Hilfsschritt vollständig aufgebracht worden ist. Mit dieser ersten Abschätzung im Inkrementsschritt für die generalisierten Bewegungskordinaten am Ende des Integrationsintervalls  $\Delta t$  werden die zugehörigen physikalischen Freiheitsgrade nach (6.24) – (6.26) berechnet und mit diesen die Ungleichgewichtskräfte ermittelt.

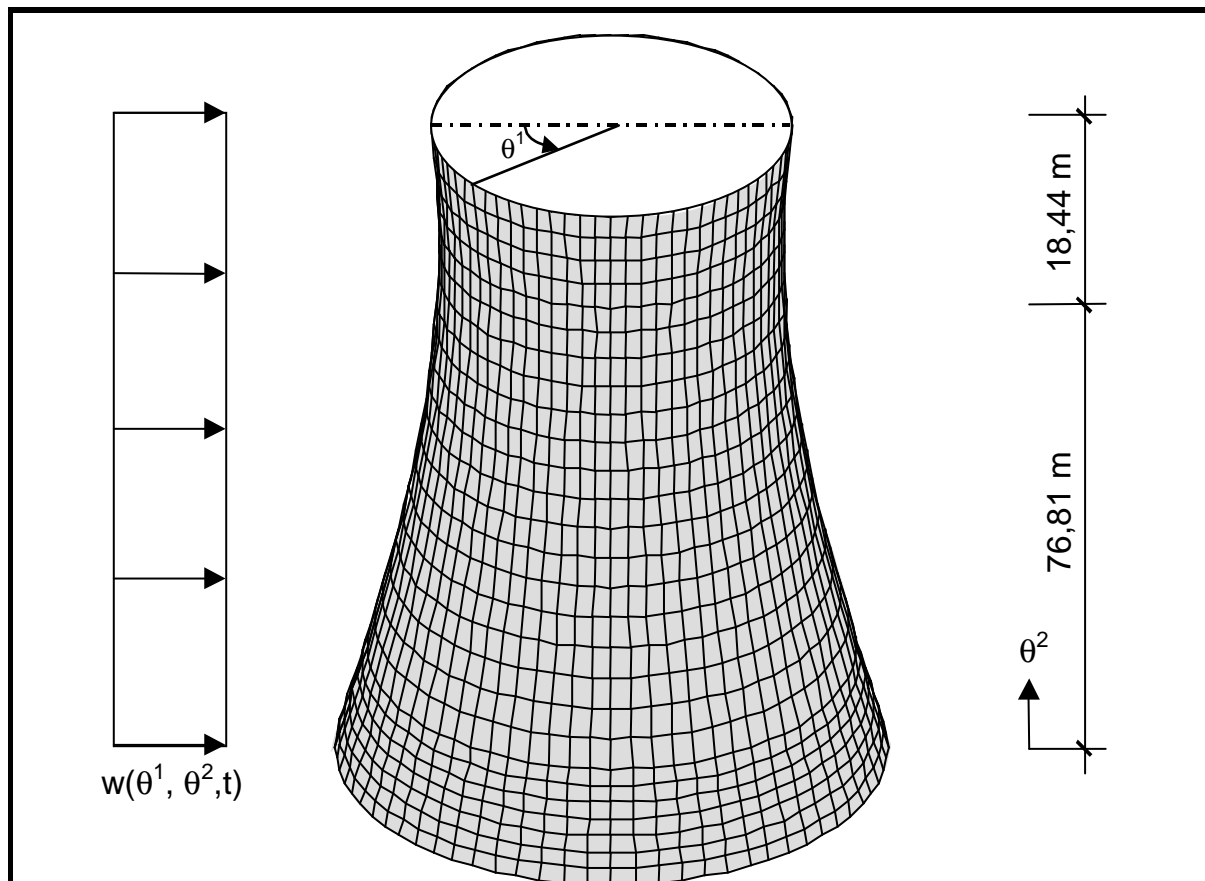
Über die Norm des Vektors der Ungleichgewichtskräfte wird geprüft, ob Gleichgewicht erfüllt ist. Ist dies nicht der Fall, muss mit einer Gleichgewichtsiteration eine Verbesserung der Größen aus dem Inkrementenschritt erzielt werden. Dazu wird genau die gleiche Vorgehensweise wie für einen Inkrementenschritt angewendet, jedoch unterscheiden sich die Startbedingungen für die modalen Koordinaten zu Beginn des Iterationsschrittes: Die Startbedingungen  $\bar{q}$  und  $\bar{\dot{q}}$  des ersten Hilfsschrittes eines Iterationsschrittes sind Null, da diese bereits im zugehörigen Inkrementenschritt berücksichtigt worden sind. Ansonsten erfolgt die Integration in einem Iterationsschritt jedoch völlig analog zu einem Inkrementenschritt durch mehrmaliges Lösen der Gleichungen (6.56) – (6.58) in der berechneten Anzahl von Hilfsschritten  $n_i$  zur Unterteilung des globalen Zeitintervalls  $\Delta t$ . Die Gleichgewichtsiteration wird abgebrochen, wenn die Ungleichgewichtskräfte zu Null werden und somit auch keine weiteren Zuwächse in den generalisierten Koordinaten berechnet werden. Im Bild 6.5 ist die beschriebene Vorgehensweise zur Integration einer generalisierten Koordinate für ein einzelnes Integrationsintervall  $\Delta t$  nochmals zusammenfassend dargestellt.



## 6.5 Anwendungsbeispiel zur nichtlinearen Dynamik

Die vorgestellte nichtlineare Formulierung des Verfahrens der modalen Analyse soll zum Abschluss dieses Kapitels an einem Anwendungsbeispiel demonstriert und diskutiert werden. Zu diesem Zweck ist aus der Literatur eine Kühlturmschale ausgewählt worden, die bereits linear von SURYOUTOMO et al. [114] und ŞANAL [108], sowie geometrisch nichtlinear und physikalisch linear von BYUN und KAPANIA [19] und RAMANJANEYULU et al. [102] untersucht worden ist und deren System mit Belastung im Bild 6.6 dargestellt ist. Wie auch in den zitierten Literaturfundstellen ist in der vorliegenden Arbeit eine gelenkige Lagerung am unteren Schalenrand sowie ein freier oberer Schalenrand zugrunde gelegt worden. Das Eigengewicht wird als statischer Lastfall vorab aufgebracht, ausgehend von diesem Zustand erfolgt eine dynamische Berechnung für den Wind, der innerhalb einer Viertelsekunde auf seinen Grundstaudruck von  $1,379 \text{ kN/m}^2$  gesteigert wird. Zwischen den Zeiten  $0,80 \text{ s}$  und  $1,30 \text{ s}$  tritt ferner eine Windböe auf, der Staudruck wird während dieses Intervalls impulsartig auf den doppelten Wert des Grundstaudrucks erhöht. Für die physikalisch nichtlinearen Untersuchungen ist ferner die Kenntnis der vorhandenen Bewehrung erforderlich, die im Rahmen dieses Anwendungsbeispiels mittels einer linearen Dimensionierung festgelegt worden ist: Die Ergebnisse der linearen dynamischen Berechnung für die Einwirkung  $g + w(t)$  werden pro Zeitschritt einem Bemessungsnachlaufmodul zugeführt, die erforderlichen Bewehrungsmengen ergeben sich aus den Maximalwerten aller Zeitschritte und sind mit den gewählten und im Bild 6.6 angegebenen Bewehrungsmengen abgedeckt. Als Sicherheitsbeiwert gegenüber Stahlfließen ist bei der Dimensionierung  $\gamma_s = 1,00$  zugrunde gelegt worden, da auf der Einwirkungsseite die Windbeanspruchung bereits mit dem zweifachen Wert des Grundstaudrucks als Böe berücksichtigt ist.

Der Startpunkt einer dynamischen Untersuchung sollte immer eine lineare Eigenfrequenzberechnung sein. In Tabelle 6.1 sind die erste und zweite Eigenfrequenz bzw. Eigenperiode der Rotationsschale in Abhängigkeit der Umfangswelle der Eigenschwingform zu finden. Für jede Umfangsharmonische können maximal 217 Eigenpaare berechnet werden, wobei diese Zahl der Anzahl der Systemfreiheitsgrade pro Umfangswelle entspricht. Die kleinste Eigenfrequenz liegt bei  $f = 1,36 \text{ Hz}$ , die korrespondierende Eigenform besitzt eine Umfangsverteilung in Umfangswelle  $n = 5$ . Ferner sind in dieser Tabelle die Fourierkoeffizienten der Umfangsverteilung des Windes angegeben, deren Größe mit höheren Umfangswellen gegen Null strebt. Zur Darstellung der Windlast in Umfangsrichtung, deren Verlauf im Bild 6.6 abgebildet ist, hätten bereits 4 Fourierreihen ausgereicht [114]; im Rahmen dieser Untersuchungen ist allerdings vor allem im Hinblick auf die physikalisch nichtlinearen Analysen eine maximale Umfangswellenzahl  $n_{\max} = 14$  für die Darstellung der Belastung und der Verformung verwendet worden. Die dynamischen Berechnungen sind mit unterschiedlichen Lösungsverfahren

Systemdaten:

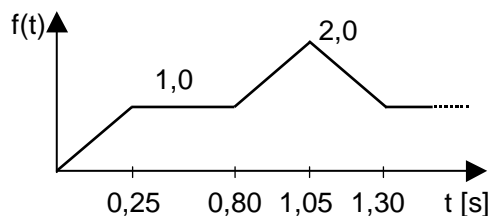
$$R(\theta^2) = 23,00 \sqrt{1 + \left[ \frac{76,81 - \theta^2}{61,34} \right]^2}$$

$$h = 0,13 \text{ m}$$

Tailenhöhe: 76,81 m

Radius am Fuß: 36,86 m (gelenkig gelagert)

Radius am Kopf: 24,00 m (freier Rand)

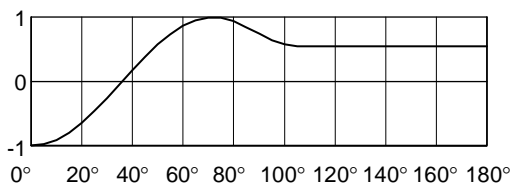
Belastung:

Eigengewicht  $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$

Wind  $w = q(\theta^2) \cdot c_p(\theta^1) \cdot f(t)$

$q(\theta^2) = \text{const.} = 1,379 \text{ kN/m}^2$

$$c_p(\theta^1) = \begin{cases} -\cos \frac{180 \cdot \theta^1}{72} & 0^\circ \leq \theta^1 \leq 72^\circ \\ 0,225 \cdot \cos \frac{180 \cdot [\theta^1 - 72]}{33} + 0,775 & 72^\circ < \theta^1 \leq 105^\circ \\ 0,55 & 105^\circ < \theta^1 \leq 180^\circ \end{cases}$$

Materialdaten Beton:

$$E = 2,965 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$$

$$\nu = 0,15$$

$$f_c = 30,00 \text{ MN/m}^2$$

$$f_{ct} = 2,50 \text{ MN/m}^2$$

Betonstahl:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$$

$$f_y = 500 \text{ MN/m}^2$$

$$f_t = 550 \text{ MN/m}^2$$

$$c_1 = 4,0 \text{ cm}$$

$$c_2 = 5,0 \text{ cm}$$

Bewehrungsanordnung:

$$a_{s1} = 6,5 \text{ cm}^2/\text{m (const.)}$$

$$a_{s2} = 15,0 \text{ cm}^2/\text{m } (\theta^2 < 30\text{m})$$

$$= 14,0 \text{ cm}^2/\text{m } (30\text{ m} < \theta^2 < 42\text{ m})$$

$$= 12,0 \text{ cm}^2/\text{m } (42\text{ m} < \theta^2 < 54\text{ m})$$

$$= 10,0 \text{ cm}^2/\text{m } (54\text{ m} < \theta^2 < 66\text{ m})$$

$$= 6,5 \text{ cm}^2/\text{m } (\theta^2 > 66\text{ m})$$

**Bild 6.6 Geometrie und Belastung der untersuchten Kühlturmschale**

Umfangswelle	0	1	2	3	4	5	6
1. Eigenwert	9,86 Hz 0,101 s	4,00 Hz 0,250 s	2,11 Hz 0,473 s	1,65 Hz 0,605 s	1,47 Hz 0,679 s	1,36 Hz 0,736 s	1,58 Hz 0,631 s
2. Eigenwert	15,35 Hz 0,065 s	8,69 Hz 0,115 s	4,61 Hz 0,217 s	2,45 Hz 0,408 s	1,77 Hz 0,566 s	1,83 Hz 0,546 s	1,81 Hz 0,551 s
Fourierkoeffizient (Wind)	0,3714	-0,4367	-0,5127	-0,3719	-0,1035	0,0461	0,0268

**Tabelle 6.1 Eigenfrequenzen und Fourierzerlegung des Windes (Umfang)**

durchgeführt worden (modale Analyse sowie direkte Zeitintegration nach NEWMARK mit den Integrationsparametern  $\delta = 0,60$  und  $\gamma = 0,3025$ ). Die Integrationszeitschrittweite ist mit  $\Delta t = 0,05$  s kleiner als ein Zehntel der maximalen Eigenperiode gewählt worden. Zusätzlich ist eine Verfeinerung der Integrationszeitschrittweite für die Berechnungen mit direkter Zeitintegration nach NEWMARK auf  $\Delta t = 0,005$  s vorgenommen worden.

Im Bild 6.7 sind die linear berechneten Verläufe der Bewegungsgrößen  $v_{\langle 3 \rangle}$ ,  $\dot{v}_{\langle 3 \rangle}$  und  $\ddot{v}_{\langle 3 \rangle}$  im Luvmeridian in der Schalentaille aufgetragen. Die statische Lösung für die Radialverschiebung infolge Eigengewicht verläuft affin zur Belastungsfunktion. Die dynamischen Lösungen für  $v_{\langle 3 \rangle}$  schwingen sich zunächst um die statische Lösung von  $v_{\langle 3 \rangle} = 3,3$  cm ein. Durch den zusätzlichen Impuls im Zeitintervall  $0,80$  s  $< t < 1,30$  s wird dieser Zustand nun gestört. Der Struktur wird nochmals Schwingungsenergie zugeführt, wodurch sich eine maximale Verformung von  $v_{\langle 3 \rangle} = 8,0$  cm zur Zeit  $t = 1,15$  s einstellt (statische Lösung  $v_{\langle 3 \rangle} = 6,6$  cm bei  $t = 1,05$  s. Ab einer Zeit von  $t = 1,30$  s fallen die maximalen Schwingungsauslässe wieder ab, und die dynamische Lösung schwingt sich wieder um die statische Lösung ein. Es ergibt sich für die betrachtete Verformung  $v_{\langle 3 \rangle}$  im Luvmeridian in der Taille ein maximaler dynamischer Überhöhungsfaktor von 1,21. Die zusätzliche Anregung der Schale durch den Impuls im Zeitintervall  $0,80$  s  $< t < 1,30$  s findet in Phase mit der Bewegung statt, zum Zeitpunkt  $t = 0,68$  s beginnt eine neue Periode, und die Schale bewegt sich wieder nach innen (in negative Richtung ihres Direktors), wobei ihr bei dieser Bewegung nochmals Energie durch die äußere Einwirkung zugeführt wird. Führt man eine Zerlegung der Gesamtlösung in ihre einzelnen Fourieranteile korrespondierend zur Belastung durch, so lässt sich erkennen, dass sich die Lösung maßgeblich aus Anteilen der Umfangswellen 3 und 2 zusammensetzt, wobei die restlichen Fourierglieder vergleichsweise unbedeutende Beiträge liefern. An der Darstellung der Verformungen im Bild 6.7 kann die Zeitdifferenz zwischen zwei Maximalauslässe im ungestörten Bereich abgelesen werden, woraus sich eine Periode von  $T \approx 0,55$  s ergibt. Diese Schwingzeit liegt zwischen den ersten Eigenschwingzeiten für die Umfangswelle 2 und 3 nach Tabelle 6.1. Die

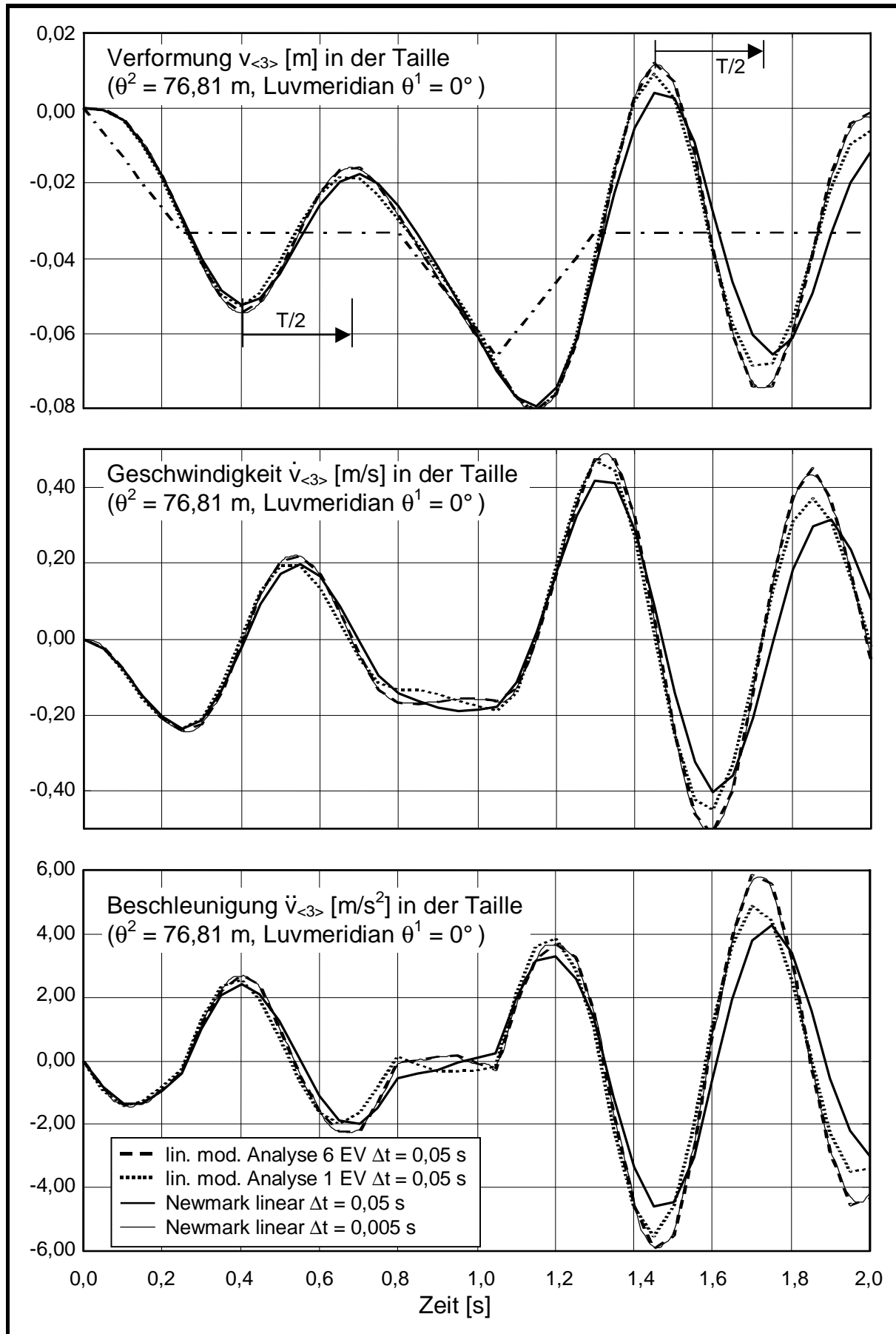
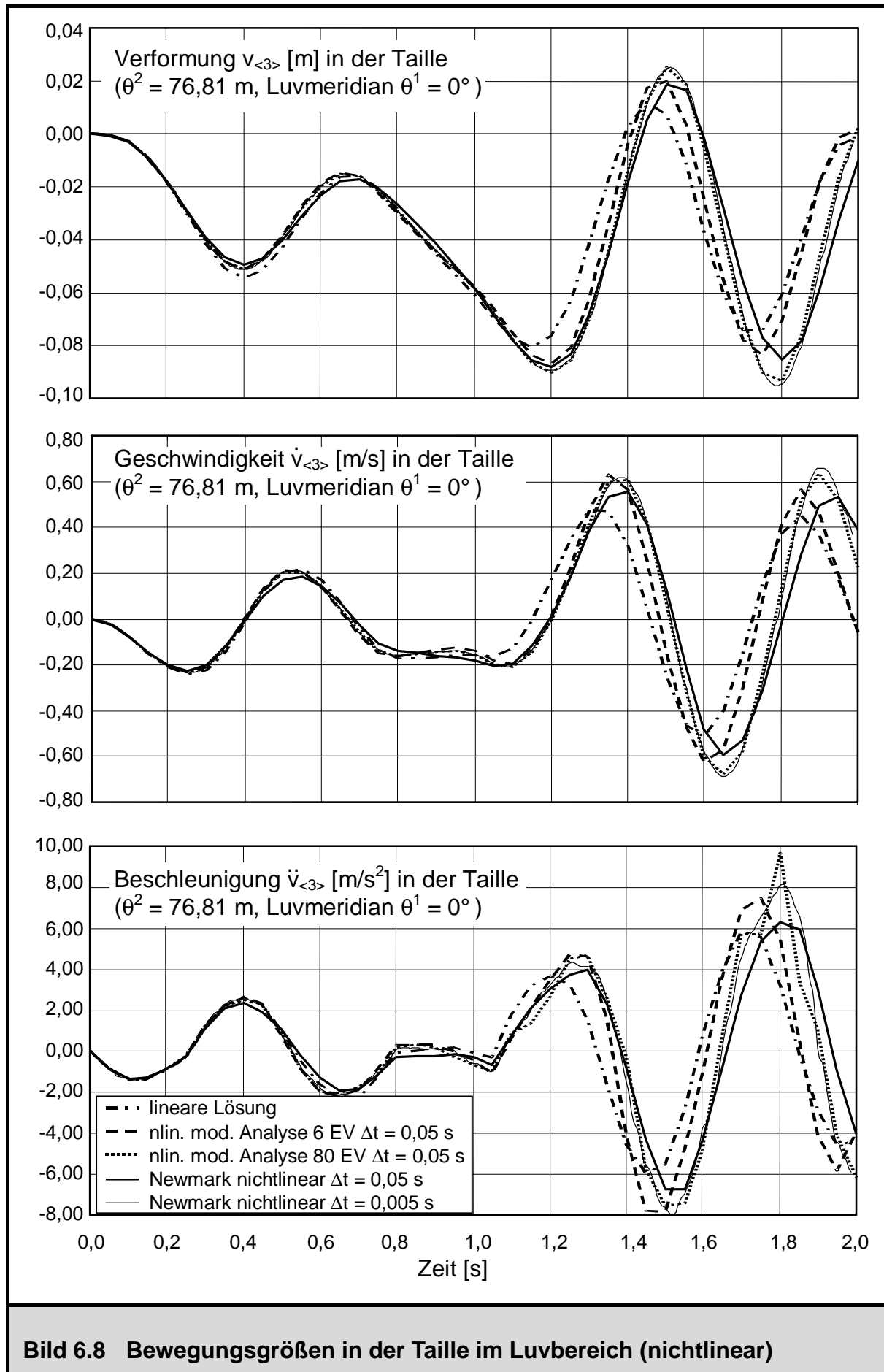


Bild 6.7 Bewegungsgrößen in der Taille im Luvbereich (linear)

Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufe sind im Einklang mit den Verformungen: An Zeitpunkten, an denen lokale Extremwerte in den Verformungen erreicht werden, besitzen die Geschwindigkeiten ihre Nulldurchgänge. An Zeitpunkten, an denen Wendepunkte in den Verformungen vorliegen, besitzen die Geschwindigkeitsverläufe lokale Extremwerte, die wiederum mit Nulldurchgängen in den Beschleunigungen zusammenfallen.

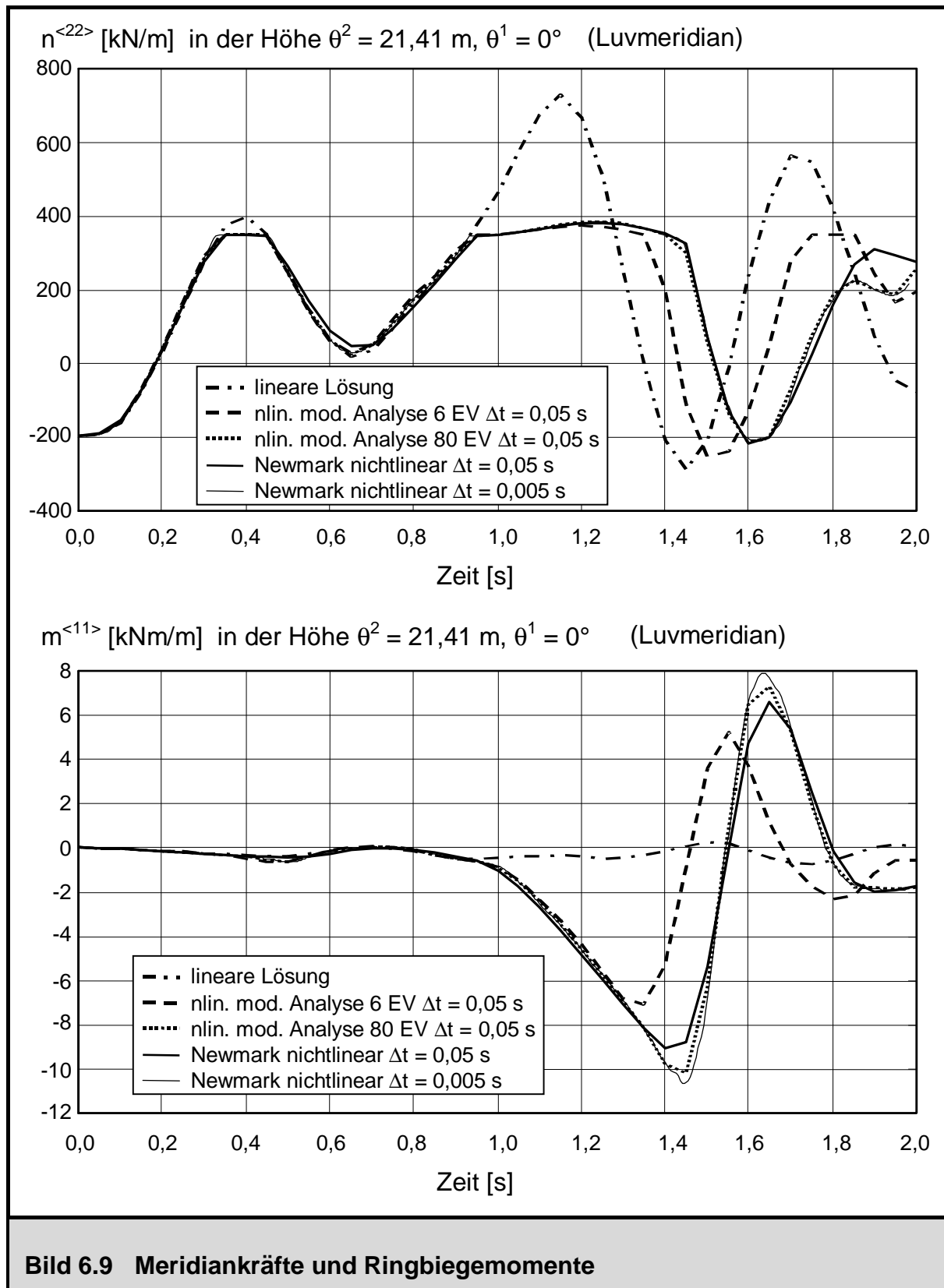
Aus Bild 6.7 wird weiterhin deutlich, dass die linearen Antworten nach der modalen Analyse mit 6 Eigenvektoren pro Umfangswelle bei einer Zeitschrittweite von  $\Delta t = 0,05$  s ausreichend genau berechnet werden können. Die erste Eigenform liefert einen wesentlichen Beitrag an der Gesamtlösung. Die Beiträge höherer Eigenformen sind in diesem Beispiel für den linearen Fall relativ unbedeutend, wie aus dem Vergleich der Lösungen nach den unterschiedlichen Verfahren ersichtlich ist. Diese Aussage kann natürlich nicht generalisiert werden, die Anzahl der anzusetzenden Eigenformen ist wesentlich vom System, der Belastung (räumliche Verteilung und Zeitverlauf bzw. Frequenzgehalt) und der untersuchten Antwortgröße (z.B. Verformungen oder Schnittgrößen) abhängig. Kriterien zur Wahl der Anzahl von Eigenformen sind in [78] zu finden.

Bei der Lösung mittels direkter Zeitintegration nach NEWMARK ist festzustellen, dass eine Integrationszeitschrittweite von  $\Delta t = 0,05$  s nicht ausreichend ist. Die Lösung wird zwar nicht instabil, da das Kriterium für unbedingte Stabilität nach Gleichung (6.9) erfüllt ist. Dennoch sind deutlich an den Verformungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufen eine Amplitudenabnahme sowie eine Periodenverlängerung zu erkennen, die charakteristisch für eine zu grobe Wahl des Integrationszeitschritts und der damit verbundenen starken numerischen Dämpfung niedriger Eigenformen sind [6], [63], [67]. Die Fehler pflanzen sich fort, und die so erzielten Ergebnisse entfernen sich mit größeren Zeiten von der eigentlichen Lösung, da die Bewegungsgrößen am Ende eines Integrationsintervalls als Startwerte für das folgende Intervall eingehen. Sogar die Lösung nach der modalen Analyse mit nur einem Eigenvektor liefert bessere Ergebnisse als die direkte Zeitintegration nach NEWMARK mit  $\Delta t = 0,05$  s. Bei einer feineren Wahl der Integrationszeitschrittweite mit  $\Delta t = 0,005$  s für die direkte Integration nach NEWMARK wird eine gute Übereinstimmung mit der Lösung nach der modalen Analyse unter Verwendung von 6 Eigenvektoren erreicht. Nach BATHE [6] ist die numerische Integration der Bewegungsgleichungen im Allgemeinen hinsichtlich der genannten Effekte der Periodenverlängerung und des Amplitudenabfalls durch numerische Dissipation ausreichend genau, wenn das Verhältnis  $\Delta t/T$  kleiner als 0,01 ist. Diese Aussage kann somit für die Wahl von  $\Delta t = 0,005$  s im Rahmen der direkten Zeitintegration bei einer maximalen Periodenlänge von  $T = 0,473$  s (Umfangswelle 2) bzw.  $T = 0,605$  s (Umfangswelle 3) bestätigt werden.





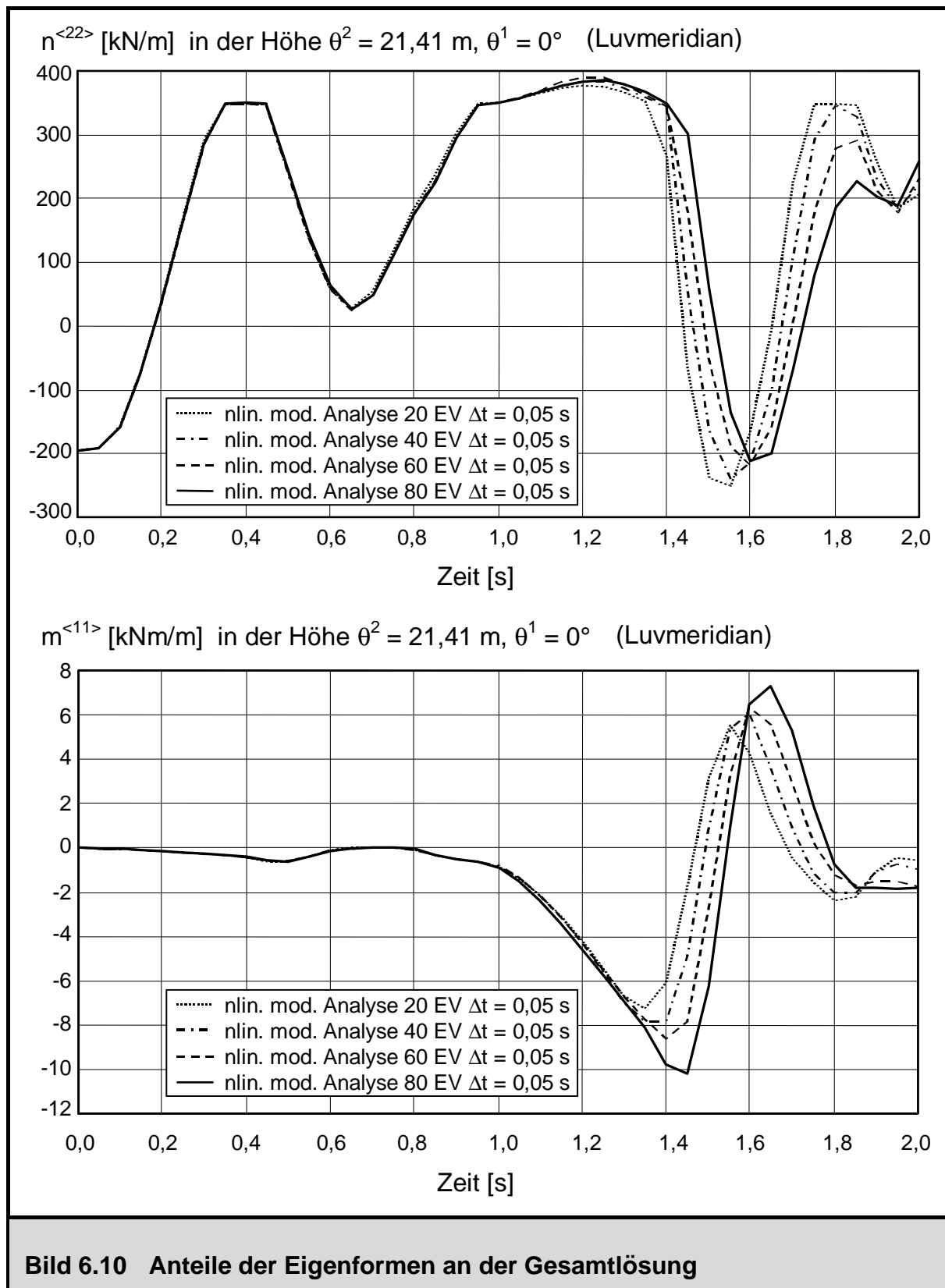
Korrespondierend zur linearen Systemantwort sind im Bild 6.8 die nichtlinearen Verläufe der Bewegungsgrößen im Luvmeridian in der Taille abgebildet; die Ursachen der auftretenden Nichtlinearitäten sind dabei im Wesentlichen im Aufreißen des Betons bei



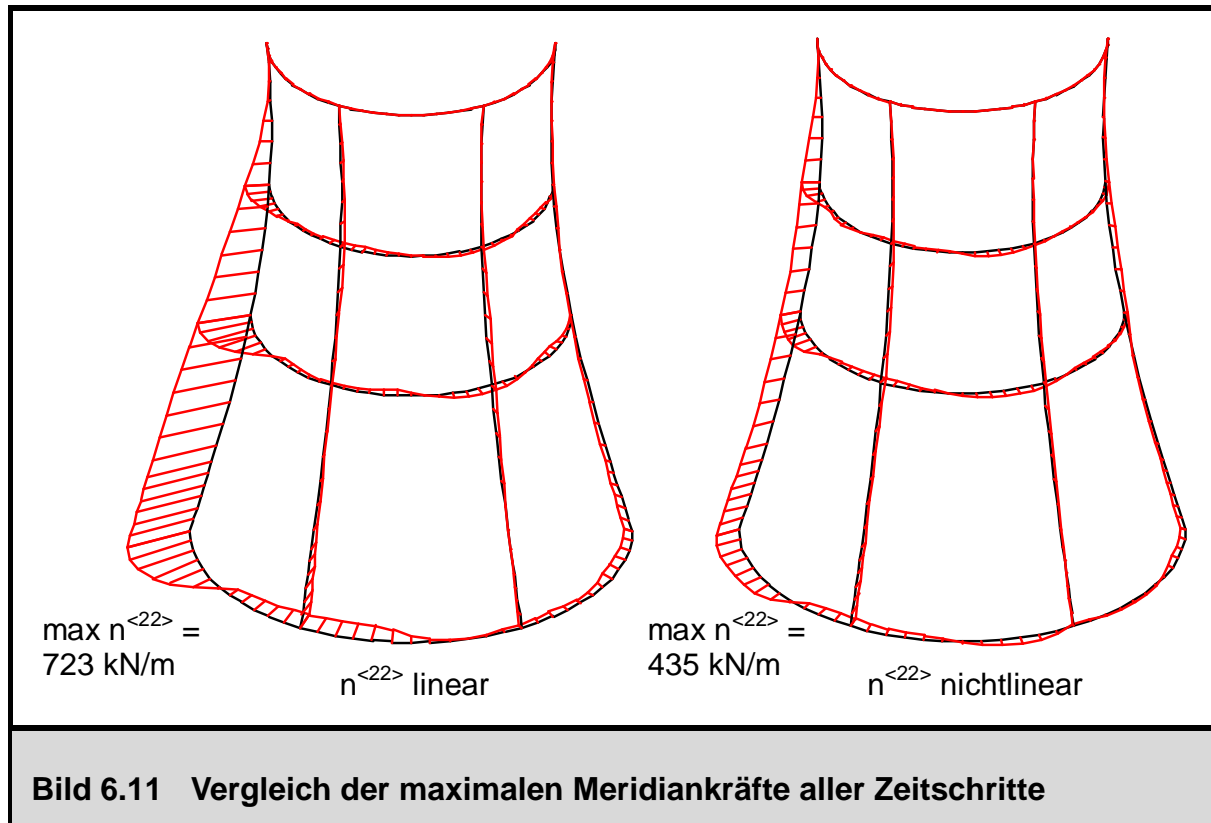
Überschreiten seiner Zugfestigkeit von  $f_{ct} = 2,5 \text{ MN/m}^2$  zu suchen. Deutliche Abweichungen von der linearen Lösung treten erst mit den Auswirkungen infolge der Windböe ab einer Zeit von  $t = 1,0 \text{ s}$  auf. Für die nichtlineare Lösung kann eine Zunahme der Verformungen von  $8,0 \text{ cm}$  ( $t = 1,15 \text{ s}$ ) auf  $8,9 \text{ cm}$  ( $t = 1,20 \text{ s}$ ) beim zweiten Maximalauschlag sowie von  $7,5 \text{ cm}$  ( $t = 1,73 \text{ s}$ ) auf  $9,5 \text{ cm}$  ( $t = 1,79 \text{ s}$ ) beim dritten Maximalauschlag und eine Verlängerung der Periodendauer aufgrund der Steifigkeitsabnahme beobachtet werden. Auch bei den nichtlinearen Antworten finden sich die für die lineare Lösung aus Bild 6.7 bereits erläuterten Zusammenhänge zwischen den Verformungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufen wieder. Durch das unsymmetrische Aufreißen der Schale, das auf den Luvbereich beschränkt bleibt, reichen nun im Gegensatz zum linearen Fall 6 Eigenvektoren zur Darstellung der nichtlinearen Lösung für die Weggrößenzustände nicht mehr aus, wie aus Bild 6.8 ersichtlich ist. In diesem Beispiel wird die Anzahl der Eigenvektoren auf 80 (entspricht 35% der Systemfreiheitsgrade) erhöht, womit bei einer Integrationszeitschrittweite von  $\Delta t = 0,05 \text{ s}$  gute Ergebnisse erzielt werden. Bei der direkten Zeitintegration treten auch im nichtlinearen Fall die bereits beschriebenen Phänomene des Amplitudenabfalls und der Periodenverlängerung auf, da die Zeitschrittweite mit  $\Delta t = 0,05 \text{ s}$  zu grob angesetzt worden ist. Durch eine Verkleinerung der Integrationszeitschrittweite auf  $\Delta t = 0,005 \text{ s}$  kann eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse nach der direkten Zeitintegration mit den Ergebnissen nach der modalen Analyse unter Verwendung von 80 Eigenvektoren erzielt werden.

Weiterhin sind im Bild 6.9 die Verläufe der Meridiankräfte  $n^{<22>}$  und der Ringbiegemomente  $m^{<11>}$  für die Schalenhöhe  $\theta^2 = 21,4 \text{ m}$  im Luvbereich  $\theta^1 = 0^\circ$  dargestellt. Deutliche Nichtlinearitäten treten ab einer Zeit von  $t = 0,95 \text{ s}$  auf, bei der die Rissnormalkraft von  $325 \text{ kN/m}$  überschritten wird. Gegenüber der linearen Lösung findet eine nicht unerhebliche Reduktion der Meridiankraft von  $724 \text{ kN/m}$  auf  $384 \text{ kN/m}$  statt. Damit verbunden ist das Entstehen von Ringbiegemomenten, wie ebenfalls im Bild 6.9 zu erkennen ist. Die Ringbiegemomente nach der linearen Lösung sind verschwindend gering, bei der nichtlinearen Lösung hingegen wird ein Extremwert von  $-10,7 \text{ kNm/m}$  erreicht. Auch für die dargestellten Schnittgrößen wird im Vergleich zur linearen Lösung die Bedeutung der Beiträge höherer Eigenformen in der nichtlinearen Lösung wiederum deutlich: Zwar wird mit einem Ansatz von 6 Eigenvektoren pro Umfangswelle der Trend der Lösung erfasst. Um allerdings eine ausreichend genaue Lösung zu erhalten, müssen mindestens 80 Eigenvektoren verwendet werden, wobei jedoch die grobe Integrationszeitschrittweite von  $\Delta t = 0,05 \text{ s}$  beibehalten werden kann. Zu den Ergebnissen nach der direkten Zeitintegration ist wiederum anzumerken, dass eine Zeitschrittweite von  $\Delta t = 0,05 \text{ s}$  nicht ausreichend ist. Bei deren Verkleinerung auf  $\Delta t = 0,005 \text{ s}$  kann eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen nach der nichtlinearen modalen Analyse unter Verwendung von 80 Eigenvektoren und  $\Delta t = 0,05 \text{ s}$  festgestellt werden.

Die Zusammensetzungen der Lösungen für die betrachteten Schnittgrößenverläufe nach der nichtlinearen modalen Analyse sind im Bild 6.10 abgebildet. Dabei ist eine variable Anzahl von 20, 40, 60 und 80 Eigenformen pro Umfangswelle angesetzt



**Bild 6.10** Anteile der Eigenformen an der Gesamtlösung



worden. Deutlich erkennt man, dass im Bereich bis  $\approx 1,0 \text{ s}$ , bis zu dem sich das Tragwerk nahezu linear verhält, die höheren Eigenformen überhaupt keine Rolle in den Gesamtlösungen spielen. Mit dem Beginn des Reißens laufen die Lösungen ab diesem Zeitpunkt nun auseinander. Zwischen den einzelnen Kurven sind deutliche Unterschiede festzustellen, auch leisten die Eigenvektoren 61 – 80 noch spürbare Beiträge an der Gesamtlösung. Im Vergleich mit der Lösung nach der direkten Zeitintegration mit der feinen Zeitschrittweite von  $\Delta t = 0,005 \text{ s}$  liegt für die Lösung mit 80 Eigenvektoren eine gute Übereinstimmung vor, höhere Eigenformen brauchen somit nicht angesetzt zu werden. Zum Abschluss sind im Bild 6.11 die maximal auftretenden Meridiankräfte  $n^{<22>}$  über alle Zeitschritte dargestellt. Wie im statischen Fall (Abschnitt 5.6.2) bereits gezeigt, reduzieren sich auch im dynamischen Fall durch das Aufreißen des Betons die maximalen Meridianzugkräfte im Luvmeridian  $\theta^1 = 0^\circ$ . Im Gegenzug dazu nehmen die Meridianzugkräfte in den äußeren Bereichen des Meridianzugbereichs gegenüber der linearen Lösung zu, so dass der Verlauf der nichtlinearen Verteilung von  $n^{<22>}$  im Luvbereich völliger wird.

Zum Abschluss dieses Anwendungsbeispiels soll nochmals erwähnt werden, dass für die Darstellung der Belastung wie auch der gesuchten Verformungszustände in Umfangsrichtung 14 Umfangswellen verwendet worden sind. Ferner sind die nichtlinearen Lösungen mit einem höheren Ansatz von 20 Umfangswellen für die Umfangsrichtung kontrolliert worden, wobei eine sehr gute Übereinstimmung beobachtet worden ist.

## 6.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel ist die Übertragung der direkten Zeitintegrationsverfahren am Beispiel des NEWMARK Verfahrens auf die nichtlineare Formulierung von Ringelementen aufgezeigt worden. Dabei hat sich herausgestellt, dass die Vernachlässigung der Nebendiagonalmatrizen in der tangentialen Steifigkeitsmatrix des Ringelements in dynamischen Berechnungen durch die Beiträge der Massenmatrix und der Dämpfungsmatrix zur effektiven Steifigkeitsmatrix eine untergeordnete Rolle spielt. Ferner ist das Lösungsverfahren der modalen Analyse, die ein klassisches Verfahren für lineare dynamische Problemstellungen ist, um die Berücksichtigung von Nichtlinearitäten in Verbindung mit Ringelementen erweitert worden. Mit dieser Vorgehensweise der Superposition von Eigenformen in linearisierten Schritten können nun die nichtlinearen Strukturantworten über eine begrenzte Anzahl von Eigenformen aus dem linearen Eigenschwingproblem dargestellt werden. Das Verfahren eignet sich besonders in Verbindung mit Ringelementen, da dabei die anschauliche Betrachtungsweise in Umfangswellen bzw. in Fouriergliedern für die Belastung wie auch für die Antwortgrößen beibehalten wird. Die wesentlichen Merkmale der modalen Analyse für nichtlineare Problemstellungen sind im Folgenden nochmals stichpunktartig zusammengetragen. Die gewünschten, zur Belastung korrespondierenden Eigenformen können aufgrund ihrer Sortierung nach Umfangswellen leicht selektiert werden.

- Zur Berechnung der nichtlinearen dynamischen Tragwerksantwort kann ebenfalls zur Beschreibung der unbekanntenen Weggrößenzustände eine Linearkombination aus den Eigenvektoren des linearen Eigenwertproblems herangezogen werden.
- Durch das Aufreißen des Stahlbetons und die damit verbundenen Nichtlinearitäten wächst die Anzahl der benötigten Eigenformen gegenüber der linearen Lösung deutlich an. In diesem Anwendungsbeispiel liefert ein Ansatz mit 80 Eigenformen pro Fourierglied, was ungefähr einem Drittel der Anzahl der Freiheitsgrade entspricht, ausreichend genaue Ergebnisse. Zur Beschreibung von konzentrierten lokalen nichtlinearen Effekten ist zu erwarten, dass noch weitere Eigenformen benötigt werden, was ebenfalls von BUCHER [17] beobachtet worden ist.
- Die Zeitschrittweite kann bei der Anwendung der nichtlinearen modalen Analyse im gezeigten Anwendungsbeispiel beibehalten werden, so dass sich kein erhöhter numerischer Aufwand durch eine Verringerung der Zeitschrittweite im Gegensatz zur direkten Zeitintegration ergibt. Für die gesamte Rechenzeit von höchster Bedeutung ist die Anzahl der Zeitpunkte, für die der Vektor der inneren Knotenkräfte und die tangentiale Steifigkeitsmatrix aufgebaut wird, da hierbei

aufwendige Werkstoffgesetze und Schichtenintegrationen ausgewertet werden müssen.

- Die Integration der modalen äquivalenten Einmassenschwingergleichungen erfolgt numerisch. Dabei werden Hilfsintegrationsschritte eingeführt, so dass in Abhängigkeit der aktuellen Periode eines äquivalenten Einmassenschwingers die zugehörige linearisierte Bewegungsgleichung mit einer darauf abgestimmten Anzahl von Hilfsschritten integriert wird. Die niedrigen Eigenformen benötigen daher pro Integrationsschritt (Inkrement oder Iteration) weniger Hilfsintegrationsschritte als die höheren Eigenformen. Somit ist gewährleistet, dass alle in der Gesamtlösung berücksichtigten Modalformen mit ihrer erforderlichen Genauigkeit integriert werden.
- Wie im linearen Fall gewährt die Zerlegung der dynamischen Antwort auch im nichtlinearen Fall einen sehr anschaulichen Einblick in das dynamische Verhalten der untersuchten Struktur. Es wird offensichtlich, welche Eigenformen aus welchen Umfangswellen wie stark an der Gesamtlösung partizipieren.

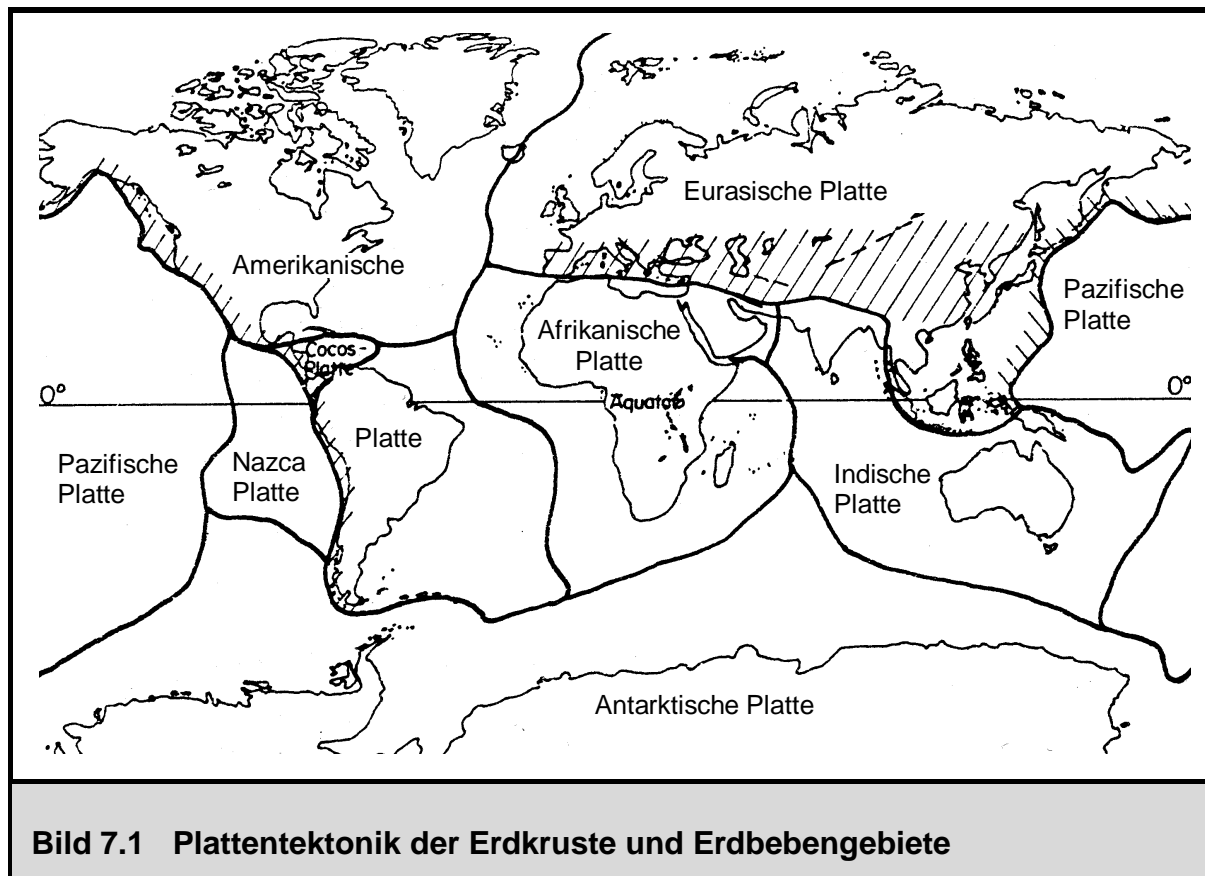
Somit bildet das modifizierte Verfahren der modalen Analyse für nichtlineare Problemstellungen eine sinnvolle Ergänzung zu vorhandenen Zeitintegrationsverfahren. Insbesondere für Problemstellungen, bei denen mäßige Nichtlinearitäten auftreten und sich die gesuchten Weggrößenzustände durch wenige Fourierglieder darstellen lassen (wie z.B. Erdbebeneinwirkungen), lässt sich die modale Analyse in Verbindung mit dem vorgestellten Ringelementkonzept vorteilhaft einsetzen.

# Kapitel 7

## Rotationsschalen unter Erdbebeneinwirkung

### 7.1 Vorbemerkungen und Zielsetzung

Nach der Erläuterung der numerischen direkten Zeitintegrationsverfahren und der Adaption des Verfahrens der modalen Superposition zur Lösung nichtlinearer dynamischer Problemstellungen, der Herleitung eines Konzepts zur Berücksichtigung geometrischer und physikalischer Nichtlinearitäten im Rahmen einer FE-Formulierung für Schalenringelemente sowie der Vorstellung der numerischen Modellierung des Verbundwerkstoffes Stahlbeton sollen die geschaffenen leistungsfähigen Algorithmen an zwei ausgesuchten Anwendungsbeispielen zur nichtlinearen Berechnung (insbesondere Nichtlinearitäten durch Systemwechsel wie Abheben von der Unterstützung sowie physikalische Nichtlinearitäten des Werkstoffes Stahlbeton) von Rotationsschalen unter Erdbebenbeanspruchung zum Einsatz kommen. Erdbebenbeanspruchungen auf ein Tragwerk sind zu den dynamischen Extrembeanspruchungen zu zählen. Die Ursache der Entstehung von tektonischen Erdbeben liegt im Plattenaufbau der Erdkruste begründet; bei den gegenseitigen Verschiebungen der einzelnen Erdplatten kommt es zu Verkantungen untereinander. Bei diesem Vorgang wird wie bei der Verformung einer Feder eine große Menge an Energie gespeichert. Ein plötzlicher Abbau dieser Verkantungen erfolgt unter Freisetzung dieser Energie als kinetische Energie, was als Erdbeben wahrgenommen wird. Die seismisch aktiven Zonen liegen somit an den Rändern dieser Platten. Bild 7.1 ist zu entnehmen, dass die gesamte Westküste des amerikanischen Kontinents, der Mittelmeerraum über Persien bis zum Himalaya sowie Japan und Neuseeland zu den am stärksten gefährdeten Erdbebenzonen der Erde gehören. Die seismologischen Grundlagen sollen im Folgenden jedoch nicht weiter von Interesse



**Bild 7.1 Plattentektonik der Erdkruste und Erdbebengebiete**

sein, diese können in [15], [16] nachgelesen werden. Vielmehr sind im Zusammenhang dieser Arbeit die Strukturantworten von rotationssymmetrischen Schalenstrukturen aus Stahlbeton verbunden mit Fragen der Dimensionierung von vorrangigem Interesse. Zum einen wird als Anwendungsbeispiel die Strukturantwort einer Kreiszyinderschale mit Bodenplatte auf elastischer Bettung unter horizontaler Erdbebenbeschleunigung untersucht, bei der die primären nichtlinearen Effekte durch ein Abheben der Fundamentplatte von der Unterkonstruktion auftreten, gegenüber denen allerdings das Reißen des Stahlbetons in den Hintergrund tritt. Zum anderen werden in einem zweiten Anwendungsbeispiel die Auswirkungen des nichtlinearen Verhaltens eines Naturzugkühlturms mit einer Höhe von nahezu 200 m unter horizontaler Erdbebenbeschleunigung geklärt. Aus dieser Studie sollen Erkenntnisse bezüglich des nichtlinearen Tragverhaltens unter dynamischen Erdbebenbeschleunigungen gewonnen werden und die Auswirkungen der nichtlinearen Effekte wie das Aufreißen der Schale, das Abheben des Fundaments in der Bodenfuge und das Stützenaufreißen im Vergleich zur konventionellen linearen Betrachtungsweise auf den Beanspruchungszustand und im Hinblick auf die Dimensionierung des Tragwerks aufgezeigt werden. Insbesondere werden bei den Anwendungsbeispielen dieses Kapitels baupraktisch relevante Fragestellungen erörtert wie das Aufdecken von Systemreserven, Umlagerungen, Reduktion der linear ermittelten Beanspruchungen, Konsequenzen für die Dimensionierung etc. infolge nichtlinearer Effekte.



## 7.2 Behälter auf elastischer Bettung

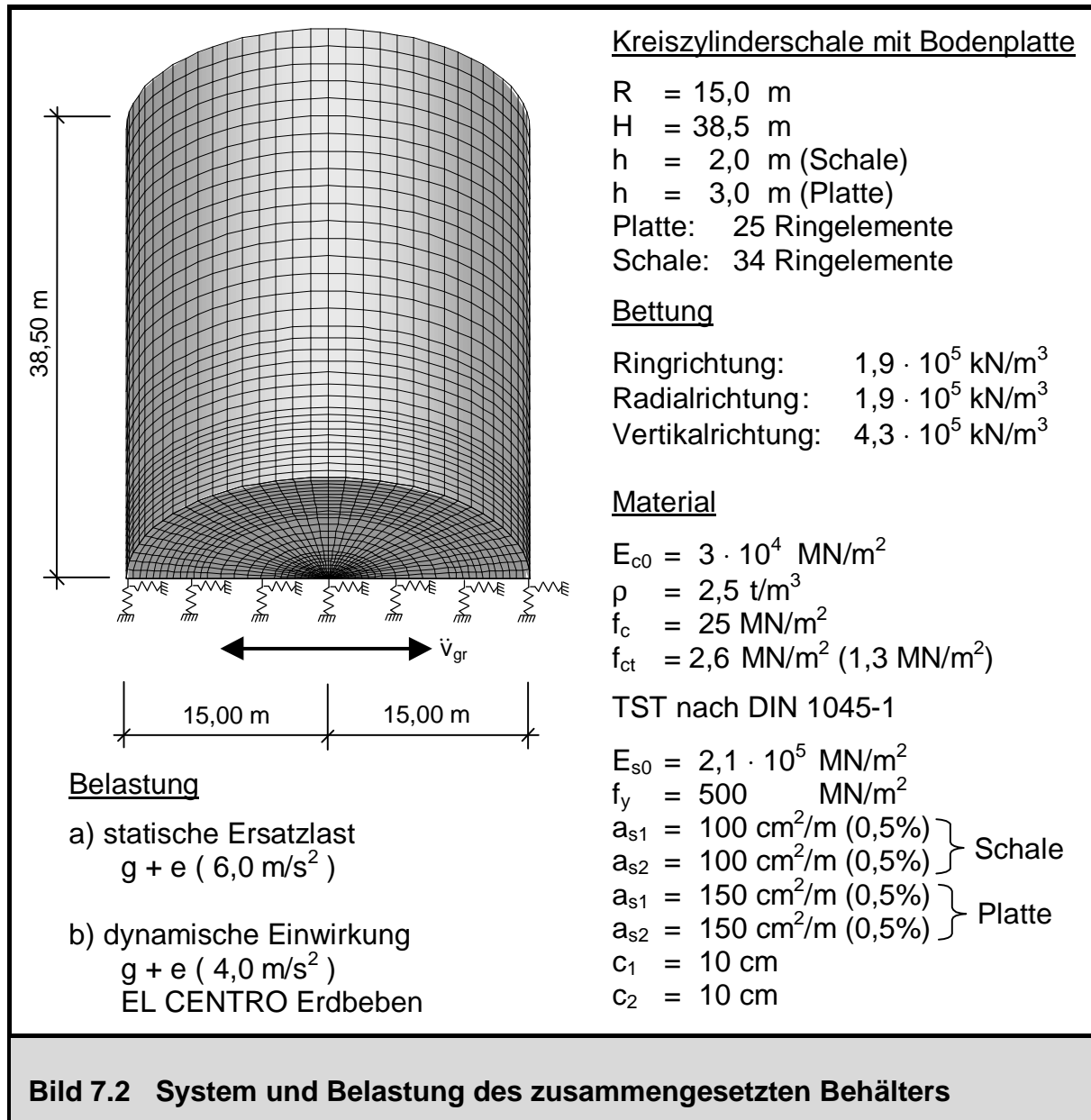
### 7.2.1 System, Belastung und Fragestellung

Im Bild 7.2 ist das System der zu untersuchenden Kreiszyinderschale mit Bodenplatte auf elastischer Bettung nach [59], [127] mit dem im Rahmen dieser Arbeit verwendeten numerischen Rechenmodell, Werkstoffeigenschaften und Belastung abgebildet. Das dargestellte Rechenmodell soll als Vereinfachung des Systems für die innere Stahlbetonhülle eines Druckwasserreaktors dienen, dessen Skizze schematisch im Bild 7.3 dargestellt ist. Zur Modellierung der Kreisplatte werden 25 Schalenringelemente verwendet, für die zur Simulation der nachgiebigen Unterstützung eine unterschiedliche elastische Bettung normal und tangential zur Plattenmittelfläche angesetzt wird; die Kreiszyinderschale wird mit 34 Schalenringelementen ohne Flächenbettung abgebildet. Der Übergang zwischen den beiden Teilstrukturen wird durch eine Kopplung der physikalischen Freiheitsgrade der beiden Meridianknoten mit gleichen Koordinaten modelliert. Zusätzlich zum Eigengewicht der Struktur wirkt eine horizontale Bodenbeschleunigung der Größe  $\ddot{v}_{gr}$ . Diese ist gemäß den Angaben aus [127] als statische Ersatzbeschleunigung mit  $6,0 \text{ m/s}^2$  vorgegeben; für dynamische Betrachtungen ist als Beschleunigungsverlauf die NS-Komponente des EL CENTRO Erdbebens (Bild B3) mit einem Maximalwert von  $\ddot{v}_{gr} = 4,0 \text{ m/s}^2$  angesetzt worden. Diese Einwirkungen führen zu den Komponenten des Vektors der Körperkräfte im lokalen Koordinatensystem für die Kreiszyinderschale nach Gleichung (7.1), wobei  $f(t)$  den Zeitverlauf des normierten Erdbebens wiedergibt.

$$\begin{bmatrix} p^{<1>} \\ p^{<2>} \\ p^{<3>} \end{bmatrix} = \rho \cdot h \cdot \begin{bmatrix} \ddot{v}_{gr} \cdot \sin(\theta^1) \cdot f(t) \\ -g \\ -\ddot{v}_{gr} \cdot \cos(\theta^1) \cdot f(t) \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Wie im Bild 7.3 dargestellt, kann die horizontale seismische Erregung bei entsprechender Größe zu einem Abheben der Fundamentplatte von der Unterstützung führen, falls keine Verankerung vorgesehen ist. Somit stellt sich beim Abheben ein Systemwechsel mit Auswirkungen auf die Verteilung der inneren Systembeanspruchung ein. Den folgenden Problemstellungen soll daher bei den Untersuchungen besondere Beachtung geschenkt werden:

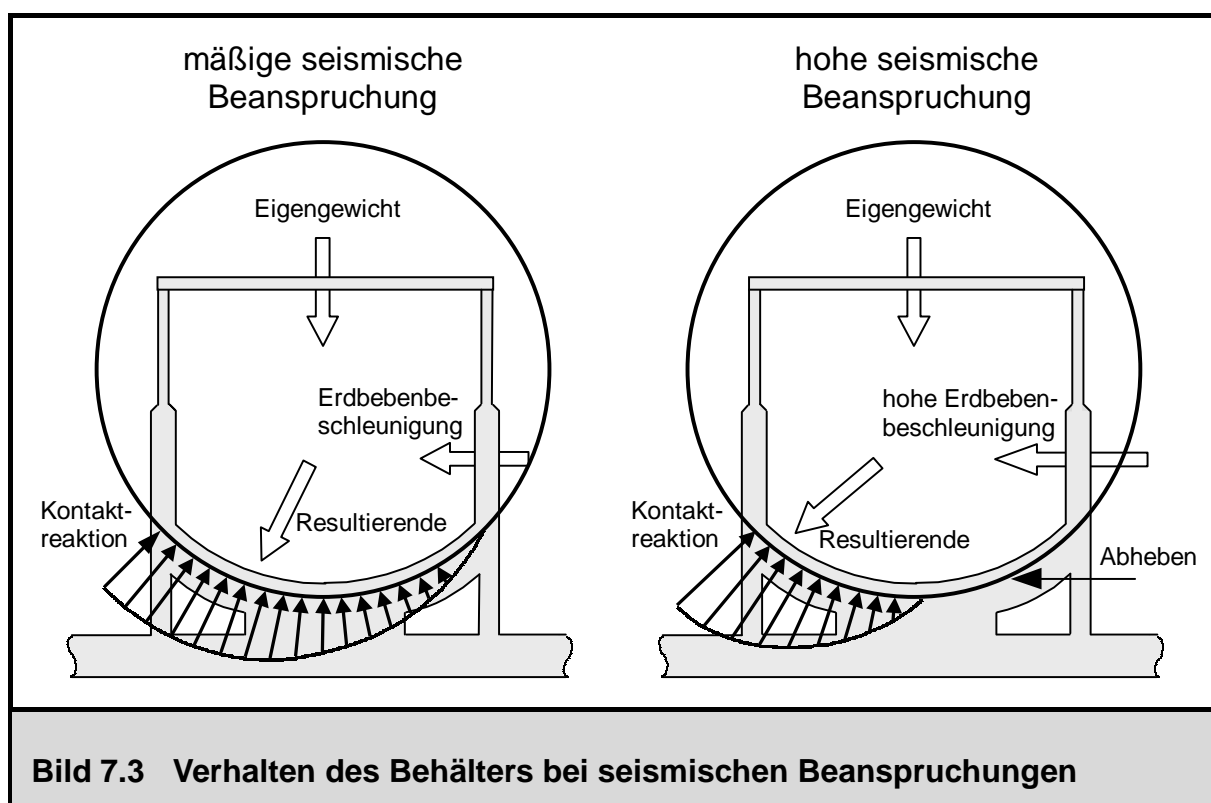
- Verhalten des zusammengesetzten Behälters bei unterschiedlich starken Erdbebenintensitäten sowie Zeitpunkt des Abhebens



- Größe der Kontaktspannungen und Entwicklung der abhebenden Bereiche
- Einfluss des Abhebens auf den inneren Beanspruchungszustand
- Einfluss der physikalischen Nichtlinearität (insbesondere das Aufreißen des Stahlbetons) auf den inneren Beanspruchungszustand

Die genannten Fragestellungen sollten bereits vor einiger Zeit im Rahmen eines von der ehemaligen SIEMENS-Tochtergesellschaft KWU (jetzt FRAMATOME ANP) in Auftrag gegebenen Gutachtens geklärt werden. Einige Ergebnisse der damals durchgeführten Untersuchungen sind daher bereits in einem Gutachten [127] dargelegt und in [59] zumindest teilweise zusammengefasst und veröffentlicht worden. Doch sind in diesem damaligen Rahmen nahezu ausschließlich statische und lediglich sehr ver-

einfache dynamische Betrachtungen enthalten, die allesamt noch mit dem Verfahren der dynamischen Relaxation durchgeführt worden sind, die den wissenschaftlichen Entwicklungsstand der 70er Jahre darstellt [96], [97]. Zum anderen fehlte es natürlich an der entsprechenden Computerhardware zur wirtschaftlichen Durchführung umfangreicher nichtlinearer dynamischer Berechnungen. Erst mit den im Rahmen dieser Arbeit geschaffenen numerischen Werkzeugen auf der Basis der FE-Methode mit Schalenringelementen in Kombination mit der verfügbaren Computerhardware ist es möglich, ergänzende Studien zum physikalisch nichtlinearen dynamischen Verhalten dieser Struktur in einem wirtschaftlich vertretbaren Rahmen anzustellen und die Ergebnisse qualitativ und quantitativ durch entsprechende Vergleichsrechnungen auch abzusichern. Dabei sollen zum einen die Ergebnisse aus Berechnungen mit statischen Ersatzlasten aus [59], [127] nachvollzogen, zum anderen aber auch weiterführende Erkenntnisse hinsichtlich des Verhaltens der Struktur unter dynamischen Horizontalbeschleunigungen gewonnen werden.



### 7.2.2 Ergebnisse der statischen Untersuchungen

Zunächst sollen die Ergebnisse der statischen Untersuchungen erläutert werden, wobei die statische Ersatzhorizontalbeschleunigung gemäß den Vorgaben nach [127] mit  $6,0 \text{ m/s}^2$  angesetzt worden ist; als Lastkombination wirkt das Eigengewicht zusammen

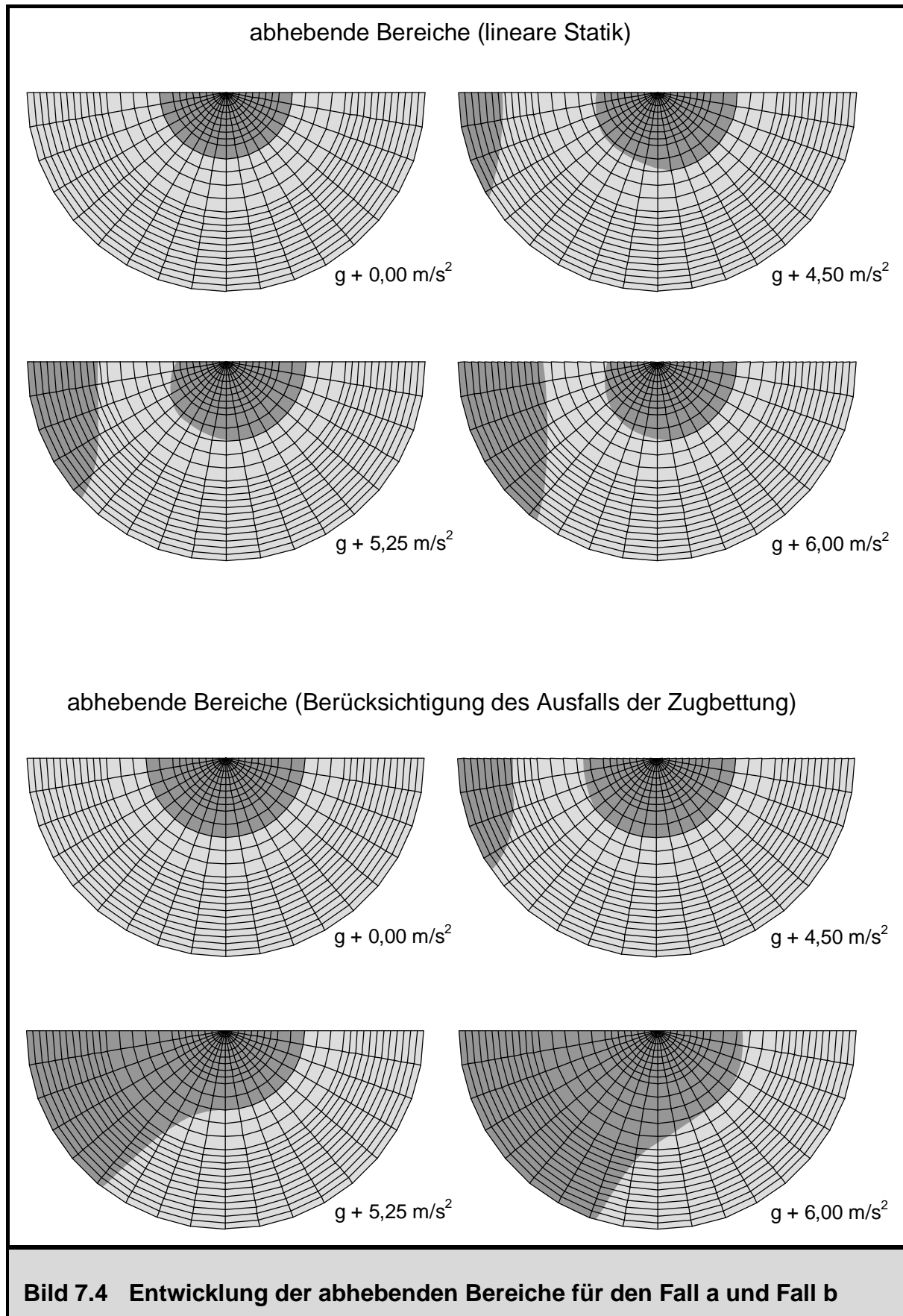
mit der statischen Ersatzhorizontalbeschleunigung. Folgende Betrachtungen sind dabei durchgeführt worden:

- a) Lineare statische Berechnung (kein Abheben, linear elastisches Materialverhalten)
- b) Nichtlineare statische Berechnung mit Berücksichtigung des Abhebens, jedoch mit Annahme von linearem Materialverhalten
- c) Nichtlineare statische Berechnung mit Abheben und nichtlinearem Materialverhalten, Zugfestigkeit  $f_{ct} = 2,60 \text{ MN/m}^2$
- d) Nichtlineare statische Berechnung mit Abheben und nichtlinearem Materialverhalten, reduzierte Zugfestigkeit  $f_{ct,red} = 1,30 \text{ MN/m}^2$

### 7.2.2.1 Entwicklung der abhebenden Bereiche und Bodenpressungen

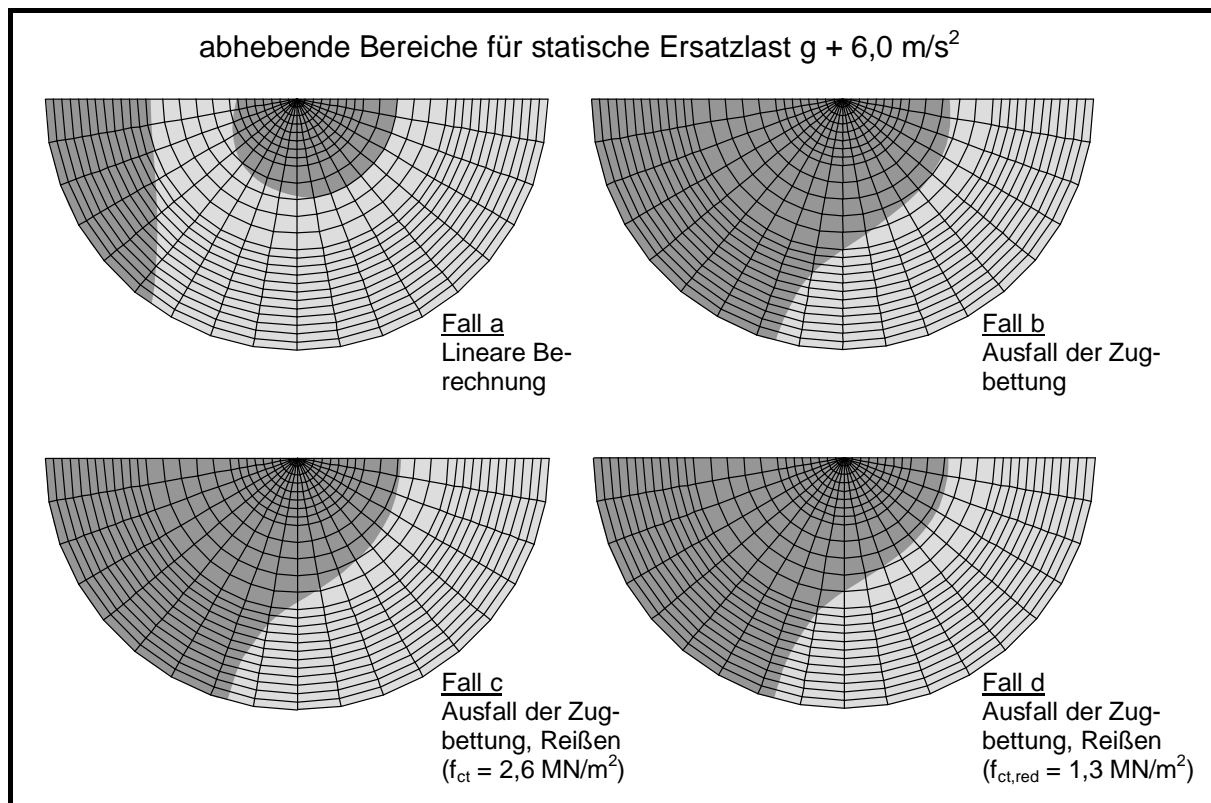
Im Bild 7.4 ist die Entwicklung der abhebenden Bereiche für die lineare statische Berechnung (Fall a) im Verlauf der Laststeigerung von  $0 \text{ m/s}^2$  bis  $6 \text{ m/s}^2$  dargestellt, wobei Zugbettungen in der Kontaktfuge aufgrund der Linearität wirken können. Allein unter dem Lastfall Eigengewicht tritt in Plattenmitte ein großer rotationssymmetrischer abhebender Bereich mit einem Durchmesser von ca. 10 m auf. Wäre die Unterstützung unendlich steif und würde sich somit der gesamte Behälter gleichmäßig setzen, würden sich unter Eigengewicht keine abhebenden Bereiche einstellen. Durch die hohe Linienlast auf dem Außenrand der Kreisplatte, die durch das Eigengewicht der aufgehenden Wände der Kreiszylinderschale hervorgerufen wird, kommt es im Plattenaußenbereich zu höheren Setzungen. Der vertikale Bettungsmodul ist in diesem Anwendungsbeispiel so gering, dass die äußeren Bereiche unter den Wänden sich stark setzen und der Innenbereich abhebt. Die zugehörige maximale Pressung unter den Wänden infolge Eigengewicht beträgt  $0,88 \text{ MN/m}^2$  (zum Vergleich  $0,33 \text{ MN/m}^2$  bei gleichmäßiger Setzung). Zu einem ersten Auftreten von Zugspannungen in der Kontaktfuge am Rand der Kreisplatte kommt es bei einer statischen Horizontalbeschleunigung von  $3,8 \text{ m/s}^2$ . Im Verlauf der Laststeigerung ist nun deutlich die Vergrößerung des abhebenden Randbereichs bis zu einem Umfangswinkel von  $\theta^1 = 50^\circ$  mit einer maximalen Kontaktpressung von  $2,25 \text{ MN/m}^2$  bei einer Horizontalbeschleunigung von  $6,0 \text{ m/s}^2$  zu erkennen, wobei sich auch der innere, ursprünglich rotationssymmetrische abhebende Bereich infolge Eigengewicht in seiner Gestalt geringfügig verändert.

Bei einer Berücksichtigung des Ausfalls der Zugbettung in den abhebenden Bereichen (Fall b), deren Entwicklung im Verlauf der Steigerung der statischen Ersatzhorizontal-



beschleunigung ebenfalls im Bild 7.4 dargestellt ist, fällt zunächst auf, dass der rotationssymmetrische abhebende Bereich in der Plattenmitte sich geringfügig vergrößert. Bei einer Steigerung der Ersatzhorizontalbeschleunigung von  $0,0 \text{ m/s}^2$  auf  $6,0 \text{ m/s}^2$  ist im Gegensatz zur linearen Berechnung (Fall a) weiterhin ersichtlich, dass sich nun der abhebende Bereich bis zu einem Umfangswinkel von  $\theta^1 = 70^\circ$  ausbreitet. Der abhebende Bereich erstreckt sich jetzt in der Symmetrieachse ohne Unterbrechung vom Plattenrand bis über die Plattenmitte hinaus. Die maximale Kontaktpressung in der Bettungsfuge vergrößert sich auf  $2,50 \text{ MN/m}^2$ .

Der Vollständigkeit halber sind im Bild 7.5 noch die abhebenden Bereiche der nichtlinearen Berechnungen mit Berücksichtigung des Ausfalls der Zugbettung und zusätzlicher Berücksichtigung der materiellen Nichtlinearität dargestellt (Fälle c und d). Es können hierbei jedoch für die abhebenden Bereiche und die maximalen Kontaktpressungen kaum Unterschiede im Vergleich zum Fall b (Berücksichtigung des Ausfalls der Zugbettung, jedoch materielle Linearität) festgestellt werden. Somit werden die abhebenden Bereiche und die maximalen Kontaktpressungen mit den Annahmen nach Fall b ausreichend genau bestimmt; eine Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität des Werkstoffs Stahlbeton ist hierzu nicht erforderlich.



**Bild 7.5** Vergleich der abhebenden Bereiche für die Fälle a – d

### 7.2.2.2 Auswirkung der Nichtlinearitäten auf Schnittgrößen sowie Aspekte zur Dimensionierung

In diesem Abschnitt sollen für die Berechnungen unter der statischen Lastkombination  $g + e$  mit einer Ersatzhorizontalbeschleunigung von  $6,0 \text{ m/s}^2$  die Beanspruchungen insbesondere in der Kreisplatte angegeben werden. Aus den verschiedenen nichtlinearen Einflüssen der Fälle b – d ergeben sich im Vergleich zur linearen Lösung (Fall a) Umverteilungen, die im Folgenden diskutiert und bewertet werden. Tabelle 7.1 enthält hierzu eine Zusammenstellung der wesentlichen Ergebnisse.

	max $v_{<3>}$ am Kopf	min $m^{<22>}$ Platte	min $m^{<11>}$ Platte	erf $a_{s2}$ Platte	erf $a_{s1}$ Platte	erf $a_{s2}$ Schale	erf $a_{s1}$ Schale
Fall a	1,2 cm	-6762	-4201	0,36 %	0,24 %	0,32 %	0,31 %
Fall b	1,7 cm	-7189	-4489	0,32 %	0,20 %	0,28 %	0,31 %
Fall c	1,7 cm	-6946	-4548	0,31 %	0,20 %	0,28 %	0,31 %
Fall d	1,7 cm	-5565	-4460	0,22 %	0,24 %	0,26 %	0,33 %

**Tabelle 7.1 Ergebnisse für statische Ersatzbelastung  $g + e$  ( $6,0 \text{ m/s}^2$ )**

Unter der statischen Ersatzhorizontalbeschleunigung stellt sich bei linearen Verhältnissen im Fall a zunächst eine radiale Kopfverformung von  $v_{<3>} = 1,2 \text{ cm}$  ein. Durch das Abheben vergrößert sich diese um ca. 42% auf 1,7 cm, wobei die materielle Nichtlinearität (Reißen des Stahlbetons) eine untergeordnete Rolle spielt. In der Kreiszylinderschale treten infolge dieser Belastung im Wesentlichen Membranschnittgrößen auf, abgesehen von den Biegemomenten infolge einer Randstörung an der Einspannstelle in die Kreisplatte, so dass im Folgenden die Biegemomente in der Kreisplatte von primärem Interesse sein sollen.

Für den linear elastischen Fall a stellen sich unter der gegebenen Belastung in der Kreisplatte ein vom Betrage maximales Ringbiegemoment von  $m^{<11>} = -4201 \text{ kNm/m}$  und ein maximales Radialbiegemoment von  $m^{<22>} = -6762 \text{ kNm/m}$  ein. Eine Stahlbetonbemessung für diesen Lastfall liefert die in Tabelle 7.1 angegebenen erforderlichen prozentualen Bewehrungsquerschnitte, die die vorhandenen Bewehrungsquerschnitte von 0,5% jedoch unterschreiten. Diese Bemessung erfolgt hier nicht iterativ im Rahmen einer Dimensionierungsstrategie; es soll lediglich ein Trend bzw. ein Maß für die nichtlinearen Effekte, ausgedrückt in der Veränderung der skalaren Größe der prozentualen Bewehrungsmengen, aufgezeigt werden. Die maßgebenden Bemessungstellen liegen allerdings nicht im Meridian der maximalen Plattenbiegemomente  $m^{<11>}$  und  $m^{<22>}$  (Symmetrieachse:  $\theta^1 = 0^\circ$  bzw.  $\theta^1 = 180^\circ$ ). Für die Bemessung werden vielmehr Schubkräfte und Drillmomente maßgebend, die hierbei ungünstig mit ihrem

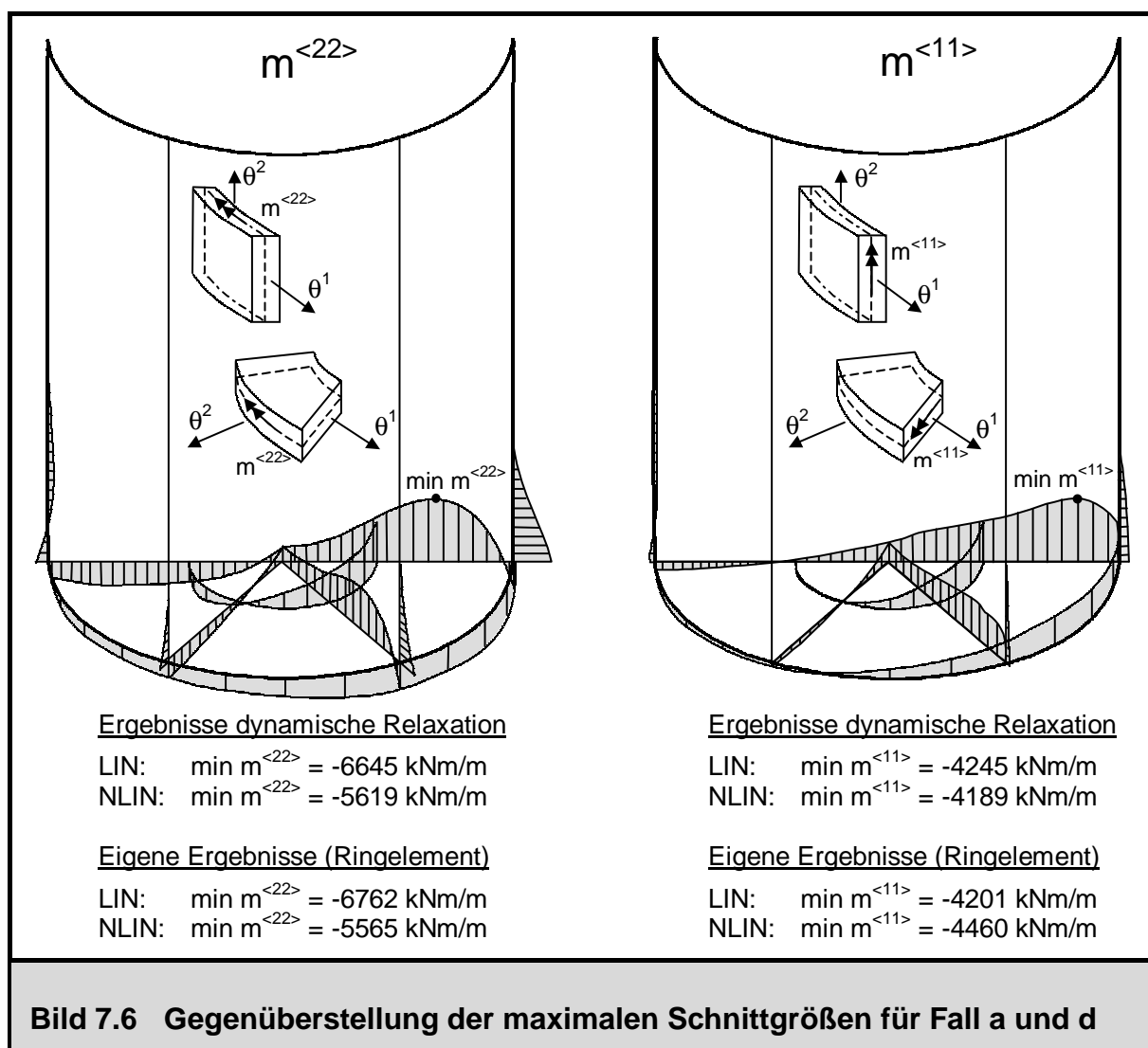
Beträge zu den Kräften und Biegemomenten in Radial- bzw. Ringrichtung hinzuaddiert werden. Bei der Bemessung für diese statische Ersatzlastkombination ist im Übrigen mit einem Teilsicherheitsbeiwert für Stahl von  $\gamma_s = 1,00$  gerechnet worden, da eine Erdbebeneinwirkung ähnlich wie eine außergewöhnliche Beanspruchung einzustufen ist.

Bei einer Berücksichtigung des Abhebens und des Ausfalls der Zugbettung als einzige Nichtlinearität (Fall b) ist eine Erhöhung der maximalen Momente um ca. 7% auf  $m^{<11>} = -4489$  kNm/m und  $m^{<22>} = -7189$  kNm/m festzustellen. Dies geschieht dadurch, dass der Behälter zum einen auf einer Plattenhälfte komplett den Kontakt zur Unterstützung verliert (siehe Bild 7.4) und zum anderen die Pressungen auf der anderen Plattenhälfte sich vergrößern. Dem durch die Horizontalbeschleunigungen verursachten Kippmoment des Behälters steht jetzt nach dem Ausfall der Kontaktzugspannungen lediglich eine exzentrisch, auf die verbleibende Kontaktfläche konzentriert wirkende resultierende Druckkraft entgegen. Diese konzentrierte Druckkraft ist Ursache für die Erhöhung der maximalen Biegebeanspruchung in der Platte. Trotzdem reduzieren sich die erforderlichen Bewehrungsquerschnitte geringfügig, die sich aus der zugehörigen Bemessung ergeben, da die hierfür genannten maßgebenden Bereiche (Schubkräfte und Drillmomente) entlastet werden.

Wird nun die physikalische Nichtlinearität des Werkstoffs Stahlbeton im Fall c, insbesondere dessen Reißen bei einer Zugfestigkeit von  $f_{ct} = 2,60$  MN/m<sup>2</sup>, mit berücksichtigt, so muss festgestellt werden, dass sich die Ergebnisse gegenüber dem Fall b nicht bedeutend ändern, da es nur in Radialrichtung in einem sehr kleinen, unbedeutenden Bereich zu einem Aufreißen kommt, so dass dies keine Folgen nach sich zieht. Die vom Betrage her maximalen Plattenbiegemomente ergeben sich zu  $m^{<11>} = -4548$  kNm/m und  $m^{<22>} = -6946$  kNm/m. Um den Trend der nichtlinearen Lösung für die maximalen Plattenbeanspruchungen bei einem Aufreißen des Stahlbetons zu untersuchen, wird im Fall d wie auch in [127] eine Vergleichsrechnung mit einer auf die Hälfte herabgesetzten Zugfestigkeit ( $f_{ct,red} = 1,30$  MN/m<sup>2</sup>) durchgeführt. Bei der Berücksichtigung aller nichtlinearen Effekte im Fall d (Ausfall der Bettung bei Abheben und Aufreißen des Betons bei Überschreiten seiner Zugfestigkeit  $f_{ct,red}$ ) kann eine deutliche Abnahme des maximalen Plattenradialbiegemoments von  $m^{<22>} = -6762$  kNm/m (linearer Fall a) auf  $m^{<22>} = -5565$  kNm/m (Fall d) festgestellt werden (Stelle  $R = 9,50$  m in der Symmetrieachse); für das maximale Plattenringbiegemoment fällt eine sehr geringe, vernachlässigbar kleine Erhöhung von  $m^{<11>} = -4201$  kNm/m auf  $m^{<11>} = -4460$  kNm/m auf. Die Auswirkungen auf die erforderlichen Bewehrungsmengen sind in Tabelle 7.1 dargestellt. Die wesentlichen Änderungen treten in der Kreisplatte auf, die aufgehende Kreiszylinderschale bleibt mit ihrem Membrantragverhalten nahezu unbeeinflusst. Das physikalisch nichtlineare Verhalten des Betons im Druckbereich ist in keinem Fall relevant, die Stauchungen liegen allesamt unterhalb 1,00 ‰ .



Abschließend sind im Bild 7.6 nochmals die Verläufe der Meridian- bzw. Radialbiegemomente  $m^{<22>}$  sowie der Ringbiegemomente  $m^{<11>}$  unter der statischen Belastung Eigengewicht und Ersatzhorizontalbeschleunigung  $6,0 \text{ m/s}^2$  für den nichtlinearen Fall d mit zusätzlicher Angabe der linearen Ergebnisse grafisch dargestellt. Außerdem werden die eigenen Ergebnisse mit den Werten aus [59] verglichen. Dabei sind die qualitativ und quantitativ sehr guten Übereinstimmungen des Verlaufs und der Extremwerte der Ergebnisse bemerkenswert, da diese doch mit prinzipiell verschiedenen Rechenverfahren (eigene Ergebnisse: FE-Methode mit den im Kapitel 5 hergeleiteten Ringelementen; Ergebnisse nach [59], [127]: Dynamische Relaxation → Differenzenverfahren) erzielt worden sind.



### 7.2.3 Ergebnisse der dynamischen Untersuchungen

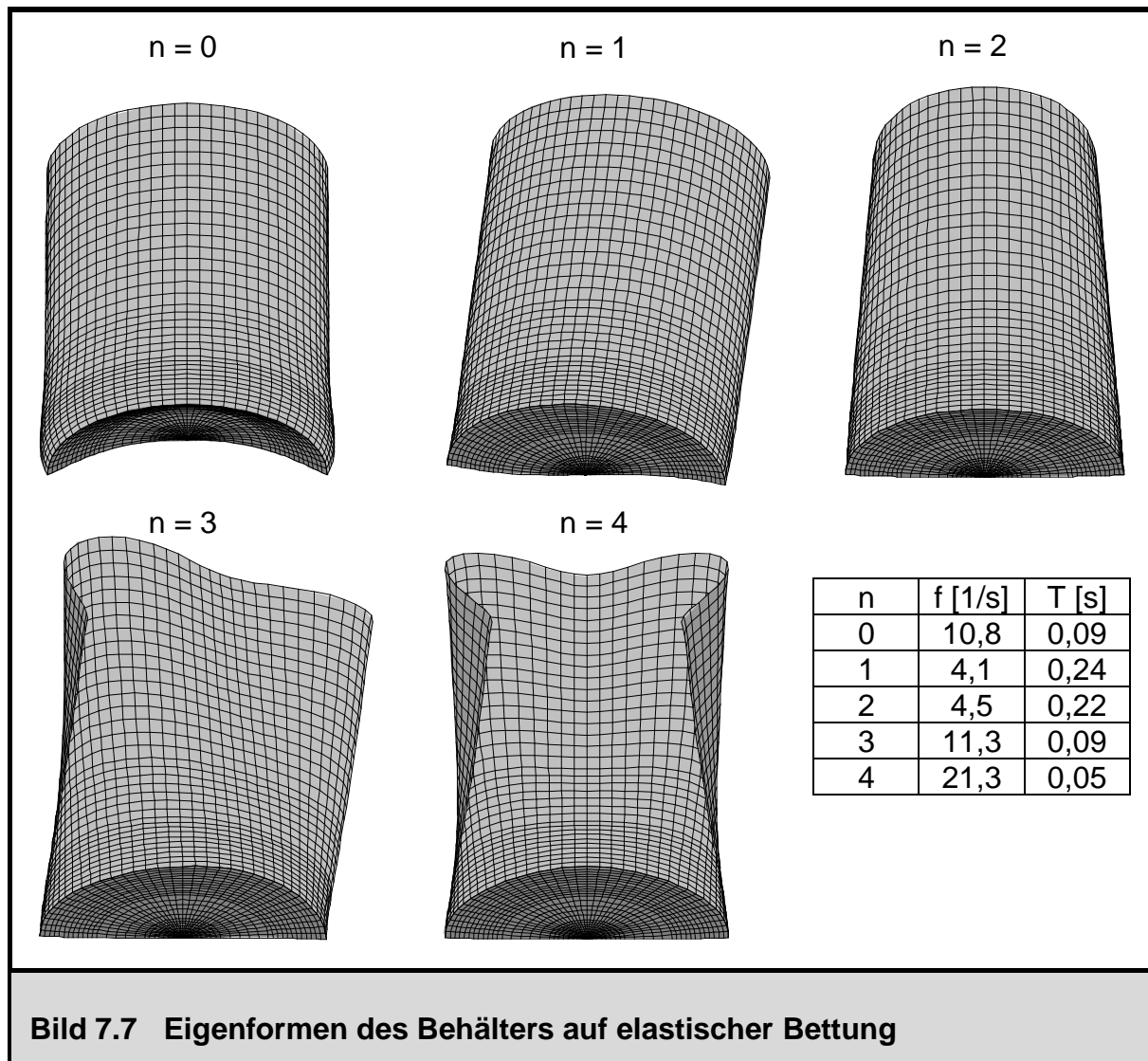
Bis jetzt ist für die Ermittlung der Tragwerksbeanspruchungen infolge horizontaler Erdbodenbeschleunigung ausschließlich das Verfahren mit statischen Ersatzlasten heran-

gezogen worden. Um das Tragwerksverhalten unter einer dynamisch wirkenden horizontalen Erdbebenbeanspruchung zu klären und eventuell auftretende nichtlineare dynamische Effekte qualitativ aufzuzeigen und auch zu quantifizieren, soll in diesem Abschnitt eine dynamische horizontale Erdbebeneinwirkung nach der NS Komponente des EL CENTRO Erdbebens, die vielfach in der Literatur als Referenzerdbebenbeschleunigungsverlauf zum Einsatz kommt [24], [57], [60], mit einem Maximalwert der Bodenbeschleunigung von  $4,0 \text{ m/s}^2$  zusammen mit dem Eigengewicht wirken, so dass sich ein dynamischer Vektor der Körperkräfte nach Gleichung (7.1) ergibt. Bei allen dynamischen Zeitverlaufsberechnungen wird zunächst das Eigengewicht als statischer Lastfall vorab aufgebracht. Nachdem für dieses durch iteratives Vorgehen (Abheben in Plattenmitte infolge Eigengewicht) ein Gleichgewichtszustand aufgefunden worden ist, wird von diesem Zustand ausgehend die dynamische Zeitverlaufsberechnung gestartet.

Bei den folgenden Untersuchungen ist ein LEHRsches Dämpfungsmaß von  $\xi = 5\%$  für alle Eigenformen bei den modalen Berechnungsverfahren angesetzt worden. Aus den ersten beiden maßgebenden Eigenperioden  $\frac{1}{2}T = 0,245 \text{ s}$  und  $\frac{1}{2}T = 0,069 \text{ s}$  in der Umfangswelle  $n = 1$  werden gemäß Gleichung (3.22) die Parameter für die RAYLEIGH Dämpfung bestimmt, die als Eingangswert für das Verfahren der direkten Zeitintegration benötigt werden; diese ergeben sich zu  $\alpha_M = 1,9975$  und  $\alpha_K = 0,0009$ . Die Berechnungen werden sowohl mit modaler Analyse (mit einer maximalen Anzahl an Eigenformen im nichtlinearen Fall von 19% der Zahl der Systemfreiheitsgrade) und mit direkter Zeitintegration nach NEWMARK mit einer globalen Zeitschrittweite von  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$  (modale Analyse) bzw.  $\Delta t = 0,005 \text{ s}$  (direkte Zeitintegration) und einer Dauer des Beschleunigungsverlaufs von 20 s durchgeführt, um zum einen die im Kapitel 6 vorgenommene Adaption der modalen Analyse auf nichtlineare Problemstellungen zu verifizieren und zum anderen die Güte der Ergebnisse durch Vergleichsrechnung zu gewährleisten. Die bereits vorgestellten Fälle a – d sind im Folgenden auch für die dynamischen Berechnungen weiterhin gültig.

### 7.2.3.1 Eigenfrequenzen und Eigenformen

Einen ersten Aufschluss über das dynamische Verhalten einer Struktur liefert die Analyse des Eigenwertproblems der linearen ungedämpften Tragwerkseigenschwingung. Die erste Eigenschwingform für das betrachtete System ist für die Umfangswellen 0 bis 4 mit Angabe der zugehörigen Eigenwerte im Bild 7.7 dargestellt. Die niedrigste Eigenfrequenz tritt in der Umfangswelle 1 auf, also für diejenige Eigenschwingform, die von allen dargestellten Eigenformen durch die horizontale Erdbebenbeschleunigung bei linearem Verhalten als Einzige angeregt wird. Die gefundenen Eigenfrequenzen



**Bild 7.7 Eigenformen des Behälters auf elastischer Bettung**

stimmen im Übrigen sehr gut mit denjenigen überein, die in [127] berechnet und angegeben worden sind.

Die erste Eigenform in Umfangswelle 0 beschreibt eine Vertikalschwingung des zusammengesetzten Behälters auf der elastischen Bettung. Auffällig ist die sehr hohe Frequenz dieser Eigenschwingung, die darauf zurückzuführen ist, dass bei diesem Schwingungsvorgang sehr große Deformationen verbunden mit Verzerrungen in der äußerst steifen Bodenplatte auftreten.

In Umfangswelle 1 erfolgt eine horizontale Kippschwingung, bei der sich das gesamte System nahezu wie ein Starrkörper auf elastischer Bettung verhält. Die im Vergleich zu den restlichen Eigenwerten relativ niedrige Frequenz dieser Schwingung resultiert daher, dass vorwiegend Deformationen in der nachgiebigen Bettung auftreten, wohingegen die Schale und Kreisplatte nahezu unverformt bleiben.

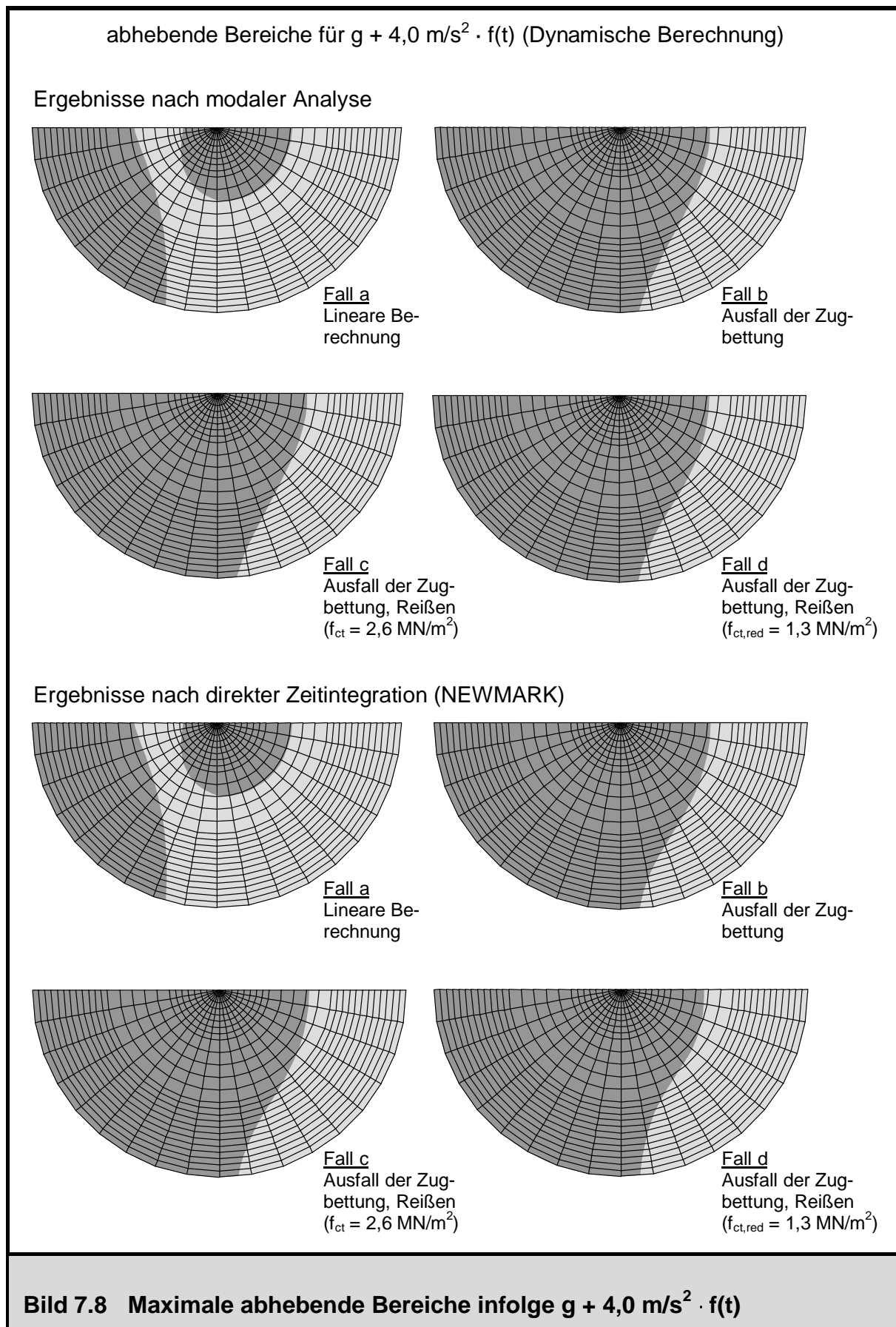
Für die dargestellten höheren Umfangswellen  $n = 2, 3$  und  $4$  fällt auf, dass die Boden-

platte kaum Verzerrungen erfährt. Auch in der elastischen Bettung treten keine Deformationen auf. Deutlich zu erkennen ist die Welligkeit der Radialverformung der Kreiszyinderschale entsprechend der betrachteten Umfangswelle. Die Frequenzen von Eigenformen höherer Umfangswellen wachsen dabei nahezu mit linearem Verhältnis an. Die Eigenformen in höheren Umfangswellen besitzen demnach ein steiferes Verhalten als diejenigen in niedrigen Umfangswellen. Im Vergleich zu der niederfrequenten Kippschwingung auf elastischer Bettung in Umfangswelle  $n = 1$ , bei der sich die Struktur nahezu als Starrkörper bewegt, erfolgen die Eigenschwingungen in den höheren Umfangswellen als hochfrequente Schwingungen der Behälterwand mit entsprechendem Umfangswellenmuster, wobei die Frequenz mit steigender Umfangswellenanzahl anwächst.

### 7.2.3.2 Entwicklung der abhebenden Bereiche und Bodenpressungen

Die abhebenden Bereiche infolge Eigengewicht und dynamischer Erdbebenbeschleunigung sind im Bild 7.8 für die Zeitpunkte der maximalen radialen Kopfverformungen  $v_{<3>}$  und somit der maximalen Schiefstellung des Systems (siehe Tabelle 7.2) nach den beiden genannten Rechenverfahren dargestellt. Bei einer linearen Untersuchung (Fall a) ohne Ausfall der Zugbettung ist wieder deutlich der in der Mitte liegende abhebende Bereich zu erkennen, der im Wesentlichen in der großen Randlast infolge Eigengewicht der aufgehenden Behälterwand verbunden mit dem geringen Bettungsmodul begründet liegt (siehe auch Abschnitt 7.2.2.1). Ferner erstreckt sich am Plattenrand ein abhebender Bereich infolge horizontaler Erdbebenbeschleunigung bis zu einem Umfangswinkel von  $\theta^1 = 70^\circ$  mit einer maximalen Breite von 8 m.

Wird nun im Rahmen einer nichtlinearen dynamischen Berechnung das Abheben und damit verbunden das Ausfallen der Zugbettung in der Kontaktfuge berücksichtigt (Fall b), vergrößert sich der abhebende Bereich sehr stark bis zum Umfangswinkel  $\theta^1 = 90^\circ$ , so dass deutlich mehr als die Hälfte der Platte zum Zeitpunkt der maximalen Schiefstellung abhebt. Der Kontakt zur Unterstützung wirkt nur noch für ca. ein Drittel der Gesamtfläche. Wird weiterhin noch zusätzlich zum Abheben das Aufreißen des Stahlbetons berücksichtigt (Fall c und d), so lässt sich keine wesentliche Änderung der maximalen abhebenden Bereiche feststellen. Darüber hinaus fällt die gute Übereinstimmung der Ergebnisse nach direkter Zeitintegration und modaler Analyse auf und bestätigt die im Kapitel 6 hergeleitete Vorgehensweise zur Berücksichtigung von Nichtlinearitäten bei der Superposition von Eigenformen in linearisierten inkrementellen Integrationsschritten, in denen das Bewegungsdifferentialgleichungssystem entkoppelt betrachtet wird.



### 7.2.3.3 Auswirkung der Nichtlinearitäten auf Schnittgrößen sowie Aspekte zur Dimensionierung

Die Ergebnisse der dynamischen Untersuchungen für die Kopfverformungen, maximalen Plattenschnittgrößen und erforderlichen Bewehrungsmengen für Platte und Schale sind in Tabelle 7.2 zusammengestellt. Bei den folgenden Darstellungen werden immer die Ergebnisse nach der modalen Analyse (sowohl lineare als auch nichtlineare Berechnungen) angegeben, wobei diese durch Vergleichsrechnung mit der direkten Zeitintegration nach NEWMARK sowohl qualitativ als auch quantitativ bestätigt werden (Werte in Klammern).

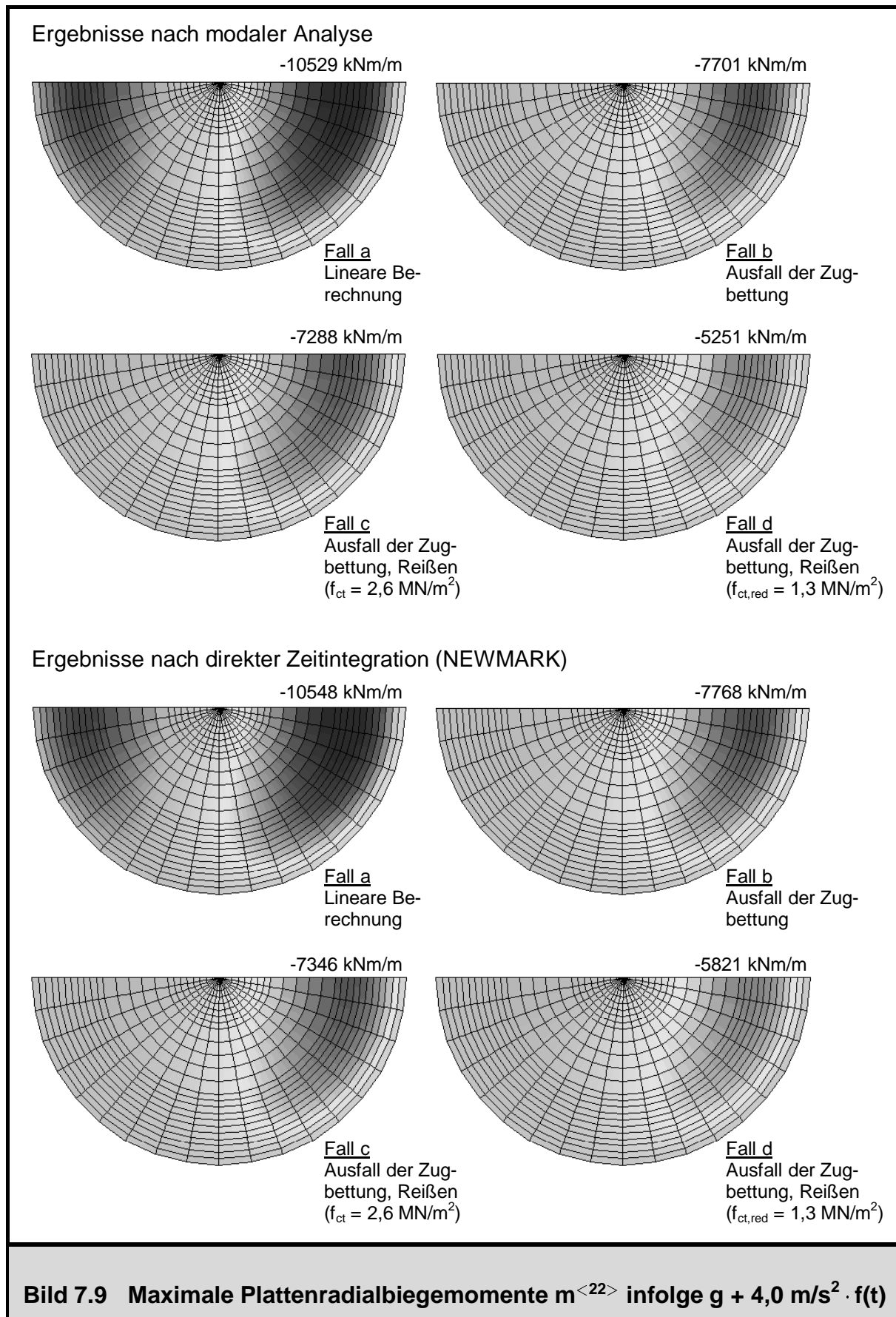
Infolge der dynamischen Einwirkung  $g + \ddot{v}_{gr} \cdot f(t)$  mit  $\max \ddot{v}_{gr} = 4,0 \text{ m/s}^2$  tritt in der Kreisplatte nach der linearen dynamischen Berechnung (Fall a) ein vom Betrage maximales Radialbiegemoment von  $m^{<22>} = -10529$  (-10548) kNm/m (Zug auf der Platteninnenseite) im Bereich der Symmetrieachse auf; dort wirken Druckspannungen als Kontaktpressungen. Auf der gegenüberliegenden Seite der Kreisplatte ist nach Bild 7.9 ein Bereich positiver Radialbiegemomente (Zug auf der Plattenaußenseite) erkennbar, der durch die hier wirkenden Zugspannungen in der Kontaktfuge hervorgerufen wird. Wird im Rahmen einer nichtlinear dynamischen Berechnung das Auftreten von Zugspannungen in der Kontaktfuge im Fall b ausgeschlossen, so erfolgt eine Reduktion des Radialbiegemoments um ca. 26% auf  $m^{<22>} = -7701$  (-7768) kNm/m; weiterhin ist

Ergebnisse nach modaler Analyse							
	max $v_{<3>}$ am Kopf	min $m^{<22>}$ Platte	min $m^{<11>}$ Platte	erf $a_{s2}$ Platte	erf $a_{s1}$ Platte	erf $a_{s2}$ Schale	erf $a_{s1}$ Schale
Fall a	2,1 cm	-10529	-6255	0,55 %	0,39 %	0,48 %	0,48 %
Fall b	2,1 cm	-7701	-4946	0,33 %	0,23 %	0,29 %	0,34 %
Fall c	2,1 cm	-7288	-5251	0,32 %	0,24 %	0,29 %	0,35 %
Fall d	2,1 cm	-5819	-4776	0,22 %	0,27 %	0,25 %	0,35 %

Ergebnisse nach direkter Zeitintegration							
	max $v_{<3>}$ am Kopf	min $m^{<22>}$ Platte	min $m^{<11>}$ Platte	erf $a_{s2}$ Platte	erf $a_{s1}$ Platte	erf $a_{s2}$ Schale	erf $a_{s1}$ Schale
Fall a	2,1 cm	-10548	-6266	0,55 %	0,39 %	0,48 %	0,48 %
Fall b	2,1 cm	-7768	-4927	0,35 %	0,23 %	0,28 %	0,34 %
Fall c	2,1 cm	-7346	-5038	0,34 %	0,24 %	0,29 %	0,34 %
Fall d	2,1 cm	-5821	-4641	0,23 %	0,28 %	0,27 %	0,34 %

**Tabelle 7.2 Ergebnisse für dynamische Belastung  $g + e; \ddot{v}_{gr} = 4,0 \text{ m/s}^2 \cdot f(t)$**

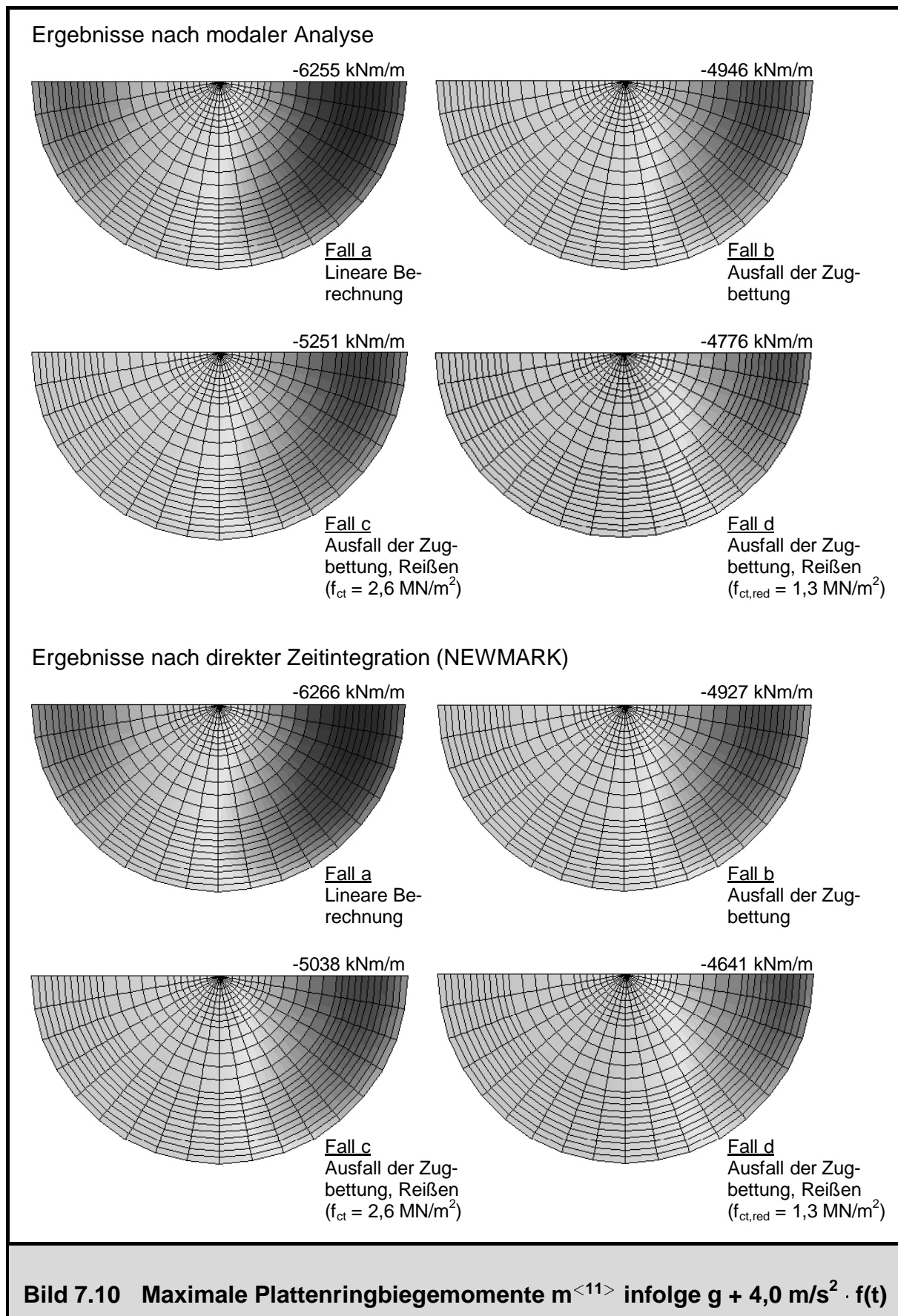


aus Bild 7.9 auf der gegenüberliegenden Plattenseite das Fehlen der ausgeprägten positiven Radialbiegemomentenbereiche infolge des Ausfalls der Zugbettung in den Fällen b – d zu erkennen. Bei einer weiteren Berücksichtigung der materiellen Nichtlinearität des Stahlbetons, insbesondere dessen Reißen bei einer Zugfestigkeit von  $f_{ct} = 2,60 \text{ MN/m}^2$  (Fall c), reduziert sich das vom Betrage maximale Radialbiegemoment auf  $m^{<22>} = -7288$  (-7346) kNm/m. Dieser Effekt gewinnt bei der dynamischen Berechnung nun an Bedeutung gegenüber dem statischen Fall hinzu, da aufgrund des höheren Beanspruchungsniveaus das Reißen bereits weiter fortgeschritten ist. Wird wie im statischen Fall zu Vergleichszwecken die Zugfestigkeit auf ihre Hälfte  $f_{ct,red} = 1,30 \text{ MN/m}^2$  (Fall d) herabgesetzt, so verstärkt sich dieser Effekt, und das maximale Radialbiegemoment baut sich auf einen Wert von  $m^{<22>} = -5819$  (-5821) kNm/m ab. Somit erfolgt im Fall c durch die Berücksichtigung der Nichtlinearitäten Abheben und Reißen bei  $f_{ct} = 2,60 \text{ MN/m}^2$  eine Reduktion des Plattenradialbiegemoments um ca. 30% gegenüber der linearen Lösung; bei einer reduzierten Zugfestigkeit von  $f_{ct,red} = 1,30 \text{ MN/m}^2$  sind dies sogar ca. 45%.

Die gleichen nichtlinearen dynamischen Effekte treten auch für die korrespondierenden Plattenringbiegemomente  $m^{<11>}$  auf. So stellt sich in der Symmetrieachse unter linearen Verhältnissen (Fall a) ein vom Betrage maximales Ringbiegemoment von  $m^{<11>} = -6255$  (-6266) kNm/m ein. Die zugehörige Verteilung der Ringbiegemomente über die Platte ist im Bild 7.10 dargestellt. Auch hier sind wieder deutlich Bereiche mit positiven Plattenringbiegemomenten (Zug auf der Plattenaußenseite) zu erkennen, die durch die hier wirkenden Kontaktzugspannungen in der Kontaktfuge hervorgerufen werden. Wird im Fall b das Abheben als einzige Nichtlinearität im Rahmen der dynamischen Berechnung berücksichtigt, so erfolgt auch hier eine Reduktion des vom Betrage maximalen Plattenringbiegemoments auf  $m^{<11>} = -4946$  (-4927) kNm/m. Weiterhin ist im Bild 7.10 an der zugehörigen Ringbiegemomentenverteilung zu sehen, dass auf der Plattenseite mit ausgefallener Zugbettung keine ausgeprägten Bereiche mit positiven Ringbiegemomenten im Gegensatz zum Fall a mehr vorliegen. Anders als bei den Plattenradialbiegemomenten  $m^{<22>}$  ist bei den Plattenringbiegemomenten  $m^{<11>}$  durch die Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität des Reißens nur noch eine geringfügige Auswirkung festzustellen. So stellt sich ein vom Betrage maximales Plattenringbiegemoment im Fall c ( $f_{ct} = 2,60 \text{ MN/m}^2$ ) von  $m^{<11>} = -5251$  (-5038) kNm/m und im Fall d ( $f_{ct,red} = 1,30 \text{ MN/m}^2$ ) von  $m^{<11>} = -4776$  (-4641) kNm/m ein. Die Änderung der Plattenringbiegemomente gegenüber der linearen Lösung beträgt somit im Fall c ca. 16% und im Fall d ca. 24%.

Die erläuterten nichtlinearen dynamischen Effekte haben natürlich auch Auswirkungen auf das Bemessungsergebnis, das in Tabelle 7.2 angegeben ist. Für die Bemessung mit linearen Schnittgrößen, die in sämtlichen Zeitschritten mit Abspeicherung der Maximalwerte durchgeführt wird, wird für die Radialbewehrung in der Platte die eingelegte





Bewehrungsmenge von 0,50% geringfügig überschritten. Durch die nichtlinearen dynamischen Effekte des Abhebens und des Aufreißens des Stahlbetons werden allerdings die Beanspruchungsspitzen abgebaut und es kommt zu einer Vergleichmäßigung der Beanspruchung. Obwohl physikalisch nichtlineare Ergebnisse natürlich im Allgemeinen von der eingelegten Bewehrungsmenge abhängen, die in diesem Fall 0,50% beträgt, spiegeln die in Tabelle 7.2 angegebenen Bemessungsergebnisse doch schon eine deutliche Tendenz für die Umverteilungen wieder, ausgedrückt in der skalaren Größe der für den nichtlinearen Beanspruchungszustand berechneten prozentualen Bewehrungsmenge. Für den Fall des Abhebens als einzige Nichtlinearität (Fall b) sind die erzielten Bemessungsergebnisse natürlich immer noch von der eingelegten Bewehrungsmenge unabhängig, wobei sich schon durch diese Nichtlinearität allein eine deutliche Änderung der erforderlichen Bewehrungsmengen gegenüber dem linearen System (Zulässigkeit von Kontaktzugspannungen) zeigt. Die physikalische Nichtlinearität des Betons im Druckbereich spielt in diesem Beispiel keine Rolle; die erreichten Betonstauchungen sind geringer als 1,00‰, so dass nahezu lineares Werkstoffverhalten vorliegt.

#### 7.2.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Ergebnisse dieses Anwendungsbeispiels sollen nochmals im Folgenden in kurzer Form zusammengefasst werden:

- Als bedeutendste Nichtlinearität ist in diesem Anwendungsbeispiel das Abheben der Struktur von ihrer Unterstützung zu nennen. Durch eine Störung des Bewegungsvorgangs infolge Abhebens als einziger Nichtlinearität treten bei der dynamischen Berechnung signifikante Beanspruchungsreduktionen ( $\max m^{<11>}$  um 20% und  $\max m^{<22>}$  um 27%) in der Platte auf, die sich in reduzierten erforderlichen Bewehrungsmengen niederschlagen.
- Bereits unter der statischen Beanspruchung infolge Eigengewichts des Behälters kommt es aufgrund der sehr weichen Bettung zu einem Abheben in Plattenmitte und somit zu einer Schnittgrößenumverteilung.
- Gegenüber einer linearen Betrachtungsweise vergrößern sich die abhebenden Bereiche bei einer Berücksichtigung des Ausfalls der Zugwirkungen in der Kontaktfuge sehr stark. Mitunter hebt kurzfristig ein maximaler Bereich ab, der sich bis zur Plattenmitte erstreckt.
- Das Reißen des Stahlbetons bei seiner Zugfestigkeit  $f_{ct} = 2,60 \text{ MN/m}^2$  ist im Rahmen dieses Beispiels nur von untergeordneter Bedeutung. Erst bei einer Abmin-

derung der Zugfestigkeit auf  $f_{ct,red} = 1,30 \text{ MN/m}^2$  kommt es noch einmal zu einer deutlichen Beanspruchungsänderung in der Platte.

- Modale Analyse und direkte Zeitintegration liefern qualitativ und quantitativ sehr gute Übereinstimmungen in den dynamischen Rechenergebnissen. Damit wird das Vertrauen in die Güte der erzeugten nichtlinearen dynamischen Rechenergebnisse bestärkt, denen programmintern doch eine sehr komplexe Abfolge von Rechenoperationen verbunden mit Fragen zur numerischen Stabilität und Konvergenz vorausgeht, und die mittels Handrechnung nicht mehr nachvollzogen werden können.
- Die geringfügigen Unterschiede in den Ergebnissen liegen im unterschiedlichen Ansatz der Dämpfung (Umrechnung des LEHRschen Dämpfungsmaßes in RAYLEIGH Dämpfungsparameter), der unterschiedlichen Wahl der Zeitschrittweite (modale Analyse  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ ; direkte Zeitintegration  $\Delta t = 0,005 \text{ s}$ ) und der Anzahl der verwendeten Eigenformen nach der modalen Analyse zur Darstellung des nichtlinearen Bewegungszustands. Letztere ist mit 19% der Zahl der Systemfreiheitsgrade ausreichend gewählt und trägt aufgrund der geringen Größe zu einer wirtschaftlichen Berechnung bei.
- Die bereits vorhandenen Rechenergebnisse unter statischen Ersatzhorizontalbeschleunigungen aus [59], [127] können qualitativ und quantitativ sehr gut nachvollzogen werden, obwohl hierbei ein grundsätzlich unterschiedliches Rechenverfahren angewendet worden ist. Darüber hinaus bieten die geschaffenen Algorithmen zusätzliche Möglichkeiten: Die Strukturantwort kann nun auch mit einem wirtschaftlich vertretbaren Aufwand unter dynamischen Horizontalbeschleunigungen berechnet werden, außerdem besteht die Möglichkeit der Absicherung und Kontrolle der Ergebnisse durch die Anwendung prinzipiell unterschiedlicher Rechenverfahren.

## 7.3 Untersuchungen an einem Naturzugkühlturm

### 7.3.1 System, Rechenmodell und Definition der Einwirkungen

Das System des Naturzugkühlturms, der im Rahmen dieses Anwendungsbeispiels auf sein nichtlinear dynamisches Verhalten unter horizontalen Erdbebenbeschleunigungen untersucht wird, ist im Bild 7.11 mit den wesentlichen Abmessungen und Materialparametern dargestellt. Es handelt sich dabei um eine moderne Kühlturmschale mit einer Schalenhöhe von 165,3 m und der Meridiankurve nach Gleichung (5.91), die vor

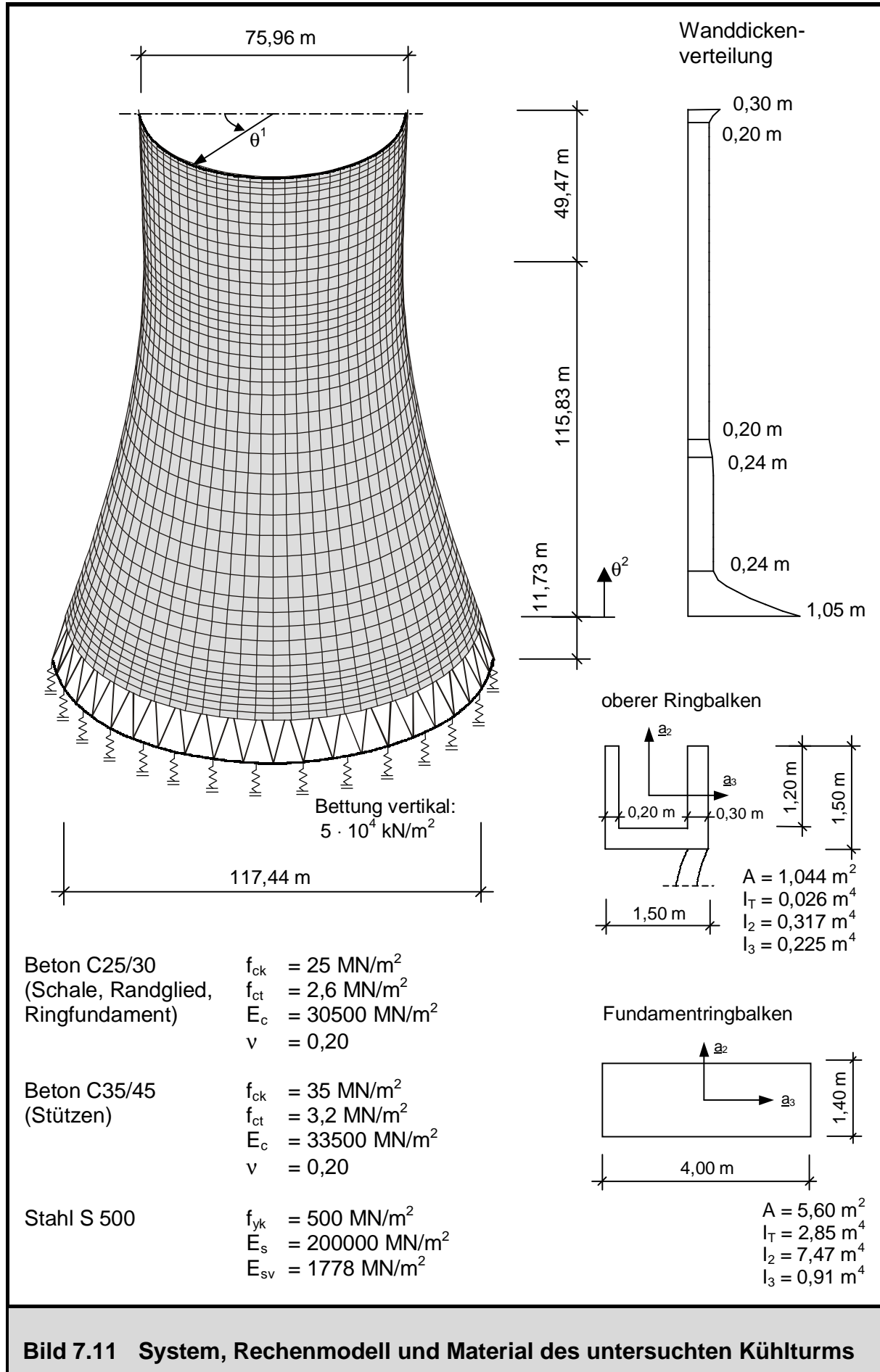
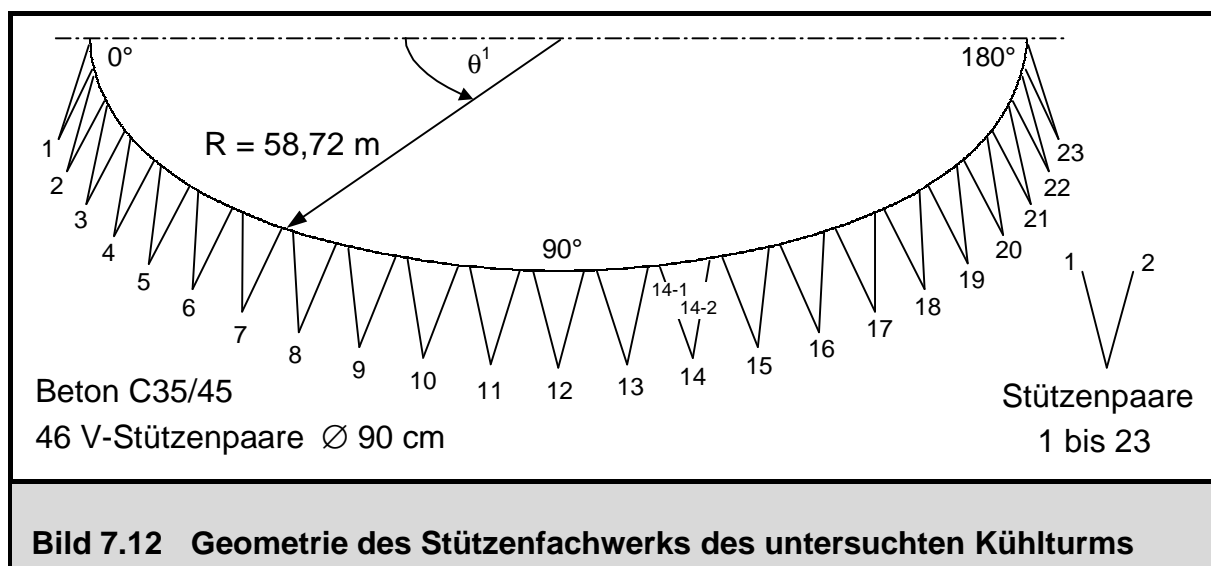


Bild 7.11 System, Rechenmodell und Material des untersuchten Kühlturms

kurzer Zeit fertig gestellt worden ist, aufgrund ihres geographischen Standorts jedoch nicht für Erdbeben ausgelegt werden musste. Diese ist an ihrem unteren Rand auf einem V-Stützenfachwerk mit der Höhe 11,7 m aufgelagert und an ihrem oberen Rand durch einen innen liegenden trogförmigen Umgang ausgesteift. Die Gründung erfolgt als Flachgründung über ein Ringfundament, für das in vertikaler Richtung eine elastische Ringbettung mit der Größe  $5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$  berücksichtigt wird.

Die numerische Modellierung der Schale erfolgt mit 43 Schalenringelementen, deren Herleitung im Kapitel 5 ausführlich beschrieben worden ist. Für den oberen Umgang und das Kreisringfundament wird jeweils ein Ringbalkenelement [108] verwendet. Das Stützenfachwerk wird mit einem Makroelement abgebildet, das vom Verfasser entwickelt worden und in [130] beschrieben ist. Dabei werden die Eigenschaften der diskreten Einzelstützen mit 3D-Balkenelementen erfasst. Die Elementfreiheitsgrade der einzelnen Balken werden über den Fourierreihenansatz in Umfangsrichtung innerhalb des Makroelementes programmintern gekoppelt, so dass die Einzelstützen vom Benutzer bei der Eingabe nicht wahrgenommen werden. Ferner erfolgt eine Transformation der sechs Freiheitsgrade am oberen Knoten des Makroelementes auf die vier physikalischen Freiheitsgrade des unteren Schalenknotens des angrenzenden Schalenringelementes unter Ausnutzen der Schalenkinematik für  $w_1$  nach Gleichung (4.21) und Nullsetzen der Rotation um den Schalendirektor (starre Einspannung). Für dieses Makroelement werden ferner auch der Vektor aus inneren Knotenkräften und die tangentiale Steifigkeitsmatrix durch Summation und Transformation der entsprechenden Beiträge aller Einzelstützen aufgebaut, so dass ein belastungsabhängiges Verhalten der Einzelstützen wie das Aufreißen unter Zugbeanspruchung berücksichtigt werden kann. Mit dem gewählten Modell können allerdings keine lokalen Effekte wie die Einzelkrafteinleitung in die Schale bzw. in das Ringfundament abgebildet werden; für diese werden gesonderte Betrachtungen erforderlich. Da im Folgenden öfters auf Ein-

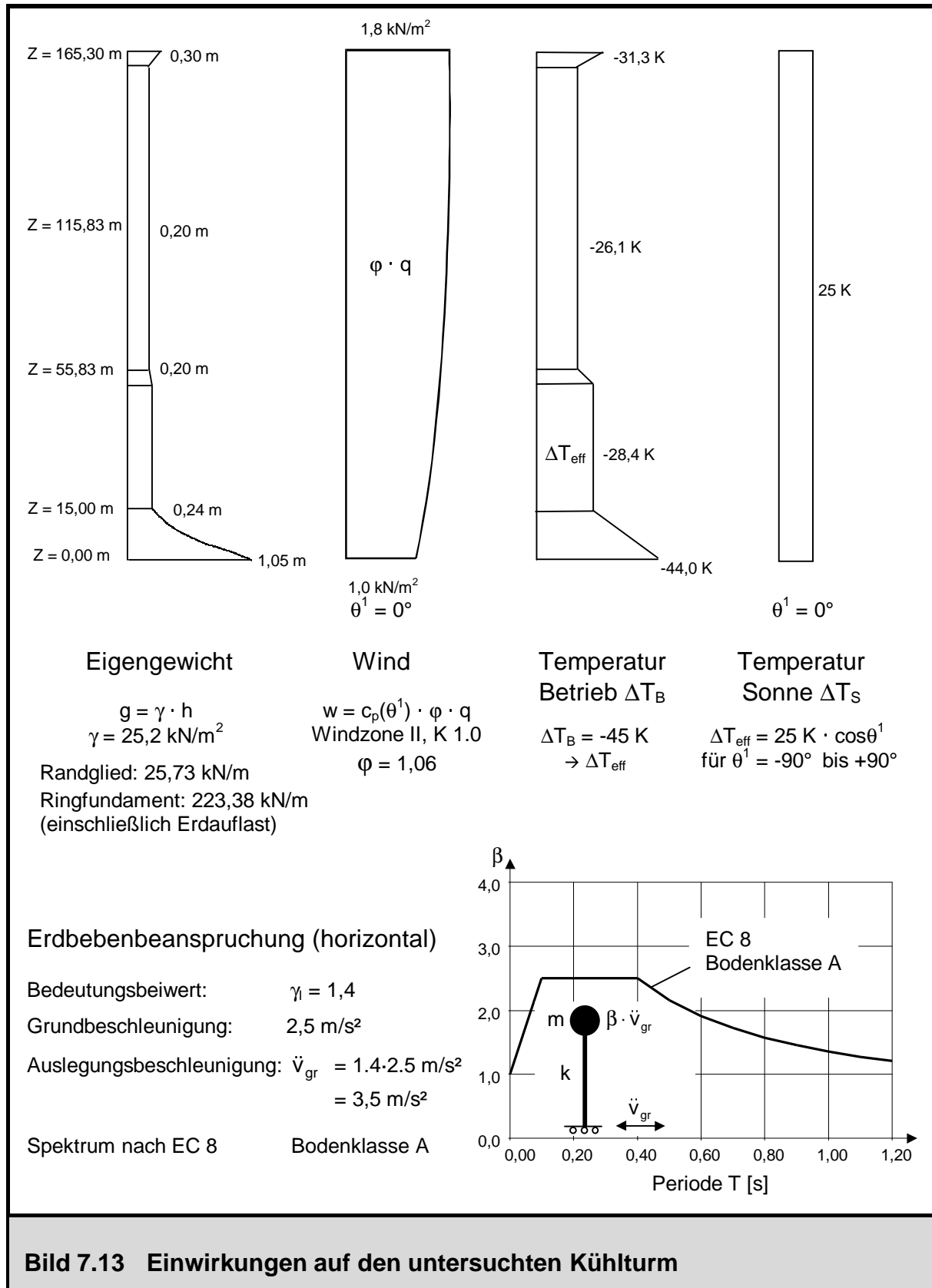


**Bild 7.12 Geometrie des Stützenfachwerks des untersuchten Kühlturms**

zelstützen verwiesen wird, ist die Geometrie des aus 46 V-Stützenpaaren bestehenden Fachwerks im Bild 7.12 nochmals vergrößert mit der Bezeichnung der Einzelstützen dargestellt. Zur Modellierung des Baugrunds kommt ein ebenfalls vom Verfasser entwickeltes Ringfedererelement zum Einsatz [81], bei dem ein Ausfall der Zugbettung durch numerische Integration in Umfangsrichtung analog der Herleitungen für das Schalenelement berücksichtigt werden kann. Die Ordnung des Fourierreihenansatzes in Umfangsrichtung beträgt für die gesamte Struktur  $n_{\max} = 15$ .

Die auf die Kühlturmschale einwirkenden Lasten sind im Bild 7.13 angegeben. Das Eigengewicht ergibt sich aus der Schalenwanddickenverteilung und dem spezifischen Gewicht des Betons  $\gamma = 25,2 \text{ kN/m}^3$  (einschließlich Lisenen). Als Höhenverteilung für den Wind wird nach BTR 97 [120] die Windzone II mit einer dynamischen Überhöhung von 1,06 angesetzt, die Umfangsverteilung wird durch die Rauigkeit der Schale festgelegt und nach BTR 97 mit Kurve K1.0 beschrieben. Ferner wirkt eine rotationssymmetrische Temperaturdifferenz im Winter von  $\Delta T_B = -45 \text{ K}$ , die unter Berücksichtigung der Wärmeübergänge von der Luft auf die Schalenoberflächen auf die im Bild 7.13 angegebenen effektiven Temperaturdifferenzen führt; alternativ tritt im Sommer bei Stillstand eine nicht rotationssymmetrische effektive Temperaturdifferenz zwischen den Schalenoberflächen von  $\Delta T_S = +25 \text{ K}$  auf.

Weiter soll eine maximale horizontale Bodenbeschleunigung von  $\ddot{v}_{gr} = 3,5 \text{ m/s}^2$  infolge Erdbeben auf das gesamte Tragwerk einwirken. Die Größe der Bodenbeschleunigung wird im Folgenden kurz klassifiziert: Ein subjektives Maß für die Stärke eines Erdbebens, die an einem bestimmten Ort wahrgenommen wird und von mehreren Parametern (Abstand vom Epizentrum, Bodenverhältnisse, etc.) abhängig ist, ist dessen *Intensität*. Erdbebenintensitäten werden nach der MSK-Skala (MEDWED-JEW, SPONHEUER und KARNIK), die fester Bestandteil der DIN 4149 [35] ist, nach der MERCALLI-Skala [15], [16] oder nach der EMS-Skala (Europäische Makroseismische Skala [48]) in 12 Intensitätsstufen unterteilt. Die genannten Skalen sind von ihrer Konzeption her sehr ähnlich, die Zuordnung zu den einzelnen Intensitätsstufen erfolgt über von Personen wahrgenommene Auswirkungen des Erdbebens, Schäden an Bauwerken, Verformungen der Erdoberfläche sowie weitere Gesichtspunkte. Obwohl die Zuordnung zu den einzelnen Klassen auf den ersten Blick sehr vage erscheint, lässt sich bei genauerer Betrachtung die wahrgenommene Erdbebenintensität doch sehr zuverlässig einordnen; insbesondere gibt die EMS-Skala ausführliche Erläuterungen und Zusatzdefinitionen bezüglich des Ausmaßes (Prozentsatz der beschädigten Bauwerke) und der Art der Schäden für die einzelnen Intensitätsstufen an. Erdbeben der Intensitäten I – V sind demnach nicht schadensrelevant und führen nur zu geringfügigen Schäden an Bauwerken. Die Intensitäten X – XII sind hingegen so stark (Definition nach EMS-Skala für Zone XII: Zerstörung nahezu aller Bauwerke), so dass eine Auslegung hierfür technisch und wirtschaftlich nicht oder nur sehr schwer ausführbar ist. Die



baupraktisch relevanten Auslegungsintensitäten reichen somit von Intensität VI bis IX. Die nach DIN 4149 in Deutschland maximal anzusetzende Horizontalbeschleunigung einschließlich Bedeutungsbeiwert beträgt  $1,4 \text{ m/s}^2$  (Erdbebenzone 4, Bauwerksklasse

3, Gründung auf Lockergestein oder bindigem Boden mit einer Konsistenz besser als steif) und wird der Intensität VIII auf der MSK-Skala zugeordnet [35]. Die gewählte Auslegungsbeschleunigung von  $\ddot{v}_{gr} = 3,5 \text{ m/s}^2$ , die den folgenden Untersuchungen zugrunde gelegt wird, ist demnach gemäß [71] zwischen den Intensitätszonen IX und X anzusiedeln.

### 7.3.2 Statische Auslegung nach BTR 97 und Bewehrungswahl

Für die statische Auslegung des Kühlturms sind die folgenden Lastfallkombinationen nach BTR 97 [120] zu untersuchen. Den Kombinationen i und ii liegt dabei ein globales Sicherheitskonzept mit einer Sicherheit  $\gamma_s = 1,75$  gegenüber Stahlfließen zugrunde. In der Lastkombination iii wird nur der Lastfall Wind direkt mit einem Sicherheitsfaktor beaufschlagt, da Eigengewicht für die Dimensionierung der Meridianbewehrung der Schale günstig wirkt; die Bemessung der Bewehrung für diese Lastkombination wird daher gegen die Streckgrenze durchgeführt ( $\gamma_s = 1,0$ ).

$$\text{i) } g + w + \Delta T_B \quad \text{mit } \gamma_s = 1,75$$

$$\text{ii) } g + w + \Delta T_S \quad \text{mit } \gamma_s = 1,75$$

$$\text{iii) } g + 1,75 \cdot w \quad \text{mit } \gamma_s = 1,00$$

Aus diesen Lastfallkombinationen ergeben sich die im Bild 7.14 dargestellten Bewehrungsmengen, die durch die gewählten Bewehrungsmengen abgedeckt sind. Die maximal erforderliche Bewehrungsmenge in Ringrichtung, die sich im Wesentlichen aus Temperaturringbiegemomenten  $m^{<11>}$  berechnet, beträgt erf  $a_{s1} = 16,0 \text{ cm}^2/\text{m}$ ; die erforderliche Bewehrungsmenge in Meridianrichtung beträgt erf  $a_{s2} = 18,3 \text{ cm}^2/\text{m}$ . Die im Bild 7.14 dargestellte gewählte Bewehrungsmenge wird den nichtlinearen numerischen Untersuchungen der folgenden Abschnitte zugrunde gelegt mit der Änderung, dass im unteren Schalenbereich bis zur Höhe  $Z = 72,89 \text{ m}$  eine konstante Meridianbewehrung von gew  $a_{s2} = 19,7 \text{ cm}^2$  angesetzt wird, da die maximale Beanspruchung aus Erdbeben dort höhere Bewehrungsmengen erfordern wird als die Lastfallkombinationen nach BTR 97. Es werden im Folgenden noch einige weitere charakteristische Ergebnisse für die statischen Lastfallkombinationen nach BTR 97 angegeben, die den entsprechenden Werten der Erdbebenberechnungen zum Vergleich der Größenordnungen in den folgenden Abschnitten gegenübergestellt werden:

$$\begin{array}{ll} \max n^{<22>} & = 808 \text{ kN/m:} & \max. \text{ Meridianzugkraft infolge } g + 1,75 w \\ \min P_{\text{stü}} & = -10746 \text{ kN (10-1):} & \min. \text{ Stütznormalkraft infolge } 1,75 \cdot (g + w) \end{array}$$



$\max P_{\text{stü}}$	= 1054 kN (1-2):	max. Stützensnormalkraft infolge $g + 1,75 w$
$P_{\text{stü},g}$	= -3503 kN:	Stützensnormalkraft infolge $g$ am Stützenkopf
$A_{s,\text{stü}}$	= 50,3 cm <sup>2</sup> (16 Ø 20):	vorhandene Stützenbewehrung (LK i – iii)
$\max P_{\text{bod}}$	= 2342 kN/m:	max. Bettungskraft infolge $1,75 \cdot (g + w)$
$\lambda_{\text{Riss}}$	= 1,36:	Lastfaktor beim Erstriss infolge $g + \lambda \cdot w$
$\lambda_{\text{Abh}}$	= 1,82:	Lastfaktor beim Abheben infolge $g + \lambda \cdot w$

Das Abheben infolge Wind findet aufgrund des hohen Gewichts des Ringfundaments und seiner Auflast erst spät statt, so dass auch die Forderung der BTR 97 nicht maßgebend wird, dass bei 1,5 facher Windlast der Abhebewinkel maximal 30° des gesamten Umfangs betragen darf. Das Aufreißen des Stahlbetons in Meridianrichtung unter Windbeanspruchung erfolgt beim Lastfaktor  $\lambda = 1,36$  bereits relativ früh, so dass sich dadurch die im Abschnitt 5.6.2 erläuterten nichtlinearen Effekte einstellen.

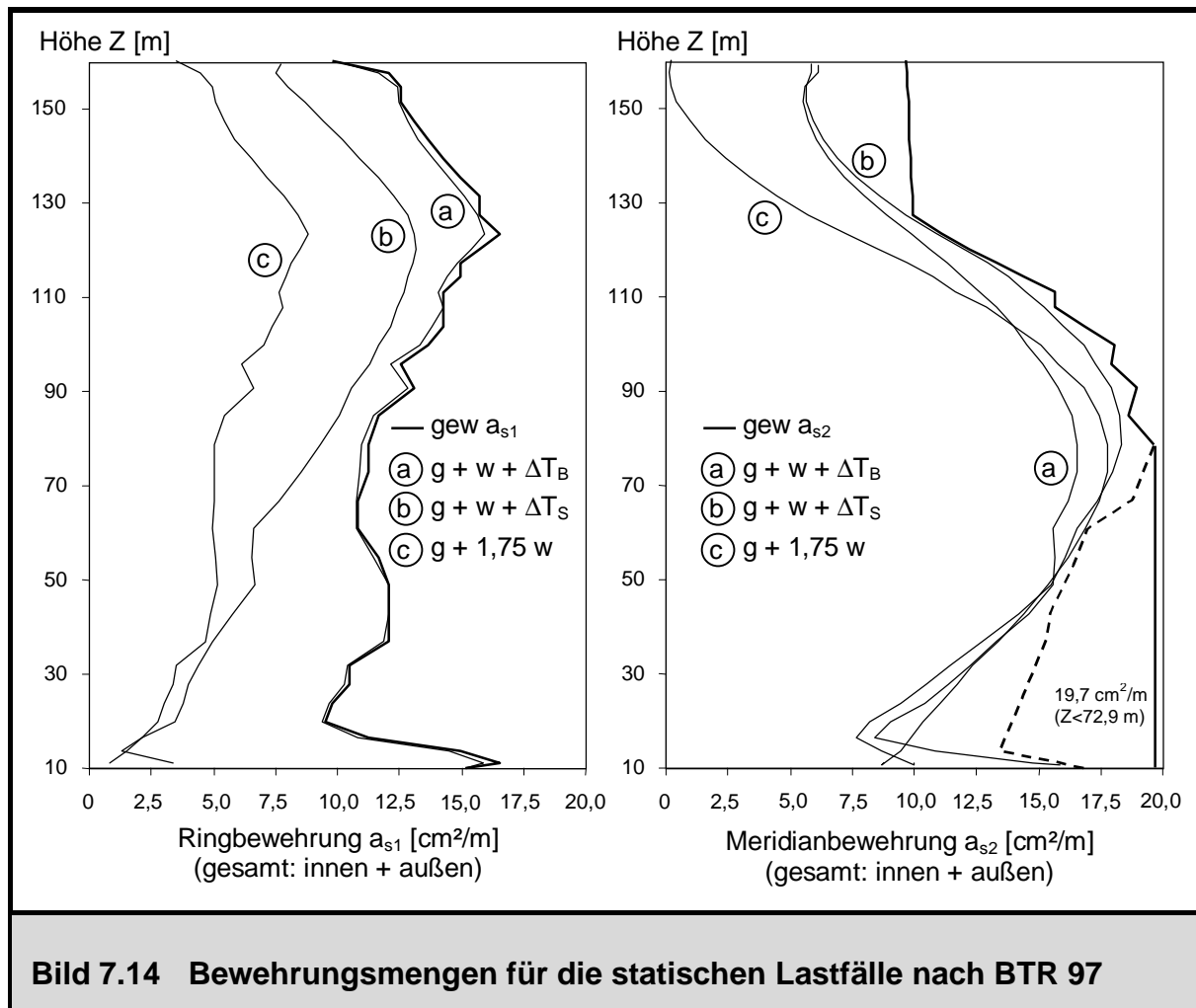
### 7.3.3 Untersuchungen für horizontale Erdbebenbeschleunigungen

#### 7.3.3.1 Erläuterung des Sicherheitskonzepts

Das Sicherheitskonzept des Eurocode 1 [36], der im Wesentlichen der DIN 1055-100 [34] entspricht, in Verbindung mit Eurocode 8 [38] sieht vor, die Erdbebeneinwirkungen mit anderen Einwirkungen gemäß Gleichung (7.2) zu kombinieren.

$$S_d \left( g + \gamma_1 \cdot e + \sum_i \psi_{2i} \cdot q_i \right) \leq R_d \left( \frac{f_{ck}}{\gamma_c}, \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \right) \quad (7.2)$$

Mit dem Bedeutungsbeiwert  $\gamma_1$  wird der Funktion des auszulegenden Tragwerks Rechnung getragen. Das Intervall der zu berücksichtigenden Bedeutungsbeiwerte nach den gültigen nationalen und internationalen Vorschriften (z.B. [38], [69], [91], [116]) läuft von  $\gamma_1 = 0,8$  bis  $\gamma_1 = 1,4$ , so dass für die Kühlturmschale als Tragwerk mit hoher Bedeutung für die Infrastruktur (Aufrechterhaltung der Energieversorgung)  $\gamma_1 = 1,4$  angesetzt wird. Somit ergibt sich aus Multiplikation mit der angesetzten Grundbeschleunigung des Bodens eine Auslegungsbeschleunigung von  $\ddot{v}_{gr} = 3,5 \text{ m/s}^2$ . Vertikale Erdbebeneinwirkungen sind nach EC8 Teil 3 für turmartige Bauwerke nicht zu berücksichtigen. Zur Kombination der Erdbebeneinwirkungen mit anderen Einwirkungen ist anzumerken, dass nach EC1 [36] die Kombinationsbeiwerte  $\psi_{2i}$  für Wind und Temperatur verschwinden und diese Beanspruchungen somit nicht gleichzeitig mit dem Erdbeben wirkend betrachtet werden müssen. Als Sicherheiten auf Materialseite dürfen gemäß



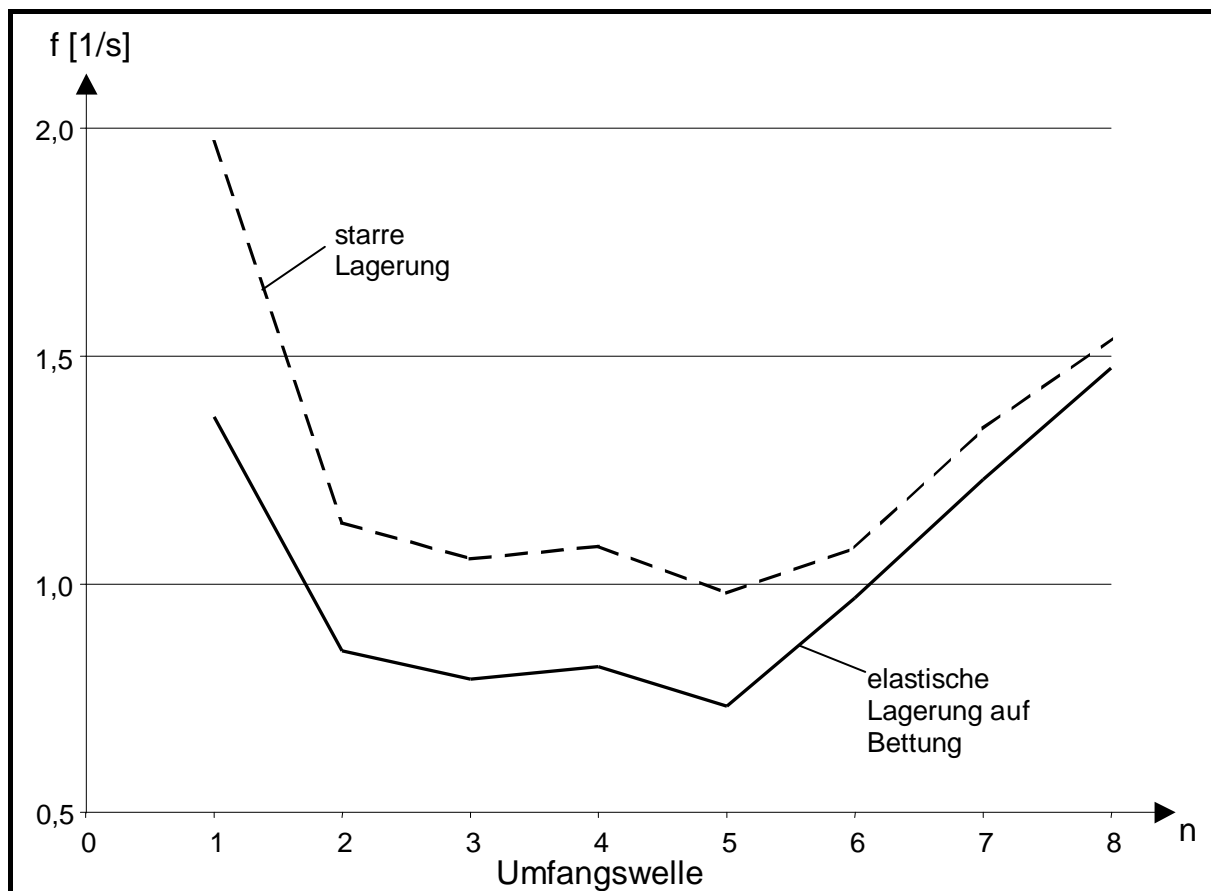
des Neuentwurfs des EC2 [47] dem Querschnittsnachweis reduzierte Partialsicherheiten  $\gamma_c = 1,2$  und  $\gamma_s = 1,0$  zugrunde gelegt werden, was in Übereinstimmung mit den globalen Sicherheitsbeiwerten der gültigen Ausgabe der DIN 4149 [35] steht. Nach dem Sicherheitskonzept der neuen Normengeneration der Eurocodes sind somit auch für die Erdbebeneinwirkungskombination Querschnittsnachweise mit den genannten Partialsicherheiten gemäß Gleichung (7.2) zu führen.

### 7.3.3.2 Eigenschwingverhalten des Systems

Wie bei jeder dynamischen Untersuchung wird auch für das System des betrachteten Naturzugkühlturms im ersten Schritt das dynamische Eigenschwingverhalten geklärt, dessen Kenntnis für die nachfolgenden linearen und nichtlinearen Zeitverlaufsberechnungen von Bedeutung ist. Das Lösen des linearen, im Umfangswellenansatz entkoppelten Eigenwertproblems der ungedämpften Tragwerkseigenschwingung führt auf die in Tafel 7.1 angegebenen Eigenfrequenzen bzw. Eigenperioden in Abhängigkeit der Umfangswellenzahl  $n$ . Die minimale Eigenfrequenz tritt jeweils in der Umfangswelle  $n$

= 5 mit  $f = 0,98$  Hz bei starrer bzw. mit  $f = 0,73$  Hz bei nachgiebiger vertikaler Lagerung auf.

Deutlich erkennbar ist nach Tafel 7.1 der Einfluss der vertikalen nachgiebigen Lagerung der Struktur auf elastischer Bettung. Dieser Effekt wirkt sich besonders stark in den Umfangswellen  $n = 0 \div 5$  aus. Somit beeinflusst die Bodennachgiebigkeit auch maßgeblich die Eigenfrequenzen und Eigenformen der Umfangswelle  $n = 1$ , die von besonderem Interesse sind, da sich aus deren Kombination die lineare Strukturant-

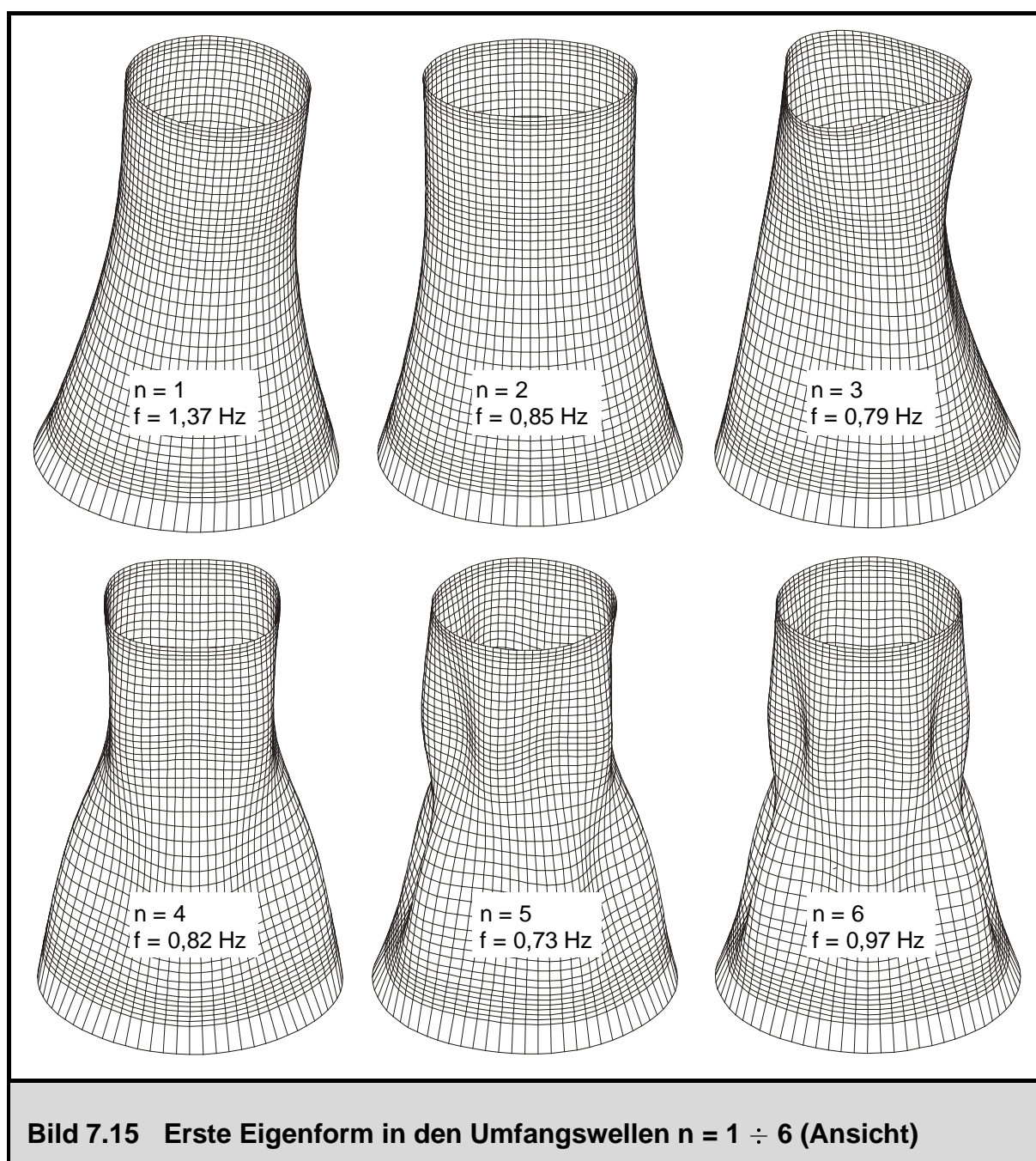


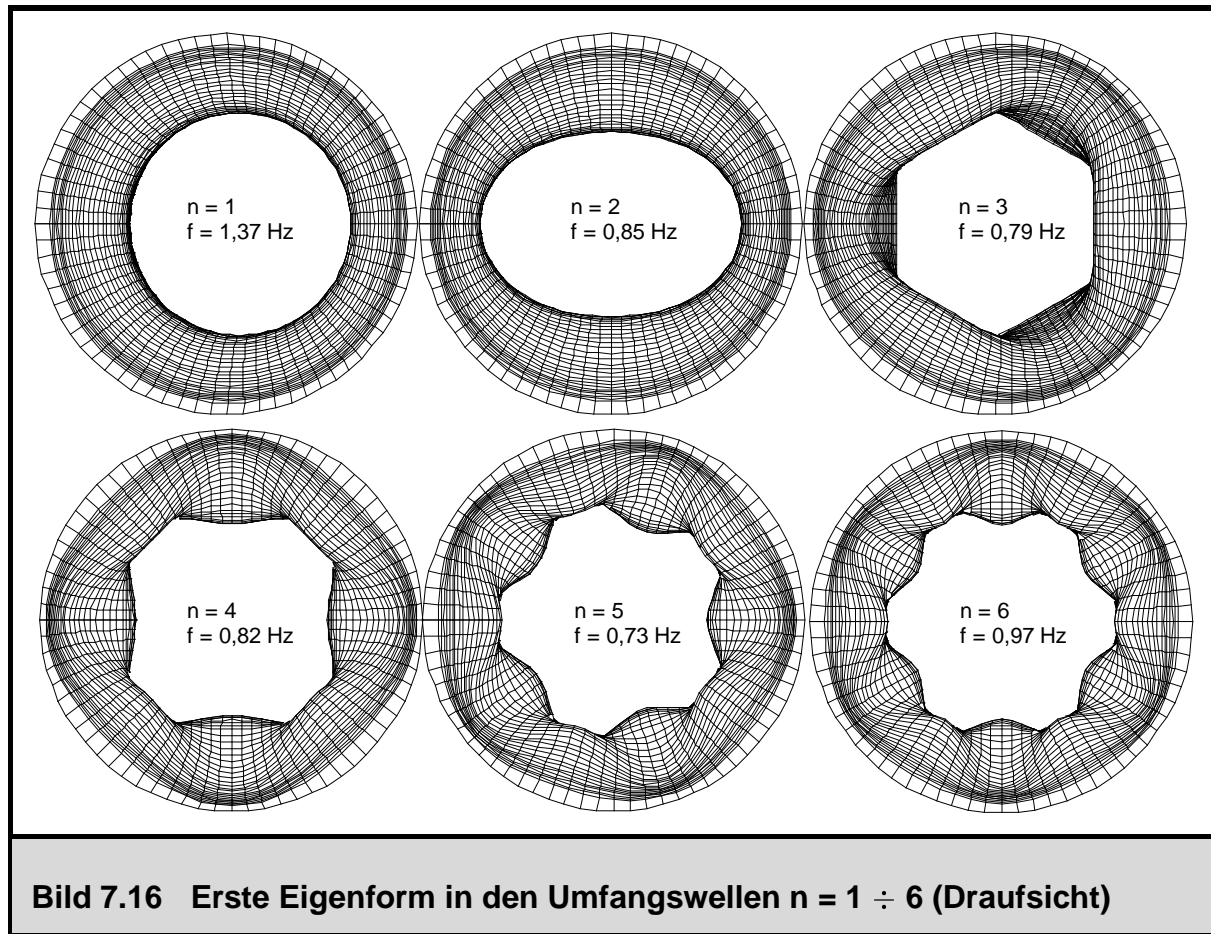
Umfangswelle n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{\text{Bettung}}$ [1/s]	3,230	1,367	0,854	0,792	0,819	0,732	0,969	1,230	1,474
$f_{\text{starr}}$ [1/s]	5,608	1,970	1,135	1,055	1,083	0,980	1,080	1,341	1,538

Umfangswelle n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$T_{\text{Bettung}}$ [s]	0,309	0,731	1,172	1,263	1,221	1,366	1,033	0,813	0,678
$T_{\text{starr}}$ [s]	0,178	0,508	0,881	0,948	0,923	1,021	0,926	0,746	0,650

**Tafel 7.1 Vergleich der Eigenfrequenzen des untersuchten Kühlturms**

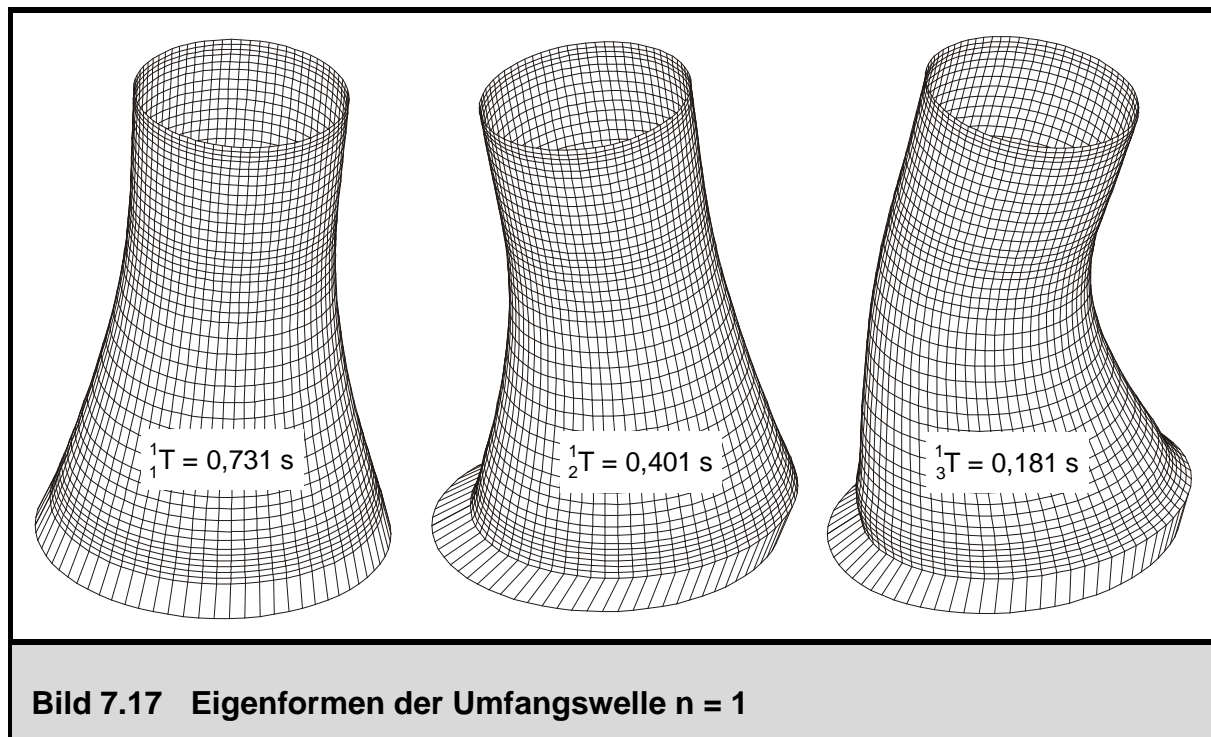
wort auf horizontale Erdbebenanregung zusammensetzt. Für Eigenformen höherer Ordnung der genannten Umfangswellen nimmt der Einfluss der nachgiebigen Vertikallagerung schnell ab, und die Frequenzen des Systems mit starrer und nachgiebiger Lagerung nähern sich einander an. Diese Eigenschaft ist auch anhand der Bilder 7.15 und 7.16 erklärbar, die Darstellungen der ersten Eigenformen für die Umfangswellen  $n = 1 \div 6$  in Ansicht und Grundriss enthalten. Bei der nicht dargestellten ersten Eigenform in Umfangswelle  $n = 0$  liegt eine Vertikalschwingung auf der nachgiebigen vertikalen Unterstützung vor, bei der die Schale sich nahezu als Starrkörper verhält und somit keine Verzerrungen erfährt. In Umfangswelle  $n = 1$  erfolgt eine Kippschwingung der gesamten Schale, die sich wiederum annähernd als Starrkörper verhält. Da-





bei treten ebenfalls die maßgebenden Verformungen und Verzerrungen in der elastischen Unterstützung auf. Die Schale als idealisierter Starrkörper liefert somit nur geringe Beiträge zur generalisierten Steifigkeit, so dass sich die Nachgiebigkeit des Bodens stark in den Eigenfrequenzen niederschlägt. Für höhere Umfangswellen erfährt die Schale bei der Eigenschwingung deutliche Verzerrungen, wie am Umfangswellenmuster der Eigenformen im Bild 7.15 zu erkennen ist, so dass der Anteil der elastischen Unterstützung an der generalisierten Steifigkeit mit höheren Umfangswellen stark abnimmt und sich somit die Lösungen für starre und nachgiebige Unterstützung annähern. Für die dynamischen Erdbebenuntersuchungen darf daher die vertikale nachgiebige Unterstützung im Gegensatz zu statischen Untersuchungen nicht vernachlässigt werden, da sie die dynamischen Systemeigenschaften entscheidend mitbestimmt.

Für die Strukturantwort auf Erdbebanregung sind wie bereits erwähnt die Eigenformen für  $n = 1$  von besonderem Interesse, von denen die ersten drei im Bild 7.17 enthalten sind. Die erste Eigenform beschreibt die bekannte Kippschwingung auf elastischer Bettung, die zweite Eigenform kann als horizontale Starrkörperschwingung der Schale auf dem stark deformierten Stützenfachwerk bezeichnet werden. Die dargestellte dritte Eigenform besitzt bereits eine ausgeprägte Welligkeit in Meridianrichtung;



diese liefert wie auch die erste Eigenform bei Anregung große Meridiankräfte.

### 7.3.3.3 Übersicht über die durchgeführten Zeitverlaufsberechnungen

Zur Ermittlung der Beanspruchungen des untersuchten Kühlturms infolge der horizontalen Erdbebenbeschleunigung werden verschiedene numerische Verfahren eingesetzt. Für die linearen Untersuchungen werden zunächst vereinfachte Betrachtungen mit statischen Ersatzlasten sowie mit dem Antwortspektrenverfahren durchgeführt. Für Zeitverlaufsberechnungen sind ferner funktionale Zusammenhänge zwischen der Zeit und der Beschleunigung erforderlich. Es werden aufgrund der stochastischen Natur der Erdbebenanregung Untersuchungen für fünf verschiedene gemessene Zeitverläufe nach [95] durchgeführt, die allesamt auf die Auslegungsbeschleunigung von  $3,5 \text{ m/s}^2$  normiert sind. Die zugehörigen Antwortspektren finden sich im Bild 7.18. Das TABAS Erdbeben ist in der iranischen Erdbebenvorschrift [69] im Übrigen als Zeitverlauf für die Tragwerksauslegung bei der Anwendung von Zeitverlaufsberechnungen explizit vorgeschrieben, doch auch der Beschleunigungsverlauf des EL CENTRO Bebens ist in der Literatur häufig als Auslegungserdbeben zu finden [24], [26].

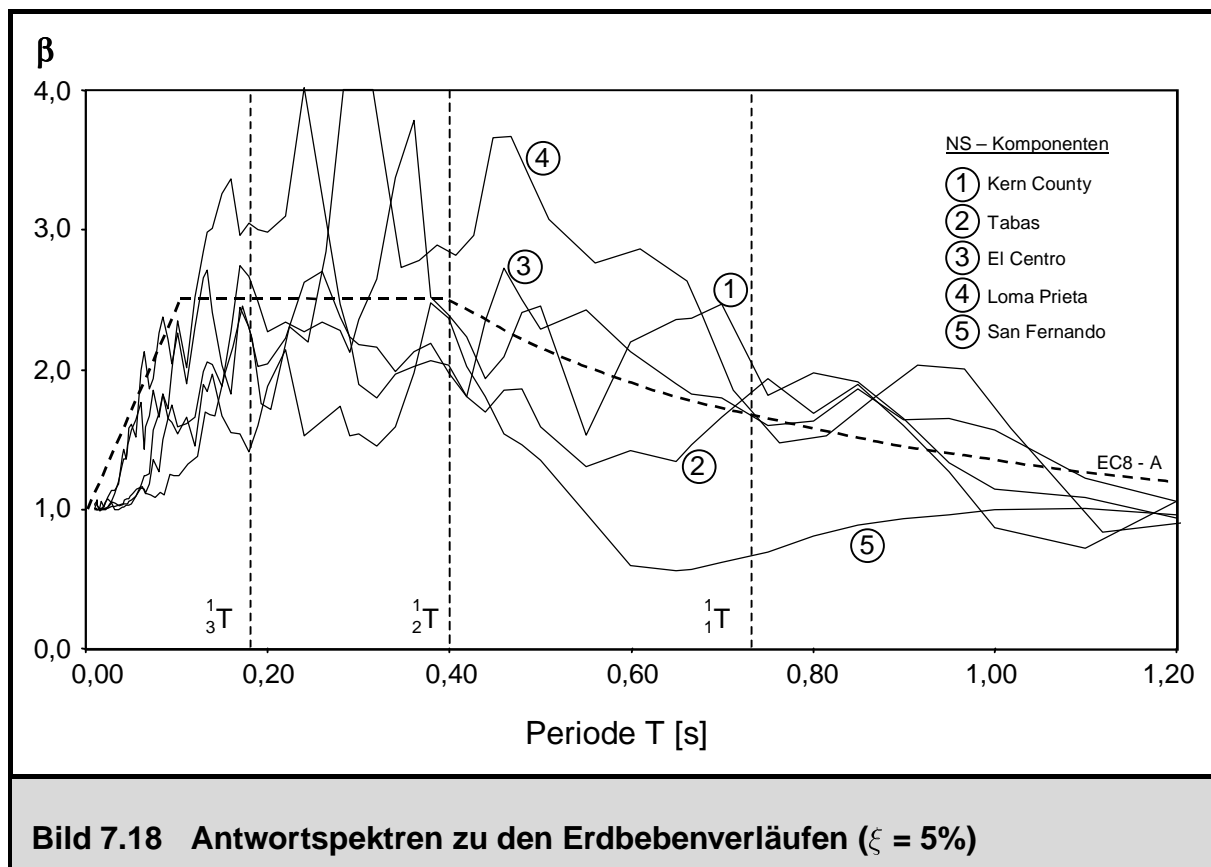
- (1) KERN COUNTY 21.07.1952 (Anhang Bild B1)
- (2) TABAS 16.09.1978 (Anhang Bild B2)
- (3) EL CENTRO 19.05.1940 (Anhang Bild B3)

(4) LOMA PRIETA 18.10.1989 (Anhang Bild B4)

(5) SAN FERNANDO 09.02.1971 (Anhang Bild B5)

Mit diesen Beschleunigungszeitverläufen werden die Tragwerksbeanspruchungen infolge horizontaler Erdbebenbeschleunigung bestimmt, wobei unterschiedliche Stufen der Nichtlinearität, im Folgenden als Fälle a – e bezeichnet, bei den Zeitverlaufsrechnungen berücksichtigt werden.

- a) Lineares Verhalten
- b) Nichtlineares Verhalten: Abheben in der Bodenfuge
- c) Nichtlineares Verhalten: Abheben in der Bodenfuge und nichtlinear elastisches Verhalten der Schale
- d) Nichtlineares Verhalten: Abheben in der Bodenfuge und nichtlineares Verhalten der Schale mit Vorschädigungsabspeicherung
- e) Nichtlineares Verhalten: Abheben in der Bodenfuge und nichtlinear elastisches Verhalten der Schale sowie Berücksichtigung des Stützenaufreißens



Vor dem Start der dynamischen Berechnungen wird das Eigengewicht statisch aufgebracht, der hierfür berechnete Gleichgewichtszustand dient als Ausgangszustand für die dynamische Analyse. Die Zeitverlaufsberechnungen (linear und nichtlinear) werden mit dem direkten Zeitintegrationsverfahren nach NEWMARK ( $\delta = 0,50$ ;  $\gamma = 0,25$ ) mit einer Zeitschrittweite von  $\Delta t = 0,005$  s für eine Bebedauer von 20 s durchgeführt und mit dem Verfahren der modalen Analyse unter Verwendung der doppelten Zeitschrittweite von  $\Delta t = 0,01$  s mit 95 Eigenformen je Umfangswelle (entspricht 27% der Systemfreiheitsgrade) gegengerechnet, um die Ergebnisse abzusichern. Bei linearen Verhältnissen reichen jedoch bereits 10 Eigenformen (nur Umfangswelle  $n = 1$ ) vollkommen aus. Als pauschale Tragwerksdämpfung wird ein LEHRsches Dämpfungsmaß von  $\xi = 0,05$  für alle Eigenformen berücksichtigt. Mit diesem werden äquivalente RAYLEIGH Dämpfungsparameter aus den ersten beiden Tragwerksperioden in Umfangswelle  $n = 1$  bestimmt ( ${}^1_1T = 0,73$  s,  ${}^1_2T = 0,40$  s  $\rightarrow \alpha_M = 0,555$  und  $\alpha_K = 0,004$ ), die für die direkte Zeitintegration benötigt werden.

#### 7.3.3.4 Lineare Strukturanalysen (Fall a)

Die einfachste Abschätzung der Tragwerksbeanspruchungen infolge Erdbebens erfolgt durch eine lineare statische Berechnung mit einer statischen Ersatzbeschleunigung. Hierzu wird aus der Periode der ersten Eigenschwingung  ${}^1_1T = 0,731$  s in Umfangswelle  $n = 1$  unter Auswertung des Antwortspektrums nach EC8–Baugrundklasse A (siehe Bild 7.13 und Bild 7.18) die dynamische Beschleunigungsüberhöhung bestimmt, die zu einer statischen Ersatzbeschleunigung nach Gleichung (7.3) führt. Mit dieser wird der zugehörige Lastvektor als Eingangswert für die statische Berechnung nach Gleichung (6.38) aufgebaut.

$${}^1_1\beta \cdot \ddot{v}_{gr} = 2,50 \cdot \left( \frac{0,40}{0,731} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \ddot{v}_{gr} = 1,673 \cdot 3,50 = 5,86 \text{ m/s}^2 \quad (7.3)$$

Beim Verfahren der statischen Ersatzbeschleunigung geht jedoch nur die dynamische Überhöhung der ersten Eigenperiode ein, nicht die Gestalt der Eigenform. Die Ersatzhorizontalkräfte verlaufen somit affin zur Wanddickenverteilung. Beim Vergleich der Ergebnisse aus statischer Ersatzbeschleunigung mit dem Antwortspektrenverfahren nach Tabelle 7.3 wird deutlich, dass mit statischen Ersatzlasten lediglich die Bodenpressung, die größten Stützenkräfte und die Stützenbewehrung mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden. Für die Schalenschnittgrößen, die erforderliche Schalenbewehrung und den Risslastfaktor treten erhebliche Diskrepanzen auf; für diese Größen erweisen sich die Ergebnisse nach dem statischen Ersatzbeschleunigungsverfahren als nicht konservativ. Dies rührt daher, dass dabei lediglich die resultierende



Ergebnisse für die Schale und abhebende Bereiche (lineare Dynamik)							
	erf $a_{s1}$ [cm <sup>2</sup> /m]	erf $a_{s2}$ [cm <sup>2</sup> /m]	max $n^{<22>}$ [kN/m]	max $P_{bod}$ [kN/m]	abheb. Winkel	Abheben g + $\lambda \cdot (e/w)$	Erstriss g + $\lambda \cdot (e/w)$
stat. Ersatzlast	7,2	8,9	331	2050	-10° – 10°	0,98	1,30
Antwspektrenv.	9,0	13,3	595	2132	-20° – 20°	0,91	0,94
Kern County	12,5	22,2	1014	2518	-40° – 40°	0,68	0,69
Tabas	11,0	18,6	850	2299	-30° – 30°	0,79	0,77
El Centro	8,7	12,8	578	2055	-10° – 10°	0,98	0,95
Loma Prieta	10,8	12,1	540	2039	-5° – 5°	1,00	0,99
San Fernando	5,6	2,7	99	1422	-----	2,55	1,74
BTR 97	16,0	18,3	808 <sup>1)</sup>	2342 <sup>2)</sup>	-----	1,82	1,36

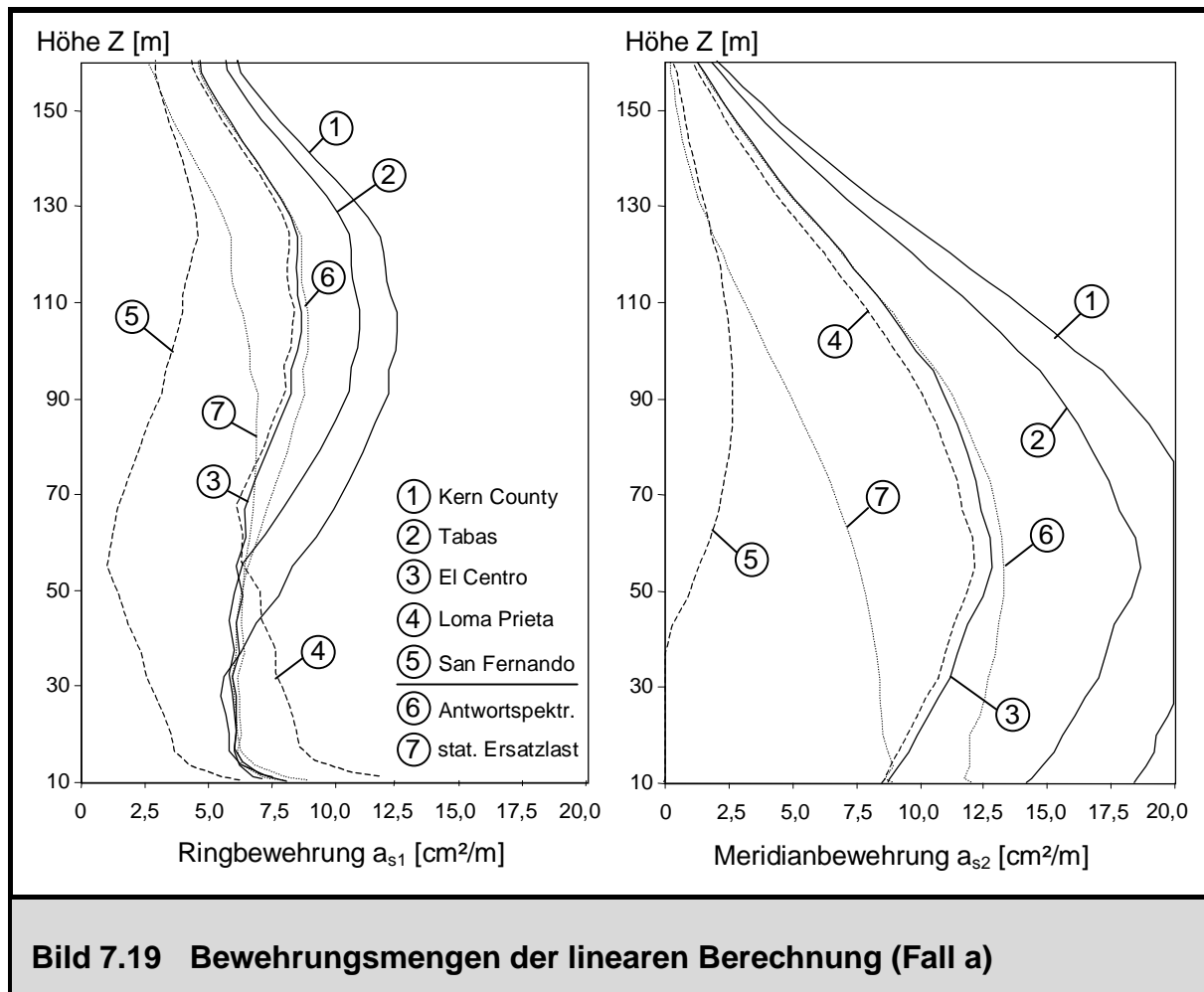
Ergebnisse für das Stützenfachwerk (lineare Dynamik)							
	min $P_{stü}$ [kN]	max $P_{stü}$ [kN]	min $P_{stü}$ (1-1/2)	max $P_{stü}$ (1-1/2)	min $P_{stü}$ (23-1/2)	max $P_{stü}$ (23-1/2)	$A_{s,stü}$ [cm <sup>2</sup> ]
stat. Ersatzlast	-13057 (16-1)	+ 5864 ( 8-2)	- 8010 - 9102	+ 817 + 1909	- 9102 - 8010	+ 1909 + 817	157 ( 9-2) 2,46 %
Antwspektrenv.	-12152 (14-1)	+ 4959 (10-2)	- 8608 - 8952	+ 1415 + 1759	- 8952 - 8608	+ 1759 + 1415	138(10-2) 2,16 %
Kern County	-12759 ( 9-2)	+ 5539 (15-1)	-10299 -10744	+ 3054 + 3059	-10299 -10295	+ 3502 + 3058	158(14-1) 2,48 %
Tabas	-13084 (15-1)	+ 5860 ( 9-2)	- 9553 - 9506	+ 622 + 1190	- 8417 - 7836	+ 2277 + 2323	164 ( 9-2) 2,57 %
El Centro	-13048 (16-1)	+ 5829 ( 8-2)	- 8376 - 8447	+ 779 + 1645	- 8861 - 8003	+ 1213 + 1147	161 ( 9-2) 2,54 %
Loma Prieta	-15498 (10-2)	+ 8276 (14-1)	- 7469 - 8533	+ 1065 + 1093	- 8325 - 8294	+ 1323 + 260	226(14-1) 3,55 %
San Fernando	-10859 (12-1)	+ 3642 (12-2)	- 5389 - 5674	- 1461 - 1756	- 5444 - 5749	- 1525 - 1811	108(12-2) 1,69 %
BTR 97	-10746 <sup>2)</sup> (10-1)	+ 1054 <sup>1)</sup> ( 1-2)	- 6125 <sup>2)</sup> - 5953 <sup>2)</sup>	+ 971 <sup>1)</sup> + 1054 <sup>1)</sup>	- 5953 <sup>2)</sup> - 6125 <sup>2)</sup>	+1054 <sup>1)</sup> + 971 <sup>1)</sup>	16Ø20 gew

<sup>1)</sup> g + 1,75·w                      <sup>2)</sup> 1,75 · (g + w)

**Tabelle 7.3 Ergebnisse der linearen Erdbebenberechnungen (Fall a)**

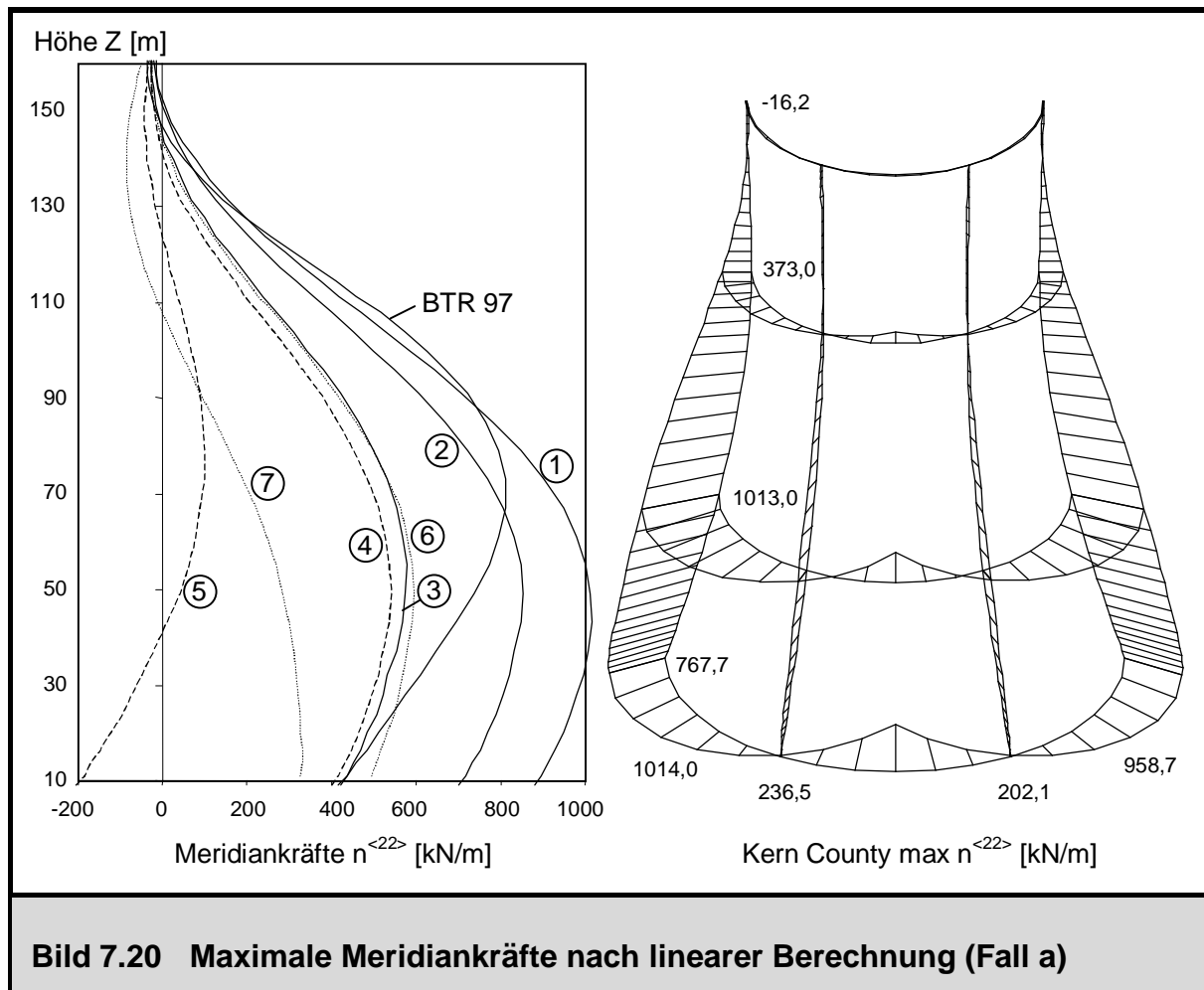
Gesamthorizontalkraft infolge Bodenbeschleunigung (base shear), die in der Bodenfuge übertragen werden muss, und somit auch die Stützenkräfte und Beanspruchung im unteren Schalenbereich richtig erfasst werden. Die Gestalt der partizipierenden Eigenformen nach Bild 7.17 und damit auch die Verteilung der Trägheitskräfte über die Höhe in Abhängigkeit der Schwingform findet beim Verfahren der statischen Ersatzbeschleunigung im Gegensatz zum Antwortspektrenverfahren keine Berücksichtigung.

Beim Vergleich der Ergebnisse der statischen Lastfälle nach BTR 97 mit den Ergebnissen des Antwortspektrenverfahrens für die horizontale Erdbebenbeschleunigung  $\ddot{v}_{gr} = 3,5 \text{ m/s}^2$  in Tabelle 7.3 fällt auf, dass für die Schale (Meridianzugkräfte, erforder-



liche Bewehrungsmengen) die statischen Lastfälle nach BTR 97 maßgebend werden. Dies gilt jedoch nicht für die Stützenkräfte. Obgleich die maximalen Stützendruckkräfte für beide Beanspruchungsarten in der gleichen Größenordnung liegen, treten für die Erdbebenlastkombination um ein Vielfaches höhere Stützenszugkräfte auf, so dass die dreifache Bewehrungsmenge gegenüber der Bewehrung von  $16\text{Ø}20$  aus den statischen Kombinationen nach BTR 97 erforderlich wird.

Im Rahmen der dynamischen Untersuchungen werden nun die im Abschnitt 7.3.3.3 vorgestellten, auf die Maximalbeschleunigung  $\ddot{v}_{gr} = 3,5 \text{ m/s}^2$  skalierten Zeitverläufe verschiedener Erdbeben auf die Struktur aufgebracht. Das SAN FERNANDO Beben besitzt nach Bild 7.18 im Bereich der ersten Eigenperiode keine ausgeprägte dynamische Überhöhung. Somit werden nach Tabelle 7.3 durch dieses Beben im Vergleich zu den übrigen Ergebnissen (statische Ersatzbeschleunigung, Antwortspektrenverfahren EC8–A, restliche Zeitverlaufsberechnungen) keine nennenswerten Beanspruchungen in der Schale hervorgerufen; auch die maximale Bodenpressung fällt vergleichsweise gering aus. Die maximalen und minimalen Stützensnormalkräfte treten im Stützenpaar 12 direkt bei  $\theta^1 = 90^\circ$  auf. Dies ist ein Zeichen dafür, dass in der Strukturantwort die zweite Eigenform nach Bild 7.17 (horizontale Starrkörperbewegung der Schale)



stark dominiert, die im Wesentlichen einen sinusförmigen Schubkraftverlauf  $n^{<12>}$  in der Schale und somit maximale Stützenkräfte bei  $\theta^1 = 90^\circ$  verursacht. Dahingegen werden Kippschwingungen (erste und dritte Eigenform nach Bild 7.17), die die größten Meridiankräfte  $n^{<22>}$  und daraus Stützenkräfte bei  $\theta^1 = 0^\circ$  und  $\theta^1 = 180^\circ$  erzeugen, durch dieses spezielle Beben nur geringfügig angeregt. Bestätigt wird dies außerdem im Bild 7.18 durch das Antwortspektrum für das SAN FERNANDO Beben, das eine schwache Überhöhung für die erste Eigenform und eine starke Überhöhung für die zweite Eigenform aufweist. Im Allgemeinen kann festgestellt werden, dass die Kippbiegeschwingungen im Verhältnis zur horizontalen Starrkörperschwingung der Schale an Einfluss gewinnen, je weiter der Ort der maximalen Stützenkräfte vom Stützenpaar 12 ( $\theta^1 = 90^\circ$ ) entfernt ist. Die Orte der maximalen Stützenkräfte (Zug- und Druckkraft) sind einander zugeordnet. Tritt die maximale Zugkraft in der ersten Stütze eines Stützenpaars (z.B. Stütze X-1) auf, so befindet sich die zugehörige maximale Druckkraft in der zweiten Stütze des korrespondierenden Stützenpaars (z.B. Stütze Y-2) und umgekehrt. Dabei ergibt die Summe  $X + Y$  für die vorliegende Geometrie (23 Stützenpaare auf dem halben Umfang, siehe Bild 7.12) immer den Wert 24. Dies bedeutet, dass die Orte der maximalen Stützenkräfte gleich weit vom Stützenpaar 12 ( $\theta^1 = 90^\circ$ ) entfernt sind, nur in die jeweils andere Richtung des Umfangs.

Das EL CENTRO und das LOMA PRIETA Beben liefern nahezu gleiche Ergebnisse (Bewehrungsmengen und maximale Meridianzugkräfte, siehe Bild 7.19 und 7.20) für die Schale, die erste Eigenform wird nach Bild 7.18 in gleicher Weise angeregt. Allerdings ruft das LOMA PRIETA Beben deutlich höhere Stützenkräfte als das EL CENTRO Beben hervor, da dieses von allen untersuchten Erdbeben die größte Antwort in der zweiten Eigenform besitzt. Dieser Effekt wirkt sich nach Bild 7.19 auch auf die Ringbewehrung im unteren Schalenbereich  $Z < 50$  m aus; infolge des LOMA PRIETA Bebens ist hier eine deutlich höhere Ringbewehrung als für die restlichen untersuchten Beben erforderlich, die aus der Schubbeanspruchung resultiert. Auch die Orte des Auftretens der minimalen und maximalen Stützenkräfte (Stützen 10–2 und 14–1) befinden sich für das LOMA PRIETA Beben im Vergleich zu den restlichen Beben wieder näher bei  $\theta^1 = 90^\circ$ .

Das TABAS und das KERN COUNTY Beben erzeugen ebenso untereinander sehr ähnliche Beanspruchungen. Im Vergleich zu den restlichen untersuchten Beben und dem Spektrum nach EC8–A wird hierbei die erste Eigenform übermäßig stark angeregt, so dass nach Bild 7.20 im Schalenbereich unterhalb 80 m wesentlich höhere Meridianzugkräfte auftreten, die auch die maximale Meridiankraft der statischen Kombinationen nach BTR 97 deutlich überschreitet und somit nach Bild 7.19 zu größeren erforderlichen Bewehrungsmengen  $a_{s2}$  führt (KERN COUNTY:  $22,2 \text{ cm}^2/\text{m} > \text{BTR 97: } 18,3 \text{ cm}^2/\text{m}$ ). Die Lastkombination  $g + \gamma_1 \cdot e$  des KERN COUNTY Bebens liefert mit  $\eta^{<22>} = 1014 \text{ kN/m}$  um 25% höhere Meridianzugkräfte als die statische Kombination  $g + 1,75 \cdot w$ . Abheben vom Boden und Aufreißen der Schale finden für dieses Erdbeben sehr früh bei  $\lambda_{\text{Abh}} = 0,68$  bzw.  $\lambda_{\text{Riss}} = 0,69$  statt, so dass sich signifikante nichtlineare Effekte einstellen werden.

Stützenaufreißen erfolgt bei einer Rissnormalkraft von 2300 kN und damit bei allen untersuchten Erdbeben, wohingegen bei den statischen Lastfallkombinationen nach BTR 97 diese Schranke unterschritten wird ( $\max P_{\text{stü}} = 1054 \text{ kN}$ , 46% der Risslast). Abgesehen vom Stützenaufreißen treten weitere ausgeprägte Nichtlinearitäten (Abheben vom Fundament und Reißen der Schale) nur beim EL CENTRO, TABAS und KERN COUNTY Beben auf, weshalb in den folgenden nichtlinearen dynamischen Untersuchungen nur diese weiter behandelt werden. Ferner wird an den Ergebnissen sehr deutlich, dass der Maximalwert der Bodenbeschleunigung nur wenig über die hervorgerufenen Beanspruchungen aussagt. Von großer Bedeutung ist der Frequenzgehalt des Bebens; dieser bestimmt, welche Eigenformen angeregt werden, was am Unterschied zwischen den beiden Extremfällen SAN FERNANDO und KERN COUNTY Beben deutlich wird. Aufschluss darüber gibt eine Transformation der Beschleunigungsverläufe in Antwortspektren gemäß Bild 7.18 oder eine Fouriertransformation in den Frequenzbereich.

## 7.3.3.5 Nichtlineare Strukturanalysen (Fall b)

Infolge der Beschleunigungsverläufe des KERN COUNTY, TABAS und EL CENTRO Bebens sind nach linearer dynamischer Berechnung Faktoren von  $\lambda_{Abh} < 1$  für die Beschleunigungen, die zum Abheben führen, bestimmt worden. Demnach treten gemäß Tabelle 7.4 Zugspannungen in der Bodenfuge auf, die in der Realität nicht wirken. Dem Abheben entgegen wirken das Fundamenteigengewicht sowie die Erdauflast auf dem Fundament, die zusammen 223,4 kN/m betragen. Zunächst wird daher in diesem Abschnitt im Rahmen der dynamischen Untersuchungen das Abheben des Kreisringfundaments vom Boden als einzige Nichtlinearität berücksichtigt.

Ein wesentlicher durch das Abheben verursachter Effekt ist die Reduktion der maximalen Meridianzugkräfte, deren Verläufe über die Schalenhöhe im Bild 7.22 dargestellt sind. Für das KERN COUNTY Beben, das die stärksten nichtlinearen Effekte hervorruft, kann eine Abnahme von  $n^{<22>} = 1014$  kN/m auf  $n^{<22>} = 780$  kN/m, also um ca. 23%, festgestellt werden. Für das TABAS Beben beträgt diese Abnahme noch 13%, und es stellt sich hierfür eine maximale Meridianzugkraft von  $n^{<22>} = 738$  kN/m ein. Das Abheben hat somit einen Abbau der Spitzenmeridianzugkraftbeanspruchung in der Schale zur Folge, die sich natürlich auf die erforderlichen Bewehrungsmengen auswirkt: Gegenüber der linearen Berechnung mit  $erf a_{s2} = 22,2$  cm<sup>2</sup>/m fällt diese nun mit  $erf a_{s2} = 17,0$  cm<sup>2</sup>/m im gleichen Verhältnis wie die Meridianzugkräfte ebenso um 23% geringer aus. Gemäß Bild 7.21 sind somit die erforderlichen Bewehrungsmengen  $a_{s1}$  und  $a_{s2}$  der Schale für alle untersuchten Beschleunigungszeitverläufe, selbst

Ergebnisse für die Schale und abhebende Bereiche (nichtlineare Dynamik: Abheben)							
	erf $a_{s1}$ [cm <sup>2</sup> /m]	erf $a_{s2}$ [cm <sup>2</sup> /m]	max $n^{<22>}$ [kN/m]	max $P_{bod}$ [kN/m]	abheb. Winkel	Abheben g + $\lambda \cdot e$	Erstriss g + $\lambda \cdot e$
Kern County	11,5	17,0	780	2406	-50° – 50°	-----	0,80
Tabas	10,7	15,9	738	2333	-40° – 40°	-----	0,83
El Centro	8,7	12,4	572	2051	-10° – 10°	-----	0,96

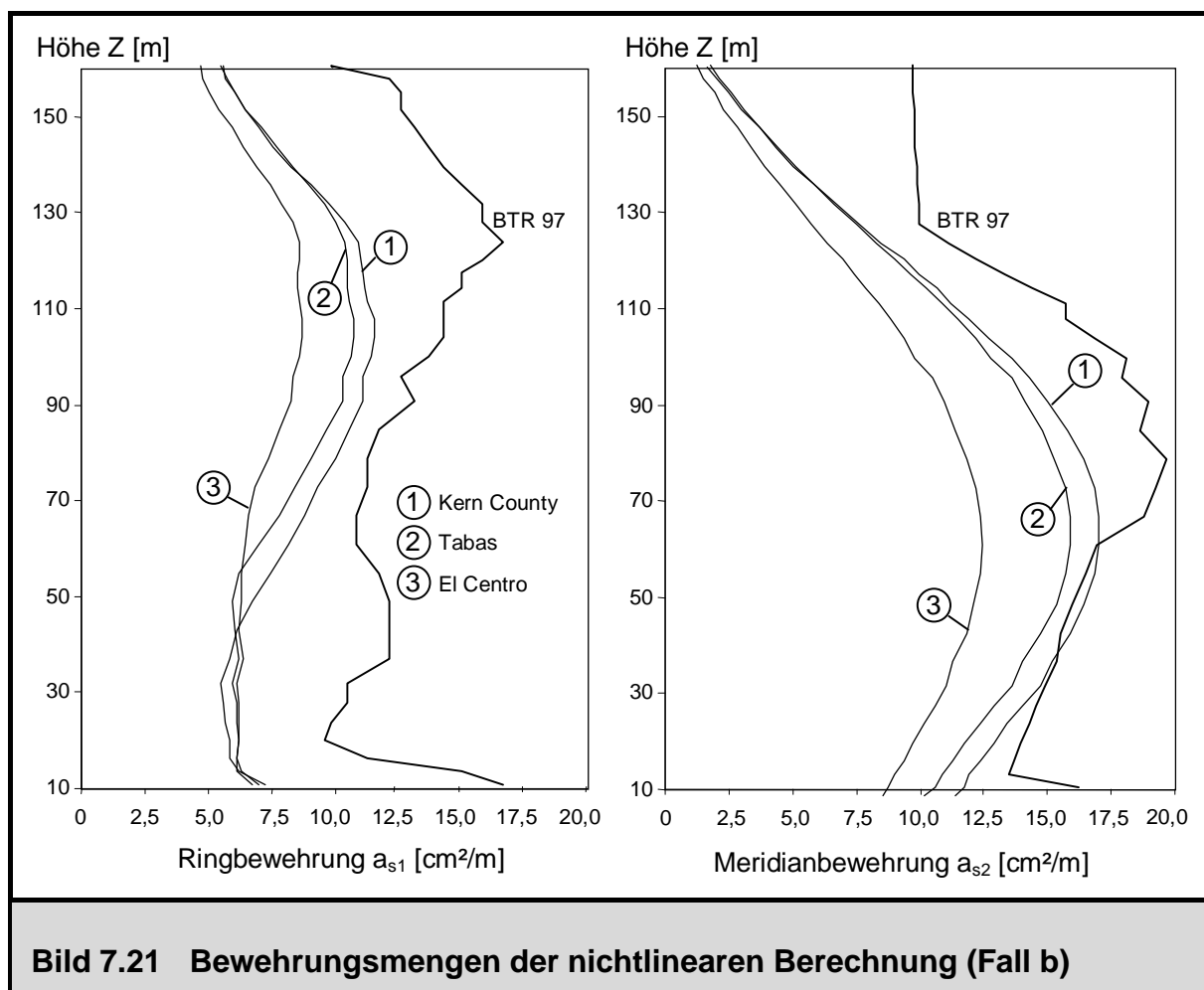
  

Ergebnisse für das Stützenfachwerk (nichtlineare Dynamik: Abheben)							
	min $P_{stü}$ [kN]	max $P_{stü}$ [kN]	min $P_{stü}$ (1-1/2)	max $P_{stü}$ (1-1/2)	min $P_{stü}$ (23-1/2)	max $P_{stü}$ (23-1/2)	$A_{s,stü}$ [cm <sup>2</sup> ]
Kern County	-12730 ( 9-2)	+ 5352 (16-1)	- 9796 -10193	+ 1434 + 1617	- 9545 - 9280	+ 1835 + 1231	157 (14-1) 2,46 %
Tabas	-13114 (15-1)	+ 5890 ( 9-2)	- 9701 - 9668	+ 954 + 1306	- 8555 - 8287	+ 1558 + 1270	164 ( 9-2) 2,58 %
El Centro	-13089 (16-1)	+ 5869 ( 8-2)	- 8366 - 8413	+ 713 + 1643	- 8855 - 7923	+ 1177 + 1090	162 ( 9-2) 2,55 %

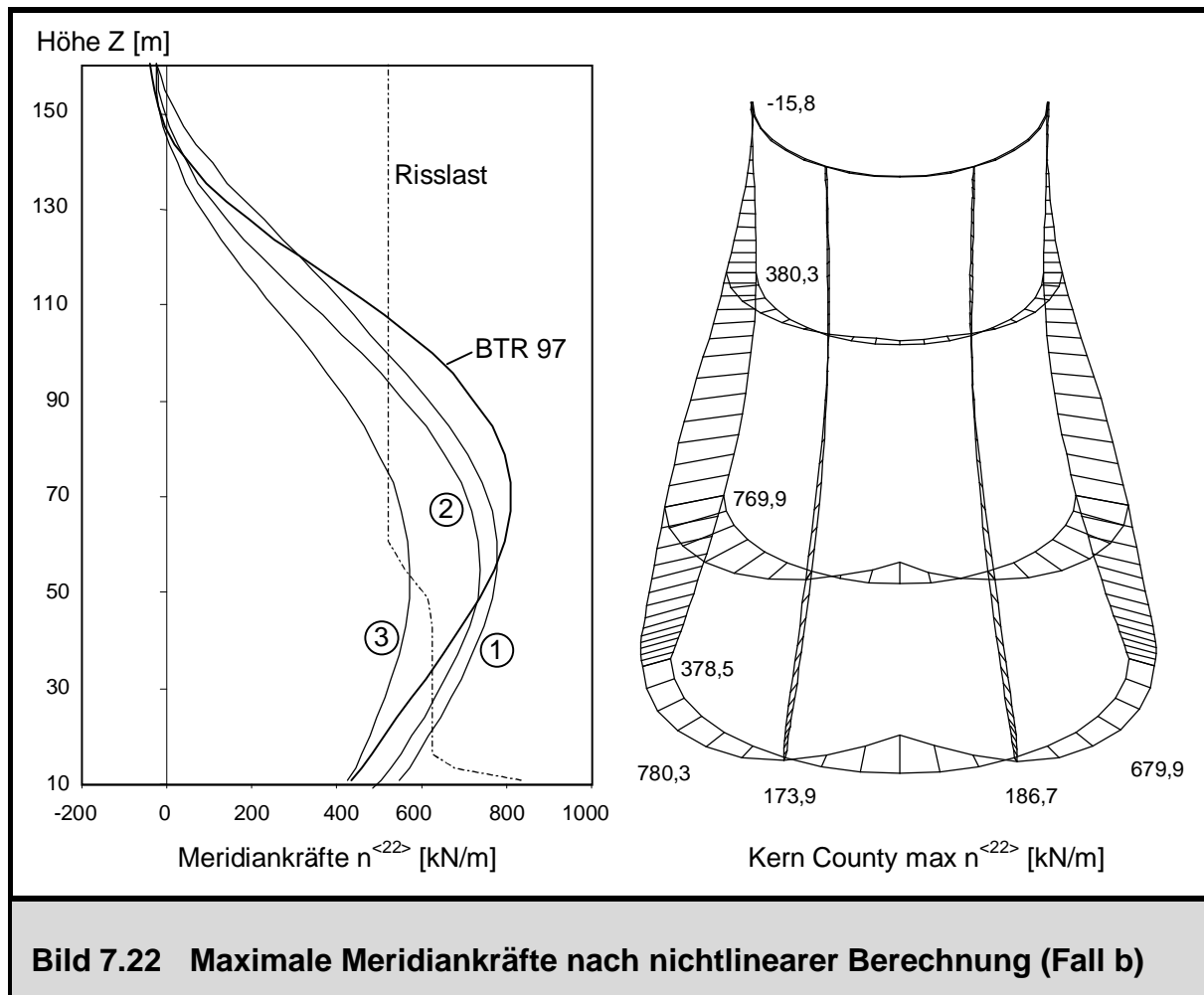
Tabelle 7.4 Ergebnisse der nichtlinearen Erdbebenberechnungen (Fall b)

für das KERN COUNTY Beben, unter Ausnutzen der günstigen Effekte des Abhebens mit der gewählten Bewehrung aus den statischen Lastkombinationen nach BTR 97 abgedeckt. Die Berücksichtigung des Abhebens als einzige Nichtlinearität hat zudem den Vorteil, dass die nichtlinearen Ergebnisse von der eingelegten Bewehrungsmenge unabhängig sind und somit keine Zusatzüberlegungen hinsichtlich einer Dimensionierungsstrategie angewendet werden müssen.

Als Folge des Ausfalls der Zugbettungskräfte in der Fundamentfuge vergrößert sich der abhebende Bereich gegenüber dem linear dynamischen Fall a. Die Vergrößerung des abhebenden Bereichs beträgt nach Tabelle 7.4 für das KERN COUNTY und TABAS Beben jeweils  $20^\circ$ . Die maximalen Bodenpressungen auf der dem abhebenden Bereich gegenüberliegenden Seite des Umfangs hingegen ändern sich bei der nichtlinearen dynamischen Berechnung nur unbedeutend. In [81] ist gezeigt worden, dass sich bei einer rein statischen Betrachtung die maximalen Pressungen infolge Horizontalbeschleunigung durch das Abheben vergrößern. Aufgrund der Trägheits- und Dämpfungskräfte tritt dieser Effekt in der dynamischen Berechnung nicht auf. Die dem abhebenden Bereich gegenüberliegende Seite spürt von dem kurzzeitigen Abheben, das pro Vorgang ca.  $0,1 \text{ s}$  ( $\approx \frac{1}{8} \cdot T$ ) dauert, aufgrund der Trägheit nichts.



**Bild 7.21 Bewehrungsmengen der nichtlinearen Berechnung (Fall b)**



Ein weiterer Effekt besteht in der Reduktion der Stützensugkräfte derjenigen Stützen, die sich in den abhebenden Bereichen befinden. Daher sind in den Tabellen 7.3–7.6 neben den extremen Stützenkräften des gesamten Umfangs auch die maximalen Stützenkräfte der Stützenpaare 1 ( $\theta^1 \approx 0^\circ$ ) und 23 ( $\theta^1 \approx 180^\circ$ ) angegeben. Für das KERN COUNTY Beben findet eine Verringerung der für diese Stützen maximalen Zugkraft von 3502 kN (Tabelle 7.3) auf 1835 kN (Tabelle 7.4) statt, was ungefähr 50% entspricht. Allerdings liegen die bemessungsrelevanten Zugstützen nicht im abhebenden Bereich. Für das KERN COUNTY Beben ist dies die Stütze 16–1, deren Stützenkopf sich bei  $\theta^1 \approx 121,3^\circ$  befindet (also außerhalb des abhebenden Bereichs). Die genannten maßgebenden Stützen erhalten den wesentlichen Anteil ihrer Stützenkräfte nicht aus der Kippschwingung (erste Eigenform nach Bild 7.17), die Stützenkräfte nahe der Symmetrieebene  $x^2 = 0$  hervorruft, sondern aus der horizontalen Starrkörperschwingung der Schale (zweite Eigenform nach Bild 7.17). Aus diesem Grund ändern sich nur die Stützenkräfte in den abhebenden Bereichen, nicht aber die maßgebenden maximalen Stützensugkräfte und zugehörigen Bewehrungsmengen in den Flanken.

Die auftretenden Meridianzugkräfte liegen dennoch auch nach ihrem Abbau infolge Abhebens noch deutlich über der Risslast, wie im Bild 7.22 zu erkennen ist, so dass die

Berücksichtigung der materiellen Nichtlinearität des Stahlbetons bei den dynamischen Berechnungen im nächsten Schritt (Fall c) erfolgt.

### 7.3.3.6 Nichtlineare Strukturanalysen (Fall c und Fall d)

Für den Fall c (Berücksichtigung des Abhebens in der Fundamentfuge und zusätzlich des nichtlinear elastischen Verhaltens der Schale, im Wesentlichen also das Reißen des Betons) sind zum Vergleich mit den linearen Berechnungen (Fall a, Tabelle 7.3) und den nichtlinearen Berechnungen mit Berücksichtigung des Abhebens als einzige Nichtlinearität (Fall b, Tabelle 7.4) wiederum in Tabelle 7.5 die wesentlichen Ergebnisgrößen angegeben. Gegenüber dem Fall b kann eine weitere Reduktion der Meridiankräfte  $n^{<22>}$  festgestellt werden. Für das KERN COUNTY Beben als stärkstes der untersuchten Beben beträgt die Abnahme bezogen auf die lineare Lösung 37% (Fall c: 634 kN/m, Fall a: 1014 kN/m); dies ist gegenüber der Berücksichtigung des Abhebens allein (Reduktion nur um 23%) nochmals eine deutliche Steigerung. Am Höhenverlauf der maximalen Meridiankräfte im Bild 7.24 ist zu erkennen, dass im Schalenbereich  $30 \text{ m} < Z < 90 \text{ m}$  die Rissnormalkraft von der maximalen Meridianzugkraft lediglich geringfügig überschritten wird. Auch die zugehörige Verteilung der maximalen Meridiankräfte über den Umfang im Bild 7.24 zeigt gegenüber Bild 7.20 eine Vergleichmäßigung der Beanspruchungen in den gerissenen Bereichen um  $\theta^1 = 0^\circ$  und um  $\theta^1 = 180^\circ$ .

Die auftretenden nichtlinearen dynamischen Effekte in der Schale sind mit denjenigen

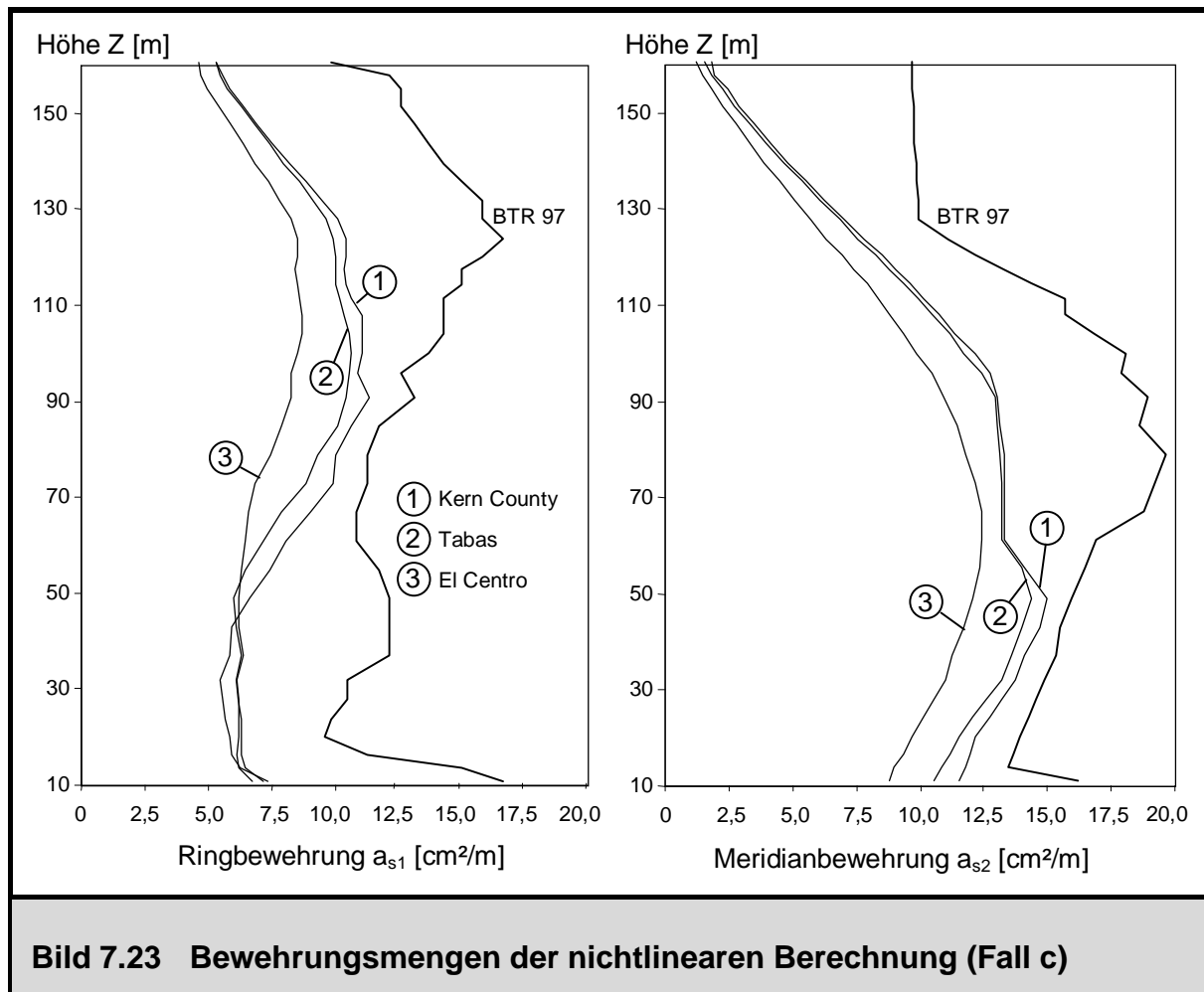
Ergebnisse für die Schale und abhebende Bereiche (Abheben und Aufreißen der Schale)							
	erf $a_{s1}$ [cm <sup>2</sup> /m]	erf $a_{s2}$ [cm <sup>2</sup> /m]	max $n^{<22>}$ [kN/m]	max $P_{\text{bod}}$ [kN/m]	abheb. Winkel	Abheben $g + \lambda \cdot e$	Erstriss $g + \lambda \cdot e$
Kern County	11,4	15,0	634	2397	-50° – 50°	-----	-----
Tabas	10,5	14,3	635	2312	-40° – 40°	-----	-----
El Centro	8,7	12,4	562	2041	-10° – 10°	-----	-----

Ergebnisse für das Stützenfachwerk (Abheben und Aufreißen der Schale)							
	min $P_{\text{stü}}$ [kN]	max $P_{\text{stü}}$ [kN]	min $P_{\text{stü}}$ (1-1/2)	max $P_{\text{stü}}$ (1-1/2)	min $P_{\text{stü}}$ (23-1/2)	max $P_{\text{stü}}$ (23-1/2)	$A_{s,\text{stü}}$ [cm <sup>2</sup> ]
Kern County	-12777 (10-2)	+ 5467 (14-1)	- 9747 -10148	+ 1398 + 1600	- 9522 - 9166	+ 1817 + 1211	156(14-1) 2,45 %
Tabas	-13126 (15-1)	+ 5864 ( 9-2)	- 9598 - 9575	+ 1007 + 1292	- 8556 - 8294	+ 1560 + 1262	164 ( 9-2) 2,57 %
El Centro	-13124 (16-1)	+ 5812 ( 8-2)	- 8324 - 8372	+ 677 + 1591	- 8894 - 7942	+ 1206 + 1084	161 ( 9-2) 2,53 %

**Tabelle 7.5 Ergebnisse der nichtlinearen Erdbebenberechnungen (Fall c)**



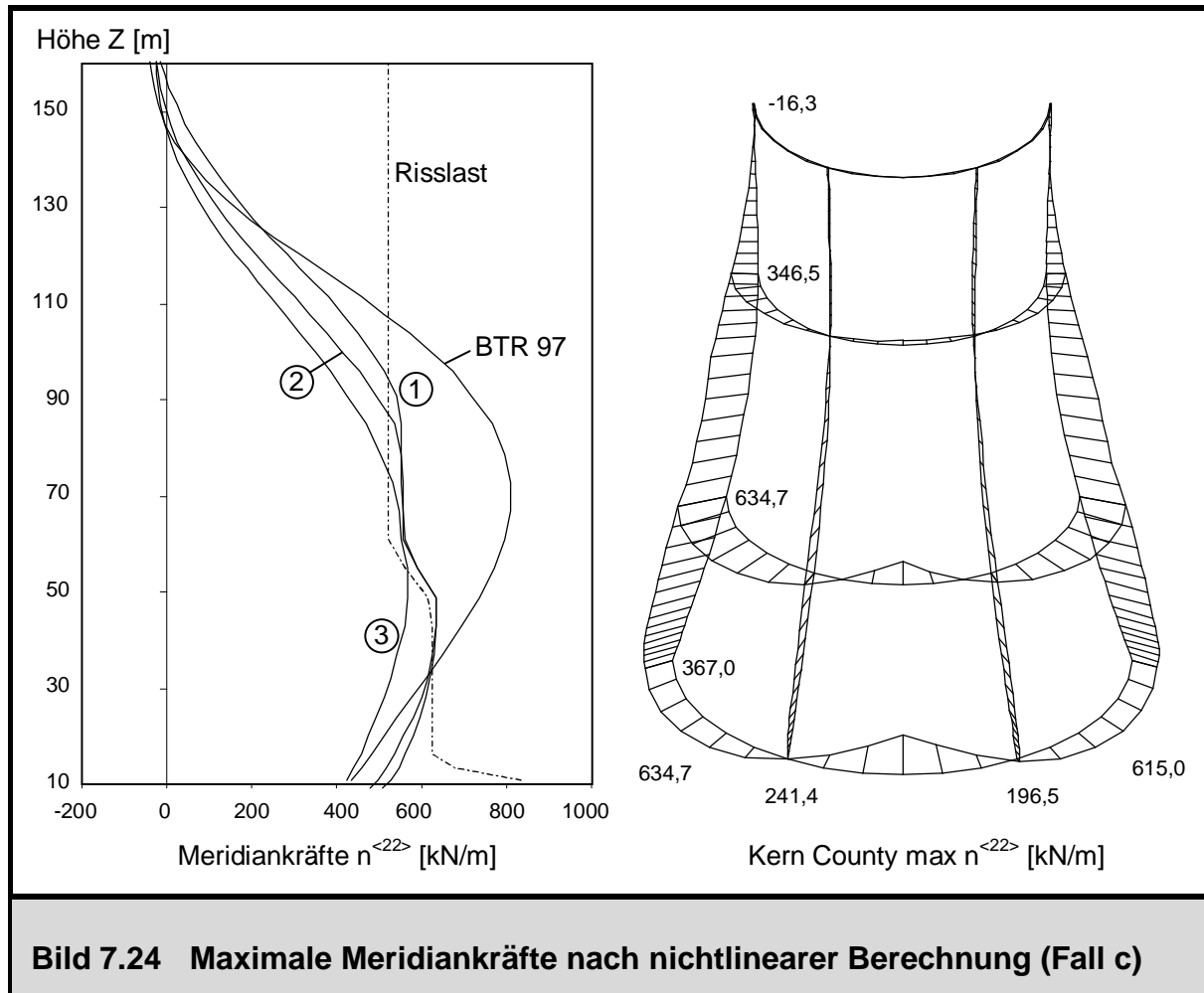


**Bild 7.23 Bewehrungsmengen der nichtlinearen Berechnung (Fall c)**

des Anwendungsbeispiels aus Abschnitt 3.8 vergleichbar: Denn auch im Falle des an dieser Stelle untersuchten einfachen Anwendungsbeispiels erfolgt nach Überschreiten der Risslast nur noch eine geringfügige Erhöhung der Schalenbeanspruchung aufgrund des plötzlichen Steifigkeitsverlusts. Wie im Abschnitt 3.8 gezeigt, dürfen bei der Aufstellung des dynamischen Gleichgewichts im Gegensatz zum statischen Gleichgewicht die Schnittgrößen (Rückstellkräfte) nie allein betrachtet werden, sondern müssen immer in Verbindung mit den zugehörigen Trägheits- und Dämpfungskräften gesehen werden.

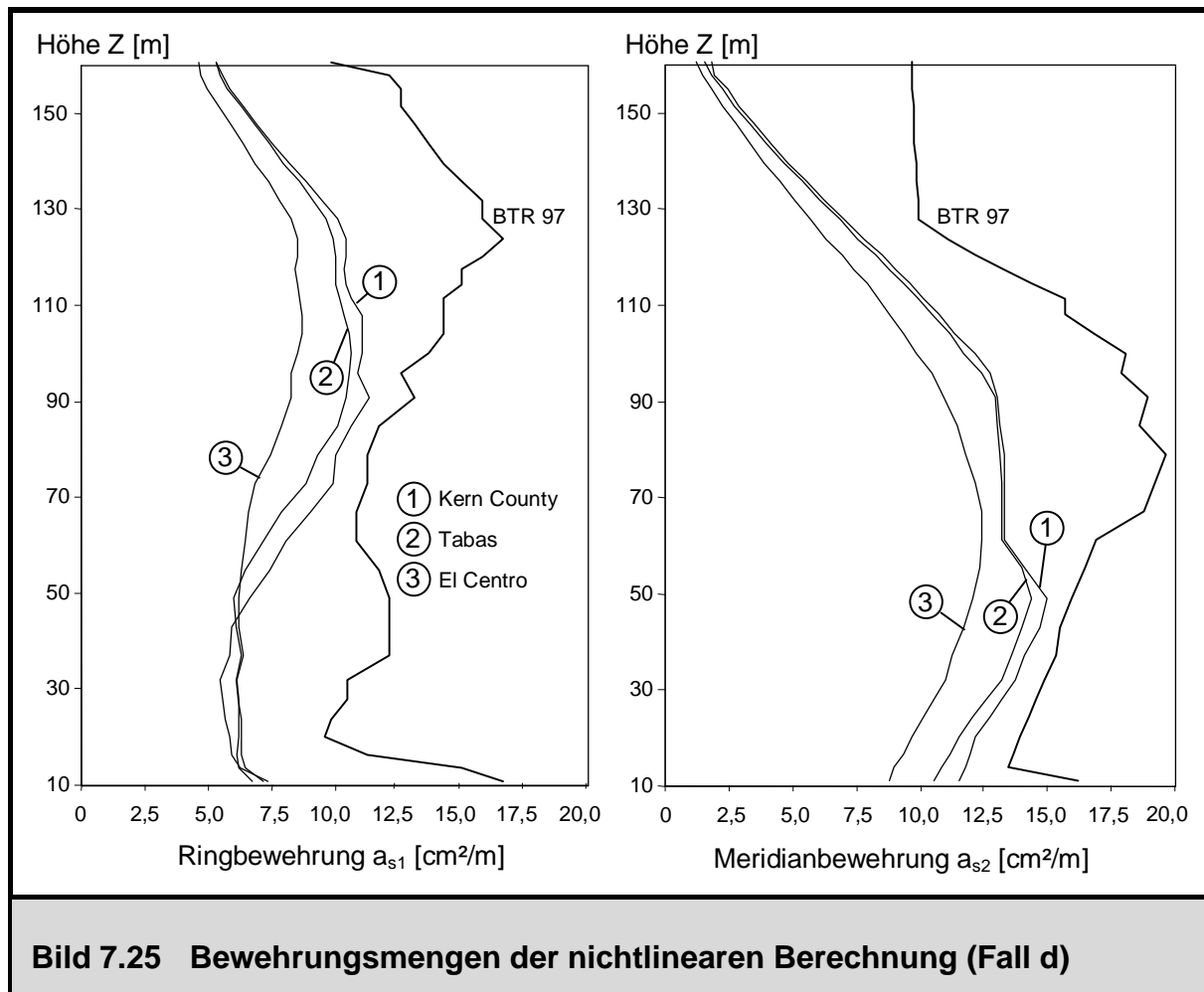
Die Stützenkräfte in den abhebenden Bereichen um  $\theta^1 = 0^\circ$  und  $\theta^1 = 180^\circ$ , in denen gleichzeitig auch die maximalen Meridianzugkräfte auftreten, reduzieren sich durch das zusätzliche Aufreißen nur noch geringfügig gegenüber dem Fall b. Die Größe und Lage der bemessungsrelevanten Stützenkräfte in den Flanken bleibt gegenüber dem linear elastischen Fall auch hier nahezu unverändert.

Mit den ermittelten nichtlinearen Schnittgrößen erfolgt im Programmnachlauf eine Bemessung. An der erforderlichen Ringbewehrung  $a_{s1}$  sind gegenüber dem Fall a und dem Fall b nur minimale Veränderungen festzustellen. Infolge des Abbaus der Meri-



dianzugkräfte nimmt jedoch die erforderliche Meridianbewehrung  $a_{s2}$  von  $22,5 \text{ cm}^2/\text{m}$  (Fall a) auf  $15,0 \text{ cm}^2/\text{m}$  (Fall c) ab. Das TABAS und KERN COUNTY Beben liefern nahezu die gleichen erforderlichen Meridianbewehrungsmengen. Diese verlaufen affin zu den maximalen Meridiankräften nach Bild 7.24. Für die Bemessung der Schale reicht somit die nach den statischen Lastkombinationen der BTR 97 berechnete Bewehrung aus; unter Ausnutzen der günstigen Effekte des Abhebens und des Reißens sind für alle untersuchten Beschleunigungsverläufe geringere Bewehrungsmengen erforderlich.

Gegenüber dem Abheben der Struktur in der Bodenfuge sind die zusätzlichen, durch die Berücksichtigung des Aufreißens des Stahlbetons hervorgerufenen Effekte allerdings nur von untergeordneter Bedeutung. Diese Aussage wird ebenso untermauert durch den Vergleich der Ergebnisse der Fälle c und d. Bei letzterem erfolgt eine Abspeicherung der Vorschädigung (Dehnungs- und Spannungsvorgeschichte) im zweiaxialen Werkstoffgesetz des Stahlbetons für die Schale während des Erdbebenzeitverlaufs im Gegensatz zum nichtlinear elastischen Werkstoffverhalten im Fall c. Exemplarisch sind im Bild 7.25 die maximalen erforderlichen Bewehrungsmengen  $a_{s1}$  und  $a_{s2}$  für den Fall d angegeben; die Berücksichtigung der Vorschädigung führt gegenüber dem Fall c zu



keiner bedeutenden Änderung des Beanspruchungszustands in der Schale sowie in den Stützen und liefert nahezu identische Bewehrungsmengen.

### 7.3.3.7 Nichtlineare Strukturanalysen (Fall e)

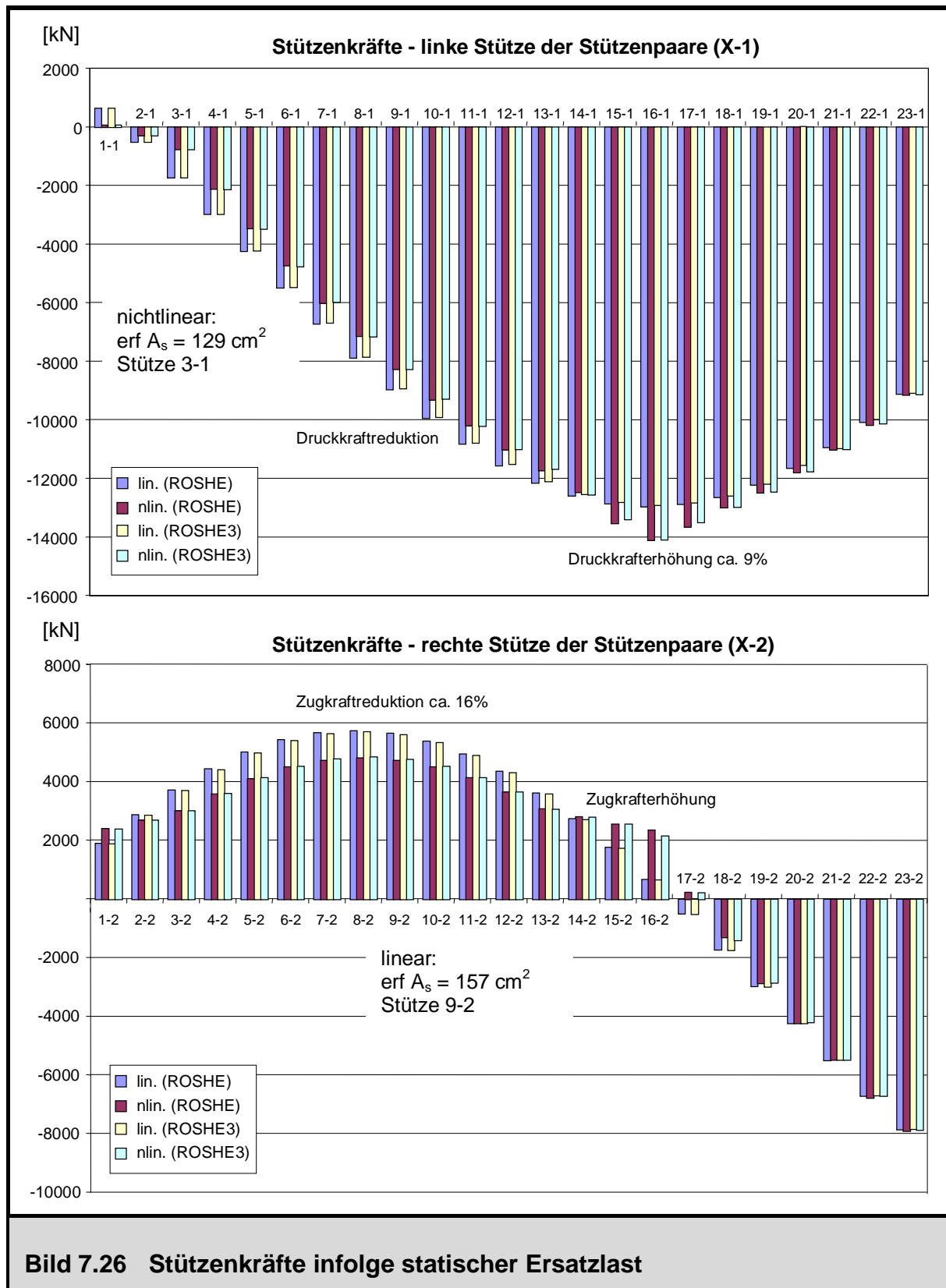
Bis zu diesem Punkt ist den Berechnungen ein linear elastisches Materialverhalten des Stützenfachwerks zugrunde gelegt worden; Nichtlinearitäten sind lediglich für die Schale und für die Bodenfuge (Abheben) berücksichtigt worden. Da jedoch bei allen untersuchten Erdbebenbeschleunigungsverläufen die Risslast von 2300 kN deutlich überschritten wird, liegt es nahe, diesem Verhalten in einer letzten Stufe der Untersuchungen (Fall e) Rechnung zu tragen.

Die einzelnen Stäbe des V-Stützenfachwerks verhalten sich im Wesentlichen wie ideale Fachwerkstäbe. Diese sind zwar an ihren Köpfen und Füßen in die angrenzenden Bauteile (Schale und Ringfundament) eingespannt, doch ihre Hauptbeanspruchungsart sind Normalkräfte. Dies ist zudem direkt anhand der Stützenbemessungsergebnisse nach Tabelle 7.3 belegbar: Zum einen fallen die Auftretensorte der maximalen

Bewehrungsmengen und der maximalen Stützensugnormalkräfte zusammen, zum anderen stammt der Großteil der erforderlichen Bewehrungsmenge aus dem Normalkraftanteil. Darüber hinaus treten aus Kompatibilitätsgründen (Behinderung der Verdrehung) Kopf- und Fußeinspannmomente auf: Zur Modellierung des Stützenverhaltens unter Zugkräften wird daher das Werkstoffgesetz eines einaxial beanspruchten Stahlbetonzugstabs in Anlehnung an DIN 1045-1 [33] und deren Vorentwürfe verwendet, das bereits im Kapitel 3, Bild 3.6 erläutert worden ist. Das Gesetz unterscheidet zwischen ungerissenem Bereich, Erstrissbereich, sukzessiver Rissbildung und Post-Yielding Bereich und wird im Wesentlichen durch die Querschnittsfläche und die Betonzugfestigkeit  $f_{ct} = 3,2 \text{ MN/m}^2$  der Stütze sowie durch die vorhandene Bewehrung, die anhand der Ergebnisse aus linearer Berechnung (Fall a) für das EL CENTRO, TABAS und KERN COUNTY Beben mit  $162 \text{ cm}^2$  ( $33\text{Ø}25$ ) gewählt worden ist, und deren Streckgrenze festgelegt. Das Gesetz wird in Abhängigkeit des Beanspruchungszustands in jedem Iterationsschritt für jede einzelne Stütze ausgewertet. Deren einzelne Elementbeiträge sind programmintern durch den Umfangsverschiebungsansatz gekoppelt, so dass für das Stützenfachwerkmakroelement die Einzelbeiträge aufsummiert werden und somit der Vektor der inneren Knotenkräfte und die tangentielle Steifigkeitsmatrix zur Verfügung gestellt werden.

Zunächst werden die Stützensugnormalkräfte nach dem Verfahren der statischen Ersatzbeschleunigung mit  ${}_1\beta \cdot \ddot{v}_{gr} = 5,86 \text{ m/s}^2$  berechnet. Dabei sind im Bild 7.26 zum einen die Ergebnisse nach linear elastischer Berechnung (Fall a), zum anderen die Ergebnisse mit Berücksichtigung des Aufreißens der Schale, des Abhebens in der Fundamentfuge und des Aufreißens der Stützen unter Zugnormalkräften (Fall e) angegeben. Weiterhin wird eine Vergleichsrechnung mit einem zweidimensionalen Modell durchgeführt (Programmsystem ROSHE3 [128]), bei der jede einzelne Stütze diskret abgebildet und eine Modellierung der Schale mit doppelt gekrümmten Dreieck- und Viereckelementen vorgenommen wird, um die Ergebnisse und die Art der Vorgehensweise mit dem „verschmierten“ Stützenfachwerkmakroelement auch im Hinblick auf die anschließenden dynamischen Untersuchungen mit Berücksichtigung des Stützensaufreißens abzusichern.

Wie im Bild 7.26 zu erkennen ist, liefern beide Modelle, die zwar mit den gleichen Werkstoffgesetzen, aber mit einem grundsätzlich verschiedenen Elementkonzept arbeiten, sehr gute Übereinstimmung sowohl in den linearen wie auch in den nichtlinearen Ergebnissen. Für die Stütze mit der maximalen Zugkraft (Stütze 8–2) und deren Nachbarbereich (3–2 bis 12–2) wird durch Berücksichtigung der genannten Nichtlinearitäten eine Reduktion der Stützenskraft um maximal ca. 16% hervorgerufen. Gleichzeitig nehmen auch die Druckkräfte in den zugehörigen Stützen 3–1 bis 12–1 ab. Horizontalkräfte werden als zugeordnete Kräftepaare in einer V-Stütze übertragen. Nimmt die Zugkraft eines V-Stützenpaares (z.B. Stütze 8–2) ab, so muss aus Gleichgewichts-



gründen auch die zugehörige Druckkraft des selben Stützenpaares (d.h. Stütze 8–1) abnehmen. Auf der gegenüberliegenden Seite des Umfangs vergrößern sich die maximalen Druckkräfte. Für die Stütze 16–1 beträgt die durch die nichtlinearen Effekte ver-

ursachte Druckkrafterhöhung ca. 9%. In der zugehörigen Zugstütze 16–2 des Stützenpaares 16 findet wieder aus Gleichgewichtsgründen eine Erhöhung der Zugkraft statt.

Die maximal erforderliche Stützenbewehrungsmenge nach linearer Berechnung beträgt  $157 \text{ cm}^2$  für die Stütze 9–2. Es wird nicht wie erwartet die Stütze 8–2 mit der maximalen Zugkraft maßgebend, sondern die Stütze 9–2 des benachbarten Stützenpaares, da diese bei nahezu gleicher Normalkraft höhere Biegemomente als Stütze 8–2 besitzt. Die maximale Stützenbewehrung, die sich aus der Bemessung mit den nichtlinearen Schnittgrößen ergibt, reduziert sich um ca. 18% auf  $129 \text{ cm}^2$ . Es fällt auf, dass die hierfür maßgebende Stütze 3–1 eine Stütze mit sehr geringer Druckkraft ist. Die zugehörigen Stützenbiegemomente, die sich gegenüber dem linear elastischen Fall a wesentlich erhöhen, sind Ursache dafür, dass nun die Stütze 3–1 zur bemessungsrelevanten Stütze wird. Zum Vergleich dazu ist für die unter linearen Verhältnissen maßgebende Stütze 9–2 nach der Zugkraftreduktion durch die nichtlinearen Effekte nur noch ein Bewehrungsquerschnitt von  $109 \text{ cm}^2$  erforderlich.

Die Abschätzung der Auswirkungen der nichtlinearen Effekte des Stützenreißen auf die Verteilung der Stützenkräfte mittels nichtlinearer statischer Berechnung mit Ersatzbeschleunigung ist lediglich eine stark vereinfachte Vorgehensweise. Deswegen werden zum Abschluss der Untersuchungen nochmals nichtlineare dynamische Berechnungen für die Beschleunigungsverläufe des KERN COUNTY, TABAS und EL CENTRO Bebens durchgeführt, deren Ergebnisse im Folgenden diskutiert werden. In Ta-

Ergebnisse für die Schale und abhebende Bereiche (Abheben und Aufreißen der Schale+Stützen)							
	erf $a_{s1}$ [ $\text{cm}^2/\text{m}$ ]	erf $a_{s2}$ [ $\text{cm}^2/\text{m}$ ]	max $n^{<22>}$ [kN/m]	max $P_{\text{bod}}$ [kN/m]	abheb. Winkel	Abheben $g + \lambda \cdot e$	Erstriss $g + \lambda \cdot e$
Kern County	11,6	15,1	642	2412	-50° – 50°	-----	-----
Tabas	10,4	14,0	625	2286	-40° – 40°	-----	-----
El Centro	8,6	12,3	566	2043	-10° – 10°	-----	-----

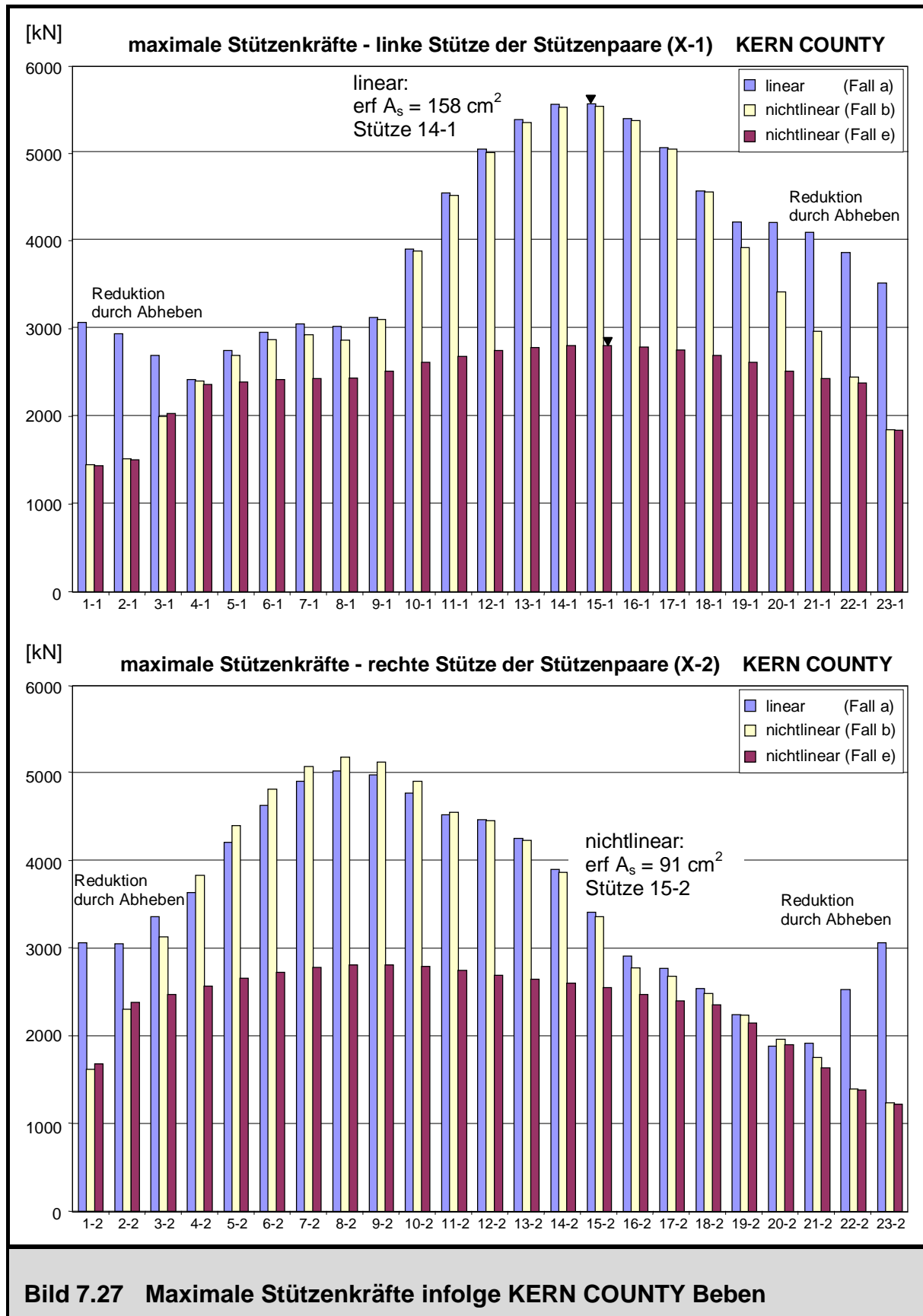
Ergebnisse für das Stützenfachwerk (Abheben und Aufreißen der Schale+Stützen)							
	min $P_{\text{stü}}$ [kN]	max $P_{\text{stü}}$ [kN]	min $P_{\text{stü}}$ (1-1/2)	max $P_{\text{stü}}$ (1-1/2)	min $P_{\text{stü}}$ (23-1/2)	max $P_{\text{stü}}$ (23-1/2)	$A_{s,\text{stü}}$ [ $\text{cm}^2$ ]
Kern County	-13373 (16-1)	+ 2805 ( 9-2)	- 9869 -10186	+ 1428 + 1679	- 9673 - 9123	+ 1833 + 1215	91 (15-2) 1,42 %
Tabas	-13504 (16-1)	+ 2867 ( 9-2)	- 9594 - 9388	+ 881 + 1425	- 8433 - 8177	+ 1539 + 1281	94 (16-2) 1,47 %
El Centro	-13802 (16-1)	+ 2932 ( 8-2)	- 8322 - 8394	+ 756 + 1737	- 8945 - 7958	+ 1224 + 1078	95 (15-2) 1,49 %

**Tabelle 7.6 Ergebnisse der nichtlinearen Erdbebenberechnungen (Fall e)**

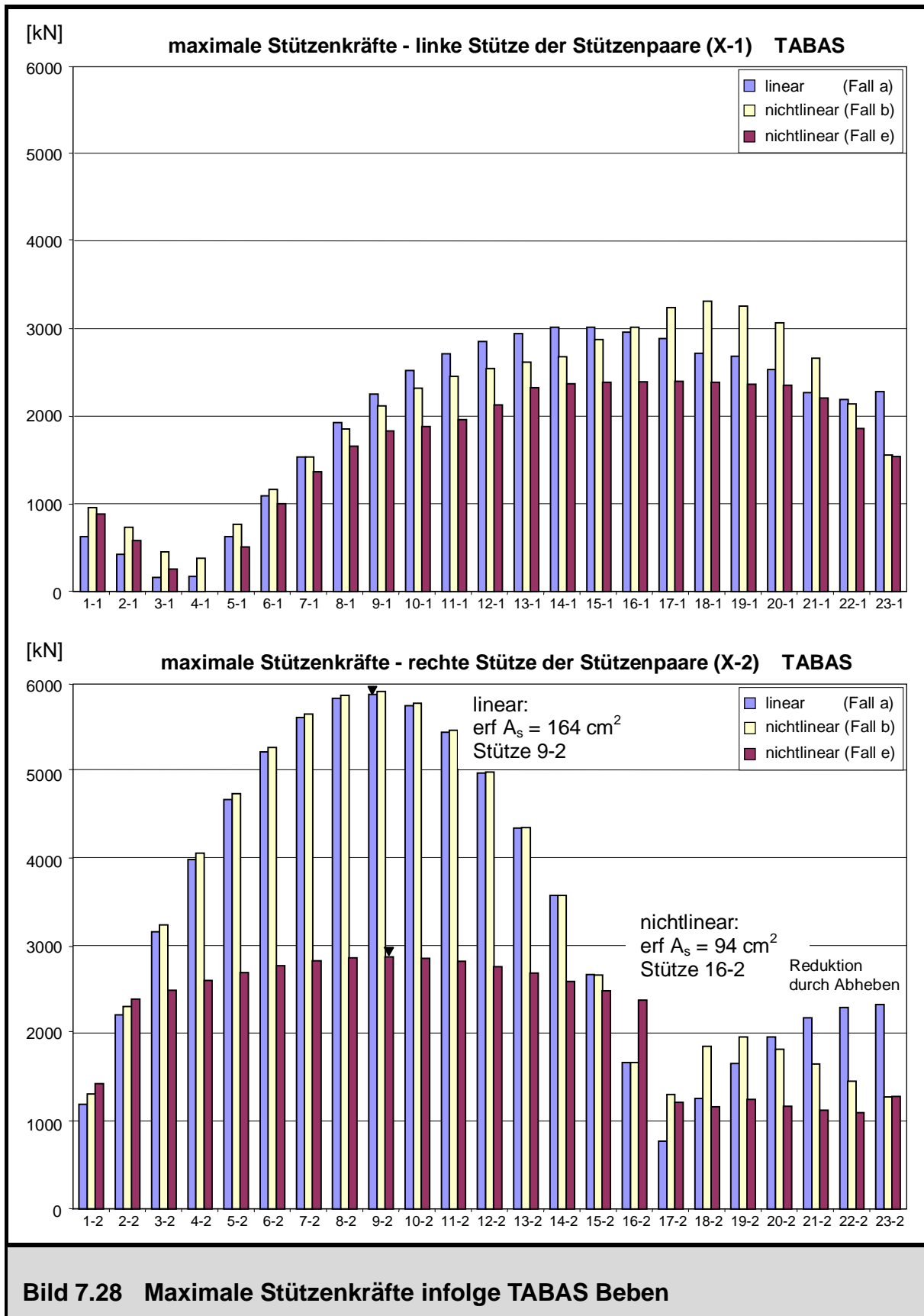
belle 7.6 sind wie in den Abschnitten zuvor die wesentlichen Ergebnisgrößen angegeben. Das zusätzliche Aufreißen der Stützen hat gegenüber den Fällen c und d keine wesentlichen Auswirkungen auf die maximalen Meridiankräfte  $n^{<22>}$  und die maximal erforderlichen Bewehrungsmengen  $a_{s1}$  und  $a_{s2}$ . Auch die abhebenden Bereiche und die maximalen Bodenpressungen bleiben unverändert. Die größten Stützenzugkräfte nahe der Symmetrieebene  $x^2 = 0$ , die exemplarisch für die Stützenpaare 1 und 23 angegeben sind, erfahren ebenso keine wesentlichen Veränderungen. In diesem Bereich hat bereits allein das Abheben (Fall b) zu einer deutlichen Reduktion der linear ermittelten Stützenkräfte (Fall a) geführt, so dass sich die Zugstützen in den abhebenden Bereichen der Beanspruchung entziehen und die Rissnormalkraft überhaupt nicht mehr erreicht wird. In den Flanken sind starke Stützenzugkraftreduktionen erkennbar, wie im Folgenden erläutert wird.

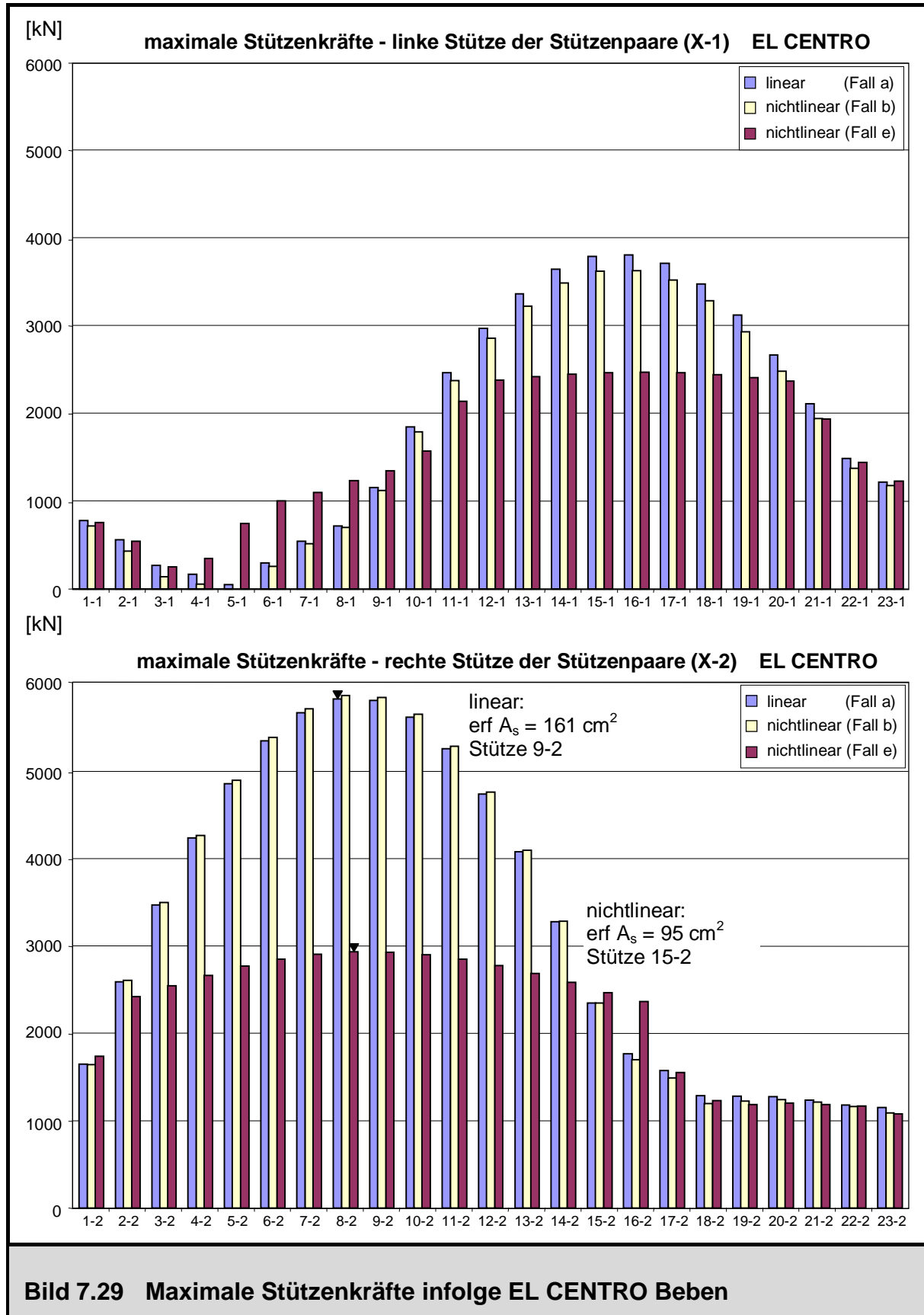
In den Bildern 7.27, 7.28 und 7.29 sind die Umfangsverteilungen der während der Erdbebenverläufe in den Stützen berechneten maximalen Zugkräfte für beide Stützen aller Stützenpaare dargestellt. Dabei werden die linearen Ergebnisse (Fall a), die nichtlinearen Ergebnisse unter Berücksichtigung des Abhebens allein (Fall b) und die nichtlinearen Ergebnisse unter Berücksichtigung des Abhebens, der physikalischen Nichtlinearität der Schale und des Aufreißen der Stützen (Fall e) angegeben. Für alle Beben haben die Verteilungen eine ähnliche charakteristische Gestalt. Jede der beiden Verteilungen für die linke bzw. rechte Stütze der Stützenpaare besitzt genau ein Maximum. Die Maxima befinden sich entweder im Bereich  $\theta^1 \approx 66,5^\circ$  (Stützenpaar 9) oder im Bereich  $\theta^1 \approx 113,5^\circ$  (Stützenpaar 15); diese liegen ferner für ein Beben immer auf entgegengesetzten Umfangsseiten. Die Differenz zwischen den beiden Maximalwerten, die beim TABAS Beben besonders stark ausgeprägt ist, erlaubt eine Aussage über die Gleichmäßigkeit der horizontalen Anregung in positive und negative  $x^1$ -Richtung. Durch das Abheben alleine (Fall b) reduzieren sich nur die maximalen Stützenzugkräfte derjenigen Stützen, die im abhebenden Bereich nahe der Symmetrieebene  $x^2 = 0$  liegen (Stützenpaare 1, 2, 3, 21, 22, 23). Nach dem Abheben liegt die Größe dieser Zugkräfte unterhalb der Risslast, so dass sich diese bei Einführung weiterer Nichtlinearitäten nur noch unbedeutend verändern. Die restlichen Stützenzugkräfte, insbesondere auch die Maximalwerte in den Flanken, bleiben dabei nahezu unberührt.

Erst durch die zusätzlich zum Abheben und zum physikalisch nichtlinearen Verhalten der Schale berücksichtigte Nichtlinearität des Stützenaufreißen und damit des Steifigkeitsverlusts infolge Rissbildung bei hohen Zugnormalkräften findet eine Reduktion der bemessungsrelevanten maximalen Zugkräfte in den Flankenbereichen statt. Beim KERN COUNTY Beben verringert sich die maximale Stützenzugkraft in Stütze 15–1 von 5539 kN auf 2800 kN um ca. 50%. Die maximal erforderliche Stützenbewehrung reduziert sich um 42% von 158 cm<sup>2</sup> auf 91 cm<sup>2</sup>. Auch beim TABAS und EL CENTRO Erdbeben finden Reduktionen der maximalen Stützenzugkräfte durch das Stützenrei-









ßen in der gleichen Größenordnung statt. Beim TABAS Beben beträgt diese 51% (Reduktion von 5860 kN auf 2867 kN für Stütze 9–2), beim EL CENTRO Beben 50% (Reduktion von 5829 kN auf 2932 kN für Stütze 8–2). Gleiches gilt für die hierfür erforderlichen Stützenbewehrungsmengen: Für die Bemessung der Stützen infolge TABAS Beben sind 164 cm<sup>2</sup> erforderlich (Stütze 9–2), die Bemessung mit nichtlinear ermittelten Schnittgrößen liefert 94 cm<sup>2</sup> (Stütze 16–2), was einer Reduktion um 42% entspricht. Beim EL CENTRO Beben beträgt die Stützenbewehrung für die linearen Schnittgrößen 161 cm<sup>2</sup> (Stütze 9–2), die bei der Bemessung mit nichtlinearen Schnittgrößen um 41% auf 95 cm<sup>2</sup> (Stütze 15–2) reduziert wird.

Die Abnahme der maximalen Stützennormalkraft infolge Berücksichtigung der nichtlinearen Effekte des Abhebens, des physikalisch nichtlinearen Verhaltens der Schale und des Aufreißens der Stützen (Fall e) gegenüber dem linearen Fall a liegt für die untersuchten Beben somit generell bei einem Wert von ca. 50%. Weiterhin fällt für die genannten Beschleunigungsverläufe im linearen Fall a die Lage der bemessungsrelevanten Stütze mit der Lage der Stütze mit maximaler Zugkraft entweder direkt zusammen, oder sie befinden sich in unmittelbarer Nachbarschaft. Dies gilt nun nicht mehr für die Stützenbemessung mit den nichtlinear ermittelten Schnittgrößen (Fall e). Hier liefert nicht die Stütze mit maximaler Zugkraft die maßgebende Bewehrungsmenge; die beiden Stützen (maximale Zugkraft und maximale Bewehrungsmenge im Fall e) liegen in größerem Abstand auf dem Umfang voneinander entfernt. Für die untersuchten Beben wird Stütze 15–2 bzw. Stütze 16–2 maßgebend, die eine geringere Zugkraft als die maximale Zugkraft in der vormals maßgebenden Stütze aufweist. Diese Tatsache bestätigt wiederum, dass nach dem Stützenaufreißen sich die Stützenbiegemomente vergrößern und somit nun bemessungsrelevant werden. Dieser Einfluss wird mit dem gewählten Modell der Steifigkeitsreduktion unter zentrischer Beanspruchung näherungsweise berücksichtigt. Der Effekt der Vergrößerung der Stützenbiegemomente nach dem Stützenaufreißen ist bei einer Dimensionierung mit nichtlinear ermittelten Schnittgrößen unbedingt zu berücksichtigen, so dass die Reduktion der Stützennormalkräfte niemals losgelöst von den Biegemomenten betrachtet werden darf.

#### 7.3.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die wesentlichen Ergebnisse und Erkenntnisse des behandelten Anwendungsbeispiels eines Naturzugkühlturms mit einer Gesamthöhe von 177 m unter horizontalen Bodenbeschleunigungen werden zum Abschluss dieses Kapitels nochmals stichpunktartig zusammengefasst. Die angesetzte Horizontalbeschleunigung  $\ddot{v}_{gr} = 3,5 \text{ m/s}^2$  lässt sich dabei gemäß der in [71] gegebenen empirischen Beziehung zwischen die Intensitätsstufen IX und X einordnen und entspricht somit einem relativ starken Beben an der

oberen Grenze des ingenieurmäßig relevanten Bereichs.

- Die Schalenbeanspruchungen infolge der Erdbebeneinwirkungskombination liegen nach den Ergebnissen der linearen dynamischen Untersuchungen in der gleichen Größenordnung wie diejenigen infolge der statischen Kombinationen nach BTR 97. Die dynamische Antwort ist wesentlich vom Frequenzgehalt der Erregung bei gleicher Grundbeschleunigung abhängig (Unterschiede zwischen den Extremfällen SAN FERNANDO und KERN COUNTY Beben). Lediglich bei Beben, die die erste Eigenform des Kühlturms übermäßig stark anregen (TABAS und KERN COUNTY Beben), stellen sich höhere Meridiankräfte verbunden mit höheren erforderlichen Meridianbewehrungsmengen als für die statischen Kombinationen nach BTR 97 ein.
- Allein durch das Abheben des Fundaments vom Boden werden die Schalenbeanspruchungen derart reduziert, dass die Erdbebenbemessung der Schale im Vergleich zur linearen Bemessung mit den Beanspruchungen aus den statischen Lastfällen nach BTR 97 nicht mehr maßgebend wird. Die Vorgehensweise der Berücksichtigung des Abhebens als alleinige Nichtlinearität bietet sich bevorzugt an, da die Problematik der Kopplung des Beanspruchungszustands an die Bewehrungsmenge entfällt.
- Die zusätzlichen Auswirkungen des physikalisch nichtlinearen Werkstoffverhaltens des Stahlbetons für die Schale gegenüber dem Abheben liefern weitere Beanspruchungsreduktionen, sind aber im Hinblick auf die Bemessung im Vergleich zu den statischen Lastfällen nach BTR 97 nicht weiter relevant.
- Den kritischen Tragwerksbereich unter Erdbebeneinwirkungen stellt das Stützenfachwerk dar, da dieses sehr große Schubkräfte übertragen muss. Die Beanspruchungen der Einzelstützen unter linearen Verhältnissen können mit ausreichender Genauigkeit sehr vereinfacht mit dem Verfahren der statischen Ersatzbeschleunigungen ermittelt werden. Die Verwendung des entwickelten Stützenfachwerkmaкрoringelements hat sich in diesem Zusammenhang ebenso bewährt. Die maximalen Stützendruckkräfte unter Erdbeben besitzen die gleiche Größenordnung wie diejenigen infolge der statischen Kombination  $1,75 \cdot (g + w)$ . Allerdings fallen die maximalen Stützenszugkräfte etwa um das Fünf- bis Sechsfache höher aus als diejenigen aus der statischen Kombination  $g + 1,75 \cdot w$ , so dass die Stützenrissnormalkraft nach linearer Berechnung bei allen untersuchten Erdbeben deutlich überschritten wird.
- Zur wirklichkeitsnäheren Erfassung des nichtlinearen Verhaltens des Stützenfachwerks ist in einem letzten Schritt das Aufreißen der Einzelstützen berücksichtigt worden, indem die Steifigkeitsabnahme nach Überschreiten der Zugfestigkeit

idealisiert durch das Werkstoffgesetz eines zentrischen Zugstabs erfasst wird. Die bemessungsrelevanten Stützenszugkräfte in den Flanken unter der Erdbebeneinwirkung reduzieren sich durch das Aufreißen bei allen untersuchten Beben um ca. 50%. Gleichzeitig damit erfolgt allerdings der Aufbau von Stützenbiegemomenten, so dass die nach dem Reißen bemessungsrelevante Stütze nicht mehr mit derjenigen Stütze, in der die maximale Zugkraft auftritt, zusammenfällt.

Das Konzept des Eurocode 8 [38] sieht vor, bei einer linearen Berechnung den unberücksichtigten nichtlinearen Effekten durch einen pauschalen Verhaltensbeiwert  $q$  Rechnung zu tragen, der für Stahlbetonstrukturen mit unterschiedlicher Duktilität und Redundanz Werte zwischen 1,0 und 5,0 annimmt. Mit diesem Faktor dürfen die linear ermittelten Erdbebeneinwirkungen abgemindert werden, so dass für die Beanspruchungen Gleichung (7.4) gelten soll.

$$S_{d \text{ linear}}(g + \gamma_1 \cdot \ddot{v}_{gr}/q) \stackrel{!}{=} S_{d \text{ nichtlinear}}(g + \gamma_1 \cdot \ddot{v}_{gr}) \quad (7.4)$$

Aus den durchgeführten nichtlinearen dynamischen Untersuchungen pauschale Verhaltensbeiwerte abzuleiten erweist sich aufgrund der folgenden Argumente, die zum Teil bereits angeklungen sind, als nicht unproblematisch:

- Der Grad der Reduktion der linearen Schnittgrößen und somit die Stärke des nichtlinearen Verhaltens ist von der Größe der Bodenbeschleunigung und dem Frequenzgehalt des Bebens in Zusammenhang mit den Tragwerkseigenfrequenzen abhängig.
- Eine weitere entscheidende Rolle spielt die Lastkombination, in der die Erdbebeneinwirkung auftritt. So wirkt ein hohes Eigengewicht z.B. dem Abheben in der Fundamentfuge sowie dem Aufreißen der Schale und evtl. auch Stützen entgegen.
- Gleichung (7.4) geht davon aus, dass sämtliche Beanspruchungen (z.B. Stützennormalkräfte und Stützenbiegemomente) mit dem gleichen Faktor reduziert werden, was in den durchgeführten Berechnungen nicht beobachtet werden kann (Stützenszugkräfte, Stützenbiegemomente).

Dennoch wird ein Versuch unternommen, eine Aussage über die Größe des Verhaltensbeiwerts für diese Art von Systemen zu machen. Wie bereits mehrfach erwähnt, stellen die Stützenkräfte eine entscheidende Größe dar, wohingegen die Schalenbeanspruchungen von untergeordneter Bedeutung sind. Daher wird der Verhaltensbeiwert

aus der Reduktion der maßgebenden Stützenszugkräfte bestimmt. Bei einer Normalkraft am Stützenkopf infolge Eigengewicht von -3503 kN und einer maximalen Zugkraft infolge horizontaler Bodenbeschleunigung nach Tabelle 7.3 aus linearer Berechnung von  $5539+3503 = 9042$  kN (KERN COUNTY),  $5860+3503 = 9363$  kN (TABAS) und  $5829+3503 = 9332$  kN (EL CENTRO) kann bei einer Reduktion der Stützenszugkräfte um 50% aufgrund der genannten nichtlinearen Effekte gemäß der folgenden Umformung ein Verhaltensbeiwert von ca. 1,5 berechnet werden.

$$\begin{aligned} \text{KERN COUNTY:} \quad q &= \frac{9042}{0,50 \cdot [9042 + 3503]} \approx 1,5 \\ \text{TABAS:} \quad q &= \frac{9363}{0,50 \cdot [9363 + 3503]} \approx 1,5 \\ \text{EL CENTRO :} \quad q &= \frac{9332}{0,50 \cdot [9332 + 3503]} \approx 1,5 \end{aligned}$$

Der auf diese Weise mit dem beschriebenen Rechenmodell unter Berücksichtigung des Abhebens, des physikalisch nichtlinearen Verhaltens der Schale und des Aufreißens der Stützen unter großen Zugnormalkräften bestimmte Verhaltensbeiwert von  $q = 1,5$  kann sicherlich als untere Schranke für dieses System angesehen werden. Weitere wesentliche Energiedissipationsmechanismen bei nichtlinearem Verhalten, denen im Rahmen dieser Untersuchungen nicht Rechnung getragen worden ist, sind die Energiedissipation des Bodens bei plastischen Verformungen sowie der Schwingungsenergieverlust infolge Energieabstrahlung in den Boden. Auch das lokale dissipative Verhalten in Anschlüssen, Gelenken oder Rahmenecken wie die Verbundstörung bzw. der Schlupf zwischen Beton und Betonstahl bei zyklischer Beanspruchung (z.B. Verankerung der Stützenbewehrung in der Schale und im Fundament) oder das Hystereseverhalten am Kopf und Fuß bei Meridionalstützen, die in diesen Querschnitten durch hohe wechselnde Biegemomente infolge Transport der Schubkraft aus horizontaler Bodenbeschleunigung stark beansprucht werden, trägt wesentlich zum Schwingungsenergieverzehr bei und führt zu einer weiteren, nicht unwesentlichen Reduktion der linear ermittelten Beanspruchungen. Die zusätzliche Berücksichtigung der genannten, zum Teil sehr lokalen Dissipationsmechanismen hat daher einen weiteren Schwingungsenergieverzehr und somit eine weitere Vergrößerung des Verhaltensbeiwerts zur Folge. Dies könnte ein Gegenstand weiterer Forschungsarbeiten verbunden mit der erforderlichen Weiterentwicklung des numerischen Rechenmodells sein.

Als Fazit für die baupraktische Anwendung aus dieser Studie kann festgehalten werden, dass für Kühlturmschalen eine Erdbebenauslegung nach dem Antwortspektren-

verfahren unter Berücksichtigung eines Verhaltensbeiwertes zur Erfassung nichtlinearer Effekte in der Regel vollkommen ausreichend ist. Alternativ führen lineare dynamische Analysen im Wesentlichen zu dem gleichen Ergebnis, wenn die verwendeten Zeitverläufe aus dem korrespondierenden Antwortspektrum künstlich generiert worden sind und somit mit diesem konform sind.

Für die Dimensionierung der Stützen können deren Beanspruchungen in der Regel mit statischen Ersatzlasten ermittelt werden. Dieses Verfahren bietet sich ebenso für den Fundamentringbalken und die Stützenkrafteinleitung im unteren Schalenbereich an. Genauere Betrachtungen – in der Regel nach dem Antwortspektrenverfahren mit Verwendung eines Verhaltensbeiwerts – sind nur für den Regelbereich der Schale sowie für den oberen Ringbalken erforderlich, da hier mehrere Eigenformen an der Lösung beteiligt sind und die Gestalt der Eigenformen berücksichtigt werden müssen.

Der baupraktische Einsatz der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten und angewendeten nichtlinearen dynamischen Berechnungsverfahren setzt ein fundiertes Spezialwissen des Anwenders voraus und ist im Allgemeinen nicht gerechtfertigt. Zur genauen Klärung des nichtlinear dynamischen Strukturverhaltens, das weit über eine globale pauschale Abminderung der Beanspruchungen mit einem konstanten Faktor hinausgeht, kann bei Spezialuntersuchungen und Studien in sinnvoller Weise auf die entwickelten Verfahren und Elemente zurückgegriffen werden, die im Programmsystem ROSHE [130] zur Verfügung stehen.





# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung der Schwerpunkte

Im Folgenden sollen zum Abschluss der vorliegenden Arbeit noch einmal die wichtigsten Schwerpunkte zusammengefasst werden. Der wesentliche Kernpunkt dieser Arbeit besteht in der Weiterentwicklung und numerischen Umsetzung eines doppelt gekrümmten Schalenringelements in Kombination mit direkten Zeitintegrationsalgorithmen und modalen Berechnungsverfahren zur nichtlinearen statischen und dynamischen Analyse von rotationssymmetrischen Schalenträgwerken aus Stahlbeton. Hierbei sollen gezielt die Vorteile des Ringelementkonzepts bei der nichtlinearen dynamischen Analyse großer Strukturen wie Kühlturmschalen unter komplexen Erdbebenbeschleunigungszeitverläufen ausgenutzt werden, was im Allgemeinen eine sehr hohe Anzahl von Zeitschritten (ca. 2000 – 4000 Zeitschritte bei einer Erdbebedauer von 20 s) mit nachfolgenden Gleichgewichtsiterationen bei der Lösung erfordert und den Aufwand statischer Untersuchungen um Größenordnungen übersteigt. Die Verwendung von Ringelementen in Kombination mit direkten Zeitintegrationsverfahren oder der inkrementell iterativen Formulierung der modalen Analyse bietet sich aufgrund der in den Abschnitten 5.7 und 6.6 zusammengefassten Vorteile geradezu prädestiniert an. Die Implementierung sämtlicher Elemente und Algorithmen erfolgte im Programmsystem ROSHE [130]. In der vorliegenden Arbeit wurde der folgende Weg zur Herleitung, Umsetzung und Anwendung der erforderlichen numerischen Verfahren beschrrieben:

Nach einer kurzen Darstellung der allgemeinen Grundbegriffe und Zusammenhänge kontinuumsmechanischer Problemstellungen im Kapitel 2 erfolgte im Kapitel 3 die Aufbereitung eines expliziten zweiaxialen Werkstoffmodells für Stahlbeton (ebener Spannungszustand) gemäß [58], [101]. Besondere Beachtung wurde dabei einer praktikablen und normengerechten Modellierung des Verbundverhaltens zwischen Beweh-

rungsstahl und Beton nach Überschreiten dessen Zugfestigkeit im Rahmen eines „rotating crack“ Modells geschenkt, das ferner die Berücksichtigung und Abspeicherung von Vorschädigungen erlaubt.

Im Kapitel 4 wurden die Grundgleichungen einer nichtlinearen Flächentragwerkstheorie unter Voraussetzung einer orthogonalen Metrik aufbereitet. Im Gegensatz zum dreidimensionalen Kontinuum wurden sämtliche mechanischen Zustandsvariablen nun auf die Schalenmittelfläche bezogen, wobei Spannungserzeugende (Normalkräfte, Schubkräfte, Biegemomente und Drillmomente) und Querschnittsverzerrungen (Dehnungen, Gleitungen, Verkrümmungen und Verwindungen der Mittelfläche) eingeführt wurden. Die Verknüpfung dieser inneren Variablen erfolgte durch Anwenden von numerischen Schichtenintegrationsverfahren unter Ausnutzen der Querschnittskinetik (Ebenbleiben der Querschnitte: KIRCHHOFF-LOVE Hypothese). Mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen wurden die Grundgleichungen unter Berücksichtigung sämtlicher Trägheits- und Dämpfungsanteile in eine variationelle Arbeitsaussage (integrale Form des Gleichgewichts) überführt, bei der die Verformungen die primären unabhängigen Variablen darstellen. Zusammen mit den Werkstoffgesetzen für Stahlbeton bilden diese Grundgleichungen die Basis einer numerischen Umsetzung im Rahmen eines FE-Weggrößenmodells.

Durch eine konsistente Linearisierung wurde das nichtlineare Bewegungsdifferentialgleichungssystem im Kapitel 5 in eine tangentielle Form überführt, so dass mit vorliegenden Standardverfahren (z.B. NEWTON-RAPHSON Verfahren) eine inkrementell iterative Lösungsfindung erfolgen kann. Die allgemein gehaltenen Arbeitsausdrücke wurden für die Geometrie eines doppelt gekrümmten Schalenringelements in Meridianrichtung durch Einführen von Produktlösungsansätzen (Polynome in Meridianrichtung; harmonische Reihen in Umfangsrichtung) diskretisiert, und es erfolgte eine Algebraisierung der Differentialgleichungen des Randwertproblems für das Gebiet eines Schalenringelements und Herleitung sämtlicher Elementmatrizen und Elementvektoren. Konvergenzuntersuchungen und Vergleichsrechnungen runden dieses Kapitel ab. Am Beispiel des doppelt gekrümmten Schalenringelements wurde das vorgestellte Ringelementkonzept ausführlichst exerziert. Jedoch lässt sich dieses Konzept auch leicht zur Formulierung anderer Strukturelemente übertragen; zu nennen wären in diesem Zusammenhang beispielsweise das vom Verfasser entwickelte Stützenfachwerk-makroelement und Ringfederelement.

Die Behandlung dynamischer Problemstellungen erfordert über die Diskretisierung und Algebraisierung des Randwertproblems im Lösungsgebiet hinaus eine Eliminierung der Zeitableitungen der Verformungen (Geschwindigkeiten und Beschleunigungen) in den diskreten Systemfreiheitsgraden. Im Rahmen dieser Arbeit wurden im Kapitel 6 zur Lösung des Anfangswertproblems in der Zeit implizite direkte Zeitintegrationsverfahren

in inkrementeller Form an die speziellen Belange von Ringelementen angepasst und programmtechnisch umgesetzt. Gerade für nichtlineare dynamische Untersuchungen an Rotationsschalen stellte sich der Einsatz von Ringelementen als besonders effektiv heraus, da durch die zusätzlichen Trägheits- und Dämpfungsterme die vernachlässigte Kopplung der Freiheitsgrade unterschiedlicher Fourierglieder in der tangentialen Steifigkeitsbeziehung deutlich an Einfluss verliert. Eine Anwendung der Ringelemente auf nichtlineare statische Problemstellungen ist ebenso möglich und mit Vergleichsrechnungen bestätigt worden. Aufgrund der Vernachlässigung der Nebendiagonalmatrizen in der tangentialen Steifigkeitsmatrix im Rahmen einer inkrementell iterativen Lösungsfindung können allerdings Konvergenzprobleme auftreten.

Als weiterer neuartiger Aspekt wurde in dieser Arbeit die Idee verfolgt, modale Berechnungsverfahren zur Lösung des nichtlinearen Bewegungsdifferentialgleichungssystems einzusetzen. Dabei wurden die Bewegungsgrößen des Systems durch eine Kombination der Eigenschwingformen des linearen Eigenschwingproblems dargestellt, was aus der linearen Dynamik hinreichend bekannt ist. Aufgrund der Ungültigkeit des Superpositionsprinzips bei nichtlinearen Problemstellungen wurde das Verfahren in der Weise modifiziert, dass die Beteiligungsfaktoren der einzelnen Eigenformen an der Gesamtschwingung nun inkrementell iterativ in linearisierten Schritten berechnet werden. Wie im Kapitel 6 ausführlich erläutert und an einem Anwendungsbeispiel aufgezeigt wurde, lässt sich die nichtlineare Formulierung der modalen Analyse gerade in Verbindung mit dem vorgestellten Ringelementkonzept als alternatives Berechnungsverfahren sinnvoll einsetzen. Basis der numerischen Umsetzungen ist das Programmsystem ROSHE [130] des Lehrstuhls für Baustatik der Universität Kaiserslautern als Ableger des Programmsystems FEMAS [11]. Die im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Erweiterungen und Neuentwicklungen auf Element- und Algorithmenebene sind in das Programmsystem ROSHE eingebunden und in den zugehörigen Benutzerhandbüchern [130] dokumentiert.

Dies bestätigte sich ebenso in den numerischen Simulationen im Kapitel 7. An zwei ausgesuchten praxisnahen Anwendungsbeispielen von Rotationsschalen aus dem konstruktiven Ingenieurbau wurden die neu geschaffenen nichtlinear dynamischen Berechnungsalgorithmen zusammen mit neu und weiter entwickelten Nachlaufprogrammen (Plot der Zustandsgrößen während des Bewegungsvorgangs, 3D Animation, Bemessung) angewendet. Dabei handelte es sich zum einen um einen zusammengesetzten Behälter (Idealisierung der inneren Stahlbetonhülle eines Druckwasserreaktors) und zum anderen um einen modernen Naturzugkühlturm. Es wurde ein Beitrag zur Klärung des Verhaltens dieser Systeme unter horizontalen Erdbebenbeschleunigungen geleistet. Zur Beurteilung des wirklichkeitsnahen Tragverhaltens ist die Kenntnis dieser nichtlinearen Effekte unentbehrlich. Hier zeigte sich in beiden Anwendungsfällen eine deutliche Änderung des Beanspruchungszustands im Vergleich zur linearen

ren Lösung unter Berücksichtigung der nichtlinearen Effekte des Abhebens von der Gründung, des wirklichkeitsnahen Verhaltens der Stahlbetonschale und in letzterem Anwendungsbeispiel des Stützenaufreißens unter hohen Zugbeanspruchungen. Auf eine zusammenfassende Erläuterung der Ergebnisse und Erkenntnisse soll jedoch an dieser Stelle verzichtet werden. Diese können im Einzelnen jeweils den entsprechenden Kapiteln entnommen werden.

## 8.2 Ausblick

Mit den im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgestellten Algorithmen und Elementen eröffnet sich die Möglichkeit zu einer Reihe interessanter und weiterführender Forschungsmöglichkeiten, von denen einige im Folgenden kurz benannt werden sollen:

Das vorgestellte Ringelementkonzept lässt sich leicht auf andere Strukturelemente übertragen. So könnte eine Erweiterung der Ringelementfamilie z.B. in der Umsetzung von Ringdämpferelementen, Ringdrehfederelementen oder Ringkontinuumselementen zur Simulation des Bodens als Halbraum liegen.

Der wesentliche Nachteil des Ringelementkonzepts, nämlich die Beschränkung auf rotationssymmetrische Geometrien, könnte durch die Einführung einer Schnittstelle zwischen Ringelementen und herkömmlichen Schalenelementen ähnlich des von GOULD [53] aufgezeigten „Local-Global“ Modells beseitigt werden. Dazu müssten die fourierzerlegten Freiheitsgrade der Ringelemente an die diskreten Freiheitsgrade der über den Umfang verteilten Knotenfreiheitsgrade von herkömmlichen Elementen gekoppelt werden, was unter Einführung von Nebenbedingungen mit der LAGRANGEschen Multiplikatorenmethode gelingen würde. Mit dieser Vorgehensweise könnte auch der Erfassung lokaler Dissipationsmechanismen z.B. am Übergang der Stützen in die Schale sowie der Lasteinleitung in diesem Bereich besser Rechnung getragen werden als dies mit dem vorhandenen Modell der Fall ist.

Ebenso für andere Anwendungsgebiete neben dem Erdbeben ist mit dieser Arbeit ein wesentlicher Grundstein gelegt worden. Zu nennen ist hierbei beispielsweise die Auslegung von Reaktorschutzhüllen gegen andere EVA-Lasten wie z.B. Flugzeugabsturz. Aktuelle Arbeiten auf diesem Gebiet wie [12] zeigen einen stark vorhandenen Forschungs- und Entwicklungsbedarf, was die ingenieurmäßige Modellbildung und Effizienz des Rechenmodells betrifft; in diesem speziellen Fall wurde eine sehr grobe Diskretisierung einer Reaktorschale mit gemischt hybriden 8 Knoten Volumenelementen verwendet, wobei die Dickenrichtung der Schale lediglich mit 4 Elementen abgebildet wurde. Auch in diesem Zusammenhang erscheint die Verwendung von Ringelemen-

ten zur Abbildung des globalen Tragverhaltens mit deren Kopplung an herkömmliche Elemente (unter Umständen sogar Schalenelemente mit Ansätzen in Dickenrichtung [14] oder eventuell Volumenelemente) im lokalen Eindringbereich äußerst sinnvoll, um Phänomene wie Spallation, Penetration, Perforation oder Schubversagen durch Verwendung einer feinen Diskretisierung mit Schalendreieck-, Schalenviereck- oder gar Volumenelementen zu erfassen und das globale Strukturverhalten in einem gewissen Abstand von der Eindringstelle mit Ringelementen abzubilden. Hierbei sind zusätzlich Stoffgesetzerweiterungen vorzunehmen, die das dreiaxiale Werkstoffverhalten des Betons mit hohen Dehngeschwindigkeiten und Schädigungseffekten in der lokalen Aufprall- bzw. Eindringzone wirklichkeitsnah wiedergeben.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sind ferner ausschließlich deterministische Verfahren entwickelt und verwendet worden. Die Natur im Gegensatz verhält sich jedoch immer stochastisch, was sowohl für die Einwirkungen als auch für die Systemeigenschaften gilt. Die Ergebnisse deterministischer Berechnungen mit Variation von Eingangsgrößen lassen nur bedingt Aussagen über die Auswirkungen von Streuungen und Modellunsicherheiten zu, die bei dynamischen Untersuchungen noch vielfältiger als bei statischen Untersuchungen sind. Deswegen erscheint es erstrebenswert, bei zukünftigen Weiterentwicklungen den deterministischen Rahmen zu verlassen und die vorhandenen Algorithmen um Sensitivitätsparameter und stochastische Verteilungsgrößen von Eingangsparametern zu erweitern, um die numerischen Ergebnisse im Hinblick auf Auswirkungen infolge der stochastischen Natur der Eingangsdaten besser auf ihre Sensitivität hin beurteilen zu können.



# Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMEK, W.: Dynamic Analysis of Hyperboloidal Cooling Tower Subjected to Seismic Loading. In: Proceedings of the 3rd International Symposium on Natural Draught Cooling Towers 1989 (Paris), Seiten 3–8, Paris, 1988. Recueil des Communications-Proceedings, ALSTHOM Etablissement SCAM.
- [2] ALTENBACH, J./ ALTENBACH, H.: Einführung in die Kontinuumsmechanik. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [3] ARNOLD, P./ HARTMANN, B./ SCHRADER, K.-H.: Ergebnisse zu Erdbebenergebnissen mit Schalenmodellen, Seiten 50–57. Konstruktiver Ingenieurbau Berichte 29/30. Vulkan Verlag, Essen, 1977.
- [4] AYOUB, A./ FILIPPOU, F. C.: Mixed Formulation of Nonlinear Steel-Concrete Composite Beam Element. Journal of Structural Engineering, 126(3):371–381, 2000.
- [5] BAŞAR, Y./ KRÄTZIG, W. B.: Mechanik der Flächentragwerke. Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985.
- [6] BATHE, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1990.
- [7] BATHE, K.-J./ CIMENTO, A. P.: Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 22:59–85, 1980.
- [8] BATHE, K.-J./ GRACEWSKI, S.: On Nonlinear Dynamic Analysis Using Substructuring and Mode Superposition. Computers & Structures, 13:699–707, 1981.
- [9] BAŽANT, Z. P.: Endochronic Inelasticity and Incremental Plasticity. International Journal of Solids and Structures, 14:691–714, 1978.
- [10] BEEM, H.: Statische und dynamische Analyse vorgespannter Membranen. IKIB-TWM 84-5, Ruhr-Universität Bochum, 1984.

- [11] BEEM, H.: FEMAS - Finite Element Moduln Allgemeiner Strukturen Version 90.1, 1991.
- [12] BERGHOLZ, C.: Nichtlineare Untersuchungen von dickwandigen Schalen aus Stahlbeton unter dynamischen Aufpralleinwirkungen. Diplomarbeit, Fachgebiet Statik der Baukonstruktionen Technische Universität Berlin, 2000.
- [13] BETTEN, J.: Tensorrechnung für Ingenieure. B. G. Teubner, Stuttgart, 1987.
- [14] BISCHOFF, M.: Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung. Dissertation, Institut für Baustatik Universität Stuttgart, 1999.
- [15] BOLT, B. A.: Erdbeben – eine Einführung. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [16] BOLT, B. A.: Erdbeben – Schlüssel zur Geodynamik. Spektrum Akademischer Verlag, Berlin, 1995.
- [17] BUCHER, C.: Anwendung der Modalanalyse auf Probleme der nichtlinearen Dynamik. In: BUCHER, C. (Herausgeber): 6. Institutskolloquium des Instituts für Strukturmechanik der Bauhaus-Universität Weimar (Bericht 1/00), Seiten 79–84, Weimar, 2000.
- [18] BURKHARDT, G.: Einige offene Fragen bei der Beschreibung der Dämpfung von Stahlbeton. In: BUCHER, C. (Herausgeber): 6. Institutskolloquium des Instituts für Strukturmechanik der Bauhaus-Universität Weimar (Bericht 1/00), Seiten 85–93, Weimar, 2000.
- [19] BYUN, C./ KAPANIA, R. K.: Nonlinear Transient Response of Imperfect Hyperbolic Shells Using a Reduction Method. *Computers & Structures*, 44:255–262, 1992.
- [20] CASTIAU, T./ GAUROIS, R.: The Design of Cooling Towers in Extremely Severe Earthquake Conditions. *Construction and Building Materials*, 6(4):239–245, 1992.
- [21] CEB-FIP Model Code 1990. Lausanne, 1991. Comité Euro-International du Béton, Bulletin d'Information No. 203–205.
- [22] CEDOLIN, L./ MULAS, M. G.: Biaxial Stress-Strain Relation for Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 110(2):187–206, 1984.
- [23] CHEN, W. F./ HAN, D. J.: *Plasticity for Structural Engineers*. Springer-Verlag, New York, 2. Auflage, 1988.
- [24] CHOPRA, A. K.: *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River (New Jersey), 2. Auflage, 2001.



- [25] CHUNG, J./ HULBERT, G. M.: A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation. *Journal of Applied Mechanics*, 60:371–375, 1993.
- [26] CLOUGH, R. W./ PENZIEN, J.: *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New York, 2. Auflage, 1993.
- [27] COMBESCURE, A.: Static and Dynamic Buckling of Large Thin Shells. *Nuclear Engineering and Design*, 92:339–354, 1986.
- [28] COMBESCURE, A./ GUSIC, A.: Prediction of Nonlinear Buckling of Cylinders under External Pressure with Non Axisymmetric Thickness Imperfections Using Quasi Axisymmetric Shell Elements. In: *European Conference on Computational Mechanics ECCM 99*, München, 1999.
- [29] CRISFIELD, M. A./ WILLS, J.: Analysis of R/C Panels Using Different Concrete Models. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(3):578–597, 1989.
- [30] DE BOER, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [31] DEPE, T.: *Natural Draught Cooling Tower Florina (Gutachten, nicht veröffentlicht)*, 1999.
- [32] DER KIUREGHIAN, A.: A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems. *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 9:419–435, 1981.
- [33] DIN 1045-1 *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion*. Beuth Verlag, Berlin, 2001. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
- [34] DIN 1055-100 E07/1999 *Einwirkungen auf Tragwerke - Grundlagen der Tragwerksplanung - Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln*. Beuth Verlag, Berlin, 1999. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
- [35] DIN 4149 Teil 1 *Bauten in deutschen Erdbebengebieten - Lastannahmen, Bemessung und Ausführung üblicher Hochbauten*. Beuth Verlag, Berlin, 1981. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
- [36] DIN EN 1991-1 *Grundlagen der Tragwerksplanung und Einwirkungen auf Tragwerke*. Beuth Verlag, Berlin, 1994. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
- [37] DIN EN 1992-1-1 *Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau*. Beuth Verlag, Berlin, 1992. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

- [38] DINV ENV 1998-1-1 Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben, Teil 1-1: Grundlagen – Erdbebeneinwirkungen und allgemeine Anforderungen an Bauwerke. Beuth Verlag, Berlin, 1997. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
- [39] DINV ENV 1998-3 Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben, Teil 3: Türme, Maste und Schornsteine. Beuth Verlag, Berlin, 1999. DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
- [40] DOUGILL, J. W.: On Stable Progressively Fracturing Solids. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 27:423–437, 1976.
- [41] ECKSTEIN, U.: Nichtlineare Stabilitätsberechnungen elastischer Schalenträgerwerke. IKIB-TWM 83-3, Ruhr-Universität Bochum, 1983.
- [42] ECKSTEIN, U./ KRÄTZIG, W. B./ WITTEK, U.: Finite-Element-Berechnungen zur Grenztragfähigkeit der Rotationsschalen. IKIB-TWM 80-4, Ruhr-Universität Bochum, 1980.
- [43] EIBL, J.: Concrete under Multiaxial States of Stress - Constitutive Equations for Practical Design. *Bulletin d'Information* 156, Comité Euro-International du Béton, Paris, 1983.
- [44] EIBL, J./ SCHMIDT-HURTIENNE, B.: Betonstoffgesetze für hochdynamische Beanspruchungen. *Beton- und Stahlbetonbau*, 94(7):278–288, 1999.
- [45] EIBL, J./ SCHMIDT-HURTIENNE, B.: Strain-Rate-Sensitive Constitutive Law for Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(12):1411–1420, 1999.
- [46] ELIGEHAUSEN, R./ OŽBOLT, J./ MAYER, U.: Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen bei nichtelastischen Stahldehnungen – Optimierung des Verbunds. *Beton- und Stahlbetonbau*, 93(2):29–35, 1998.
- [47] EN 1992-1 (1st draft) Design of Concrete Structures - Part 1: General Rules and Rules for Buildings. Brüssel, 1999. Europäisches Komitee für Normung.
- [48] EMS-98 European Macroseismic Scale 1998. Luxembourg, 1998. Conseil de l'Europe, Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie.
- [49] FEENSTRA, P. H./ ROTS, J. G./ ARNESEN, A./ TEIGEN, J. G./ HØISETH, K. V.: A 3D Constitutive Model for Concrete Based on a Co-rotational Concept. In: DE BORST, R./ BIĆANIĆ, N./ MANG, H./ MESCHKE, G. (Herausgeber): *Computational Modelling of Concrete Structures*, Seiten 13–22, Rotterdam, 1998. Balkema.
- [50] FISCHER, L.: Seismische Analyse von Flächentragwerken auf der Basis der Antwortspektrenmethode. *Bautechnik*, 62(9):304–312, 1985.

- [51] GESCHWINDNER, L. F.: Nonlinear Dynamic Analysis by Modal Superposition. *Journal of the Structural Division*, 107(12):2325–2336, 1981.
- [52] GOULD, P. L.: *Finite Element Analysis of Shells of Revolution*. Pitman Advanced Publication Program, Boston, 1985.
- [53] GOULD, P. L.: Local-Global Finite Element Analysis of Shells of Revolution. In: *European Conference on Computational Mechanics ECCM 99*, München, 1999.
- [54] GOULD, P. L./ SRIDHARAN, S./ RAVICHANDRAN, R. V.: A Local-Global FE Model for Column Supported HCT Analysis. In: WITTEK, U./ KRÄTZIG, W. B. (Herausgeber): *Natural Draught Cooling Towers*, Seiten 337–344, Rotterdam, 1996. Balkema.
- [55] GOULD, P. L./ SURYOUTOMO, H./ SEN, S. K.: Stresses in Column-Supported Hyperboloidal Shells Subject to Seismic Loading. *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5:3–14, 1977.
- [56] GRAFTON, P. E./ STROME, D. R.: Analysis of Axi-symmetric Shells by the Direct Stiffness Method. *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1, 1963.
- [57] GRAN, C. S./ YANG, T. Y.: Refined Analysis of the Seismic Response of Column-Supported Cooling Tower. *Computers & Structures*, 11:225–231, 1980.
- [58] GROTE, K.: *Theorie und Anwendung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Algorithmen auf Flächentragwerke aus Stahlbeton*. Bericht 1992/1, Fachgebiet Baustatik Universität Kaiserslautern, 1992.
- [59] GROTE, K./ MEISWINKEL, R./ WITTEK, U.: Numerische Realisation expliziter Stahlbetonstoffgesetze für Flächentragwerke. In: MEHLHORN, G. (Herausgeber): *Beiträge zum 20. Forschungskolloquium am 24. und 25. März 1988 in Kassel*, Seiten 137–142, Berlin, 1988. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton.
- [60] GUPTA, A. K./ SCHNOBRICH, W. C.: Seismic Analysis and Design of Hyperbolic Cooling Towers. *Nuclear Engineering and Design*, 36:251–260, 1976.
- [61] HARTE, R.: *Doppelt gekrümmte finite Dreieckselemente für die lineare und geometrisch nichtlineare Berechnung allgemeiner Flächentragwerke*. IKIB-TWM 82-10, Ruhr-Universität Bochum, 1982.
- [62] HILBER, H. M.: *Analysis and Design of Numerical Integration Methods in Structural Dynamics*. Ph. D. Thesis, University of California at Berkeley, 1976.
- [63] HILBER, H. M./ HUGHES, T. J. R./ TAYLOR, R. L.: Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics. *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5:283–292, 1977.

- [64] HOFSTETTER, G./ MANG, H. A.: Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures. Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1995.
- [65] HOUBOLT, J. C.: A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 17:540–550, 1950.
- [66] HUFENDIEK, H. W.: Ein einheitlicher Algorithmus zur Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer ebener Stabtragwerke aus Stahl, Stahlbeton und Verbundwerkstoffen. IKIB-TWM 84-6, Ruhr-Universität Bochum, 1984.
- [67] HUGHES, T. J. R.: The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Dover Publications, Mineola (New York), 2000.
- [68] INOUE, N./ YANG, K./ SHIBATA, A.: Dynamic Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete Shear Wall by Finite Element Method with Explicit Analytical Procedure. *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26:967–986, 1997.
- [69] Iranian Code for Seismic Design of Buildings. Teheran, 1988. Iranian Building Code Series Publication No. 82.
- [70] KHUDADA, A. E./ GESCHWINDNER, L. F.: Nonlinear Dynamic Analysis of Steel Frames by Modal Superposition. *Journal of Structural Engineering*, 123(11):1519–1527, 1997.
- [71] KLEIN, G.: Bodendynamik und Erdbeben. In: SMOLTCZYK, U. (Herausgeber): *Grundbau Taschenbuch* 6. Auflage, Seiten 347–399, Berlin, 2001. Ernst & Sohn.
- [72] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 2. Auflage, 1989.
- [73] KNOTHE, K./ WESSELS, H.: *Finite Elemente*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1982.
- [74] KOMPFFNER, T. A.: Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen. Dissertation, Institut für Baustatik Universität Stuttgart, 1983.
- [75] KRÄTZIG, W. B./ BAŞAR, Y.: *Tragwerke 3*. Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 1997.
- [76] KRÄTZIG, W. B./ PETRYNA, Y. S.: Damage, Failure and Fatigue Analysis in Structural Dynamics of Reinforced Concrete Structures. In: *European Conference on Computational Mechanics ECCM-2001*, Krakau, 2001.
- [77] KRÄTZIG, W. B./ WITTEK, U.: *Tragwerke 1*. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1993.

- [78] KRINGS, W./ WALLER, H.: Zur Berechnung von Bauwerksschwingungen bei Kernkraftwerken – Nützliche Integrationsformeln und Vorschläge für die Rechenkontrollen bei der modalen Analyse. *Bauingenieur*, 54:291–298, 1979.
- [79] KTA 2201 Auslegung von Kernkraftwerken gegen seismische Einwirkungen. Carl Heymanns Verlag, Köln, 1990. Sicherheitstechnische Regel des Kerntechnischen Ausschuss (KTA).
- [80] KUPFER, H./ HILSDORF, H. K./ RÜSCH, H.: Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses. *Journal of the American Concrete Institute ACI*, 66:656–666, 1969.
- [81] LANG, C./ MEISWINKEL, R./ FILIPPOU, F. C.: Non-linear Analysis of Shells of Revolution With Ring Elements. *Engineering Structures*, 24(2):163–177, 2002.
- [82] LEIMBACH, K. R.: Eine Methode zur Berechnung der Schwingungscharakteristika ringversteifter Rotationsschalen. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1973.
- [83] LINK, M.: Finite Elemente in der Statik und Dynamik. B. G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage, 1989.
- [84] LOVE, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Dover Publications, New York, 4. Auflage, 1944.
- [85] MÁRKUS, G.: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke. Werner-Verlag, Düsseldorf, 1. Auflage, 1967.
- [86] MARSDEN, J. E./ HUGHES, T. J. R.: Mathematical Foundations of Elasticity. Dover Publications, Mineola (New York), 1993.
- [87] MEISWINKEL, R.: Anwendung der nichtlinearen Elastizitätstheorie zur geometrisch und physikalisch nichtlinearen Berechnung zweidimensionaler Stahlbetonstrukturen. Bericht 1989/1, Fachgebiet Baustatik Universität Kaiserslautern, 1989.
- [88] MEISWINKEL, R.: Entwurf von Stahlbeton-Flächentragwerken unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Strukturanalysen. Bericht 1998/1, Fachgebiet Baustatik Universität Kaiserslautern, 1998.
- [89] MESKOURIS, K.: Baudynamik – Modelle, Methoden, Praxisbeispiele. Ernst & Sohn, Berlin, 1999.
- [90] MÜLLER, F. P.: Baudynamik, Seiten 745–962. *Betonkalender Teil 2*. Ernst & Sohn, Berlin, 1978.
- [91] New Greek Aseismic Code (NEAK 1995). Athens, 1995. Greek Organization for Aseismic Design and Protection (OASP).

- [92] NEWMARK, N. M.: A Method of Computation for Structural Dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division, 85(EM 3):67–94, 1959.
- [93] OGDEN, R. W.: Nonlinear Elastic Deformations. Dover Publications, Mineola (New York), 1997.
- [94] PARDEY, A.: Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten im Vergleich zur Bruchlinientheorie. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 441. Beuth-Verlag, Berlin, 1994.
- [95] PEER Strong Motion Database. <http://peer.berkeley.edu/>.
- [96] PETERS, H. L.: Numerische Lösung der Grundgleichungen des Spannungs- und Verformungszustandes allgemeiner Flächentragwerke im Rahmen einer linearen Theorie - Scheibe - Platte - Schale. IKIB-TWM 71-1, Ruhr-Universität Bochum, 1971.
- [97] PETERS, H. L.: Beitrag zur Dynamik allgemeiner Flächentragwerke. IKIB-TWM 72-5, Ruhr-Universität Bochum, 1972.
- [98] PIETRZKO, S. J.: Verfahren zur Identifikation der Dämpfungsmatrix mechanischer Systeme. Bericht 223, EMPA-Akademie, Dübendorf, 1992.
- [99] PINTO, P. E.: RC Elements under Cyclic Loading. State of the Art Report, Comité Euro-International du Béton, London, 1996.
- [100] POPOV, E. P./ PENZIEN, J./ LU, Z.-A.: Finite Element Solution for Axissymmetrical Shells. Journal of the Engineering Mechanics Division, 90(5):119–145, 1964.
- [101] RAHM, H.: Modellierung und Berechnung von Alterungseffekten bei Stahlbetonflächentragwerken. Bericht 2002/1, Fachgebiet Baustatik Universität Kaiserslautern, 2002.
- [102] RAMANJANEYULU, K./ ZAHLTEN, W./ KRÄTZIG, W. B.: Nonlinear Dynamic Response of Windloaded Cooling Tower Shells. In: WITTEK, U./ KRÄTZIG, W. B. (Herausgeber): Natural Draught Cooling Towers, Seiten 337–344, Rotterdam, 1996. Balkema.
- [103] RAMM, E.: Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points. In: Europe - U.S. - Workshop: Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Bochum, 1980.
- [104] RENSCH, J./ WUNDERLICH, W.: Nichtlineares, elasto-plastisches Tragverhalten von Behälterkomponenten. DFG-Forschungsvorhaben 1.-3. Bericht, Ruhr-Universität Bochum, 1978-1980.

- [105] RIEDEL, W.: Beton unter dynamischen Lasten, Meso- und makromechanische Modelle und ihre Parameter. EMI-Bericht 6/00, Fraunhofer Institut für Kurzzeitdynamik, 2000.
- [106] RIKS, E.: The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability. *Journal of Applied Mechanics*, 39:1060–1065, 1972.
- [107] ROJAS, R.: Die Rechenmaschinen von K. Zuse. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [108] ŞANAL, Z.: Dynamisches Tragverhalten und kinetische Stabilität windbeanspruchter Kühlturmschalen aus Stahlbeton unter Berücksichtigung temperaturbedingter Rißbildung. IKIB-TWM 85-1, Ruhr-Universität Bochum, 1985.
- [109] SCHABACK, R./ WERNER, H.: Numerische Mathematik. Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1993.
- [110] SEPETOSKI, W. K./ PEARSON, C. E./ DRIGWELL, I. W./ ADKINS, A. W.: A Digital Computer Program for the General Axially Symmetric Thin Shell Problem. *Journal of Applied Mechanics*, 29, 1962.
- [111] SIMO, J. C./ HUGHES, T. J. R.: Computational Inelasticity. Springer-Verlag, New York, 2. Auflage, 1998.
- [112] STANGENBERG, F.: Berechnung von Stahlbetonbauteilen für dynamische Beanspruchungen bis zur Tragfähigkeitsgrenze. Konstruktiver Ingenieurbau Berichte aus dem IKIB der Ruhr Universität Bochum Heft 16. Vulkan-Verlag, Essen, 1973.
- [113] STEMPNIEWSKI, L.: Flüssigkeitsgefüllte Stahlbetonbehälter unter Erdbebeneinwirkung. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1990.
- [114] SURYOUTOMO, H./ GOULD, P. L./ BASU, P. K.: Direct Dynamic Analysis of Shells of Revolution Using High-Precision Finite Elements. *Computers & Structures*, 7:425–433, 1977.
- [115] SZABO, I./ WELLNITZ, K./ ZANDER, W.: Hütte Taschenbücher der Technik: Mathematik. Springer-Verlag, Berlin, 2. Auflage, 1974.
- [116] UBC Uniform Building Code. Whittier, 1997. International Conference of Building Officials (ICBO).
- [117] U.S. Nuclear Regulatory Commission: Regulatory Guide 1.61, 1973. Damping Values for Seismic Design of Nuclear Power Plants.
- [118] VALANIS, K. C.: A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 23:517–551, 1971.

- [119] VECCHIO, F./ COLLINS, M. P.: The Response of Reinforced Concrete to Inplane Shear and Normal Stresses. Publication No. 82-3, University of Toronto, 1982.
- [120] VGB-Fachausschuss Bautechnik bei Kühltürmen: Bautechnische Richtlinien. VGB-Verlag, Essen, 1997.
- [121] WASHIZU, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, Oxford (New York), 3. Auflage, 1982.
- [122] WEMPNER, G. A.: Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. International Journal of Solids and Structures, 7:1581–1599, 1971.
- [123] WERNER, D.: Baudynamik. Verlag für Bauwesen, Berlin, 1989.
- [124] WESSELS, M.: Das statische und dynamische Durchschlagsproblem der imperfekten flachen Kugelschale bei elastischer rotationssymmetrischer Verformung. Dissertation 23, Institut für Statik TU Hannover, 1977.
- [125] WILSON, E. L./ CLOUGH, R. W.: Dynamic Response by Step-by-Step Matrix Analysis. In: Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, Lissabon, 1962.
- [126] WITTEK, U.: Beitrag zum Tragverhalten der Strukturen bei endlichen Verformungen unter besonderer Beachtung des Nachbeulmechanismus dünner Flächentragwerke. IKIB-TWM 80-1, Ruhr-Universität Bochum, 1980.
- [127] WITTEK, U./ MEISWINKEL, R.: Die physikalisch nichtlineare Berechnung von idealisierten Stahlbetonstrukturen, Reaktorbehälter – Erdbeben (Gutachten für KWU, nicht veröffentlichter Arbeitsbericht), 1987.
- [128] WITTEK, U./ MEISWINKEL, R.: Handbücher zu dem FE-Programm ROSHE3. Interner Arbeitsbericht, Fachgebiet Baustatik Universität Kaiserslautern, 2001.
- [129] WITTEK, U./ MEISWINKEL, R./ LANG, C.: Beitrag zu nichtlinearen Dimensionierungskonzepten von Flächentragwerken aus Stahlbeton. Bericht 2000/2, Fachgebiet Baustatik Universität Kaiserslautern, 2000.
- [130] WITTEK, U./ MEISWINKEL, R./ LANG, C.: Handbücher zu dem FE-Programm ROSHE. Interner Arbeitsbericht, Fachgebiet Baustatik Universität Kaiserslautern, 2002.
- [131] WRIGGERS, P.: Nichtlineare Finite-Element-Methoden. Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 2001.
- [132] WUNDERLICH, W./ CRAMER, H./ OBRECHT, H.: Application of Ring Elements in the Nonlinear Analysis of Shells of Revolution under Nonaxisymmetric Loading. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 51:259–275, 1985.



- [133] WUNDERLICH, W./ RENSCH, H. J.: A Semi-Analytical Finite Element Process for Nonlinear Elastoplastic Analysis of Arbitrarily Loaded Shells of Revolution. In: STALPAERT, J. (Herausgeber): Transactions of the 6th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Paris, 1981.
- [134] ZAHLTEN, W.: Ein Beitrag zur physikalisch und geometrisch nichtlinearen Computeranalyse allgemeiner Stahlbetonschalen. IKIB-TWM 90-2, Ruhr-Universität Bochum, 1990.
- [135] ZHENG, S./ HÄUSSLER-COMBE, U./ EIBL, J.: New Approach to Strain Rate Sensitivity of Concrete in Compression. Journal of Engineering Mechanics, 125(12):1403–1410, 1999.
- [136] ZIENCIEWICZ, O. C./ TAYLOR, R. L.: The Finite Element Method, Band 1-3. Butterworth Heinemann, Oxford, 5. Auflage, 2000.



# Anhang A Notation

## Geometriegrößen und allgemeine mechanische Grundgrößen

$\underline{e}_i$	Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems
$x^i$	Komponenten des Ortsvektors im kartesischen Koordinatensystem
$\underline{r}$	Ortsvektor zu einem materiellen Punkt
$\theta^i$	krummlinige Koordinatenlinien
$\underline{a}_i$	kovariante Basisvektoren an die Koordinatenlinien
$\underline{a}^i$	kontrariante Basisvektoren orthogonal zu den Koordinatenflächen
$a_{ij}, a^{ij}$	Metrikoeffizienten
$\underline{u}$	Verschiebungsvektor eines Punktes
$\underline{\chi}$	nichtlineare Deformationsabbildung
$\underline{F}$	Deformationsgradient
$J$	Determinante des Deformationsgradienten (JACOBI Determinante)
$\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$	Invarianten eines zweistufigen Tensors
$A$	Fläche bzw. Schalenmittelfläche
$V$	Volumen
$R$	Radius einer Rotationsschale
$Z$	Höhenkoordinate einer Rotationsschale ( $Z = \theta^2$ )
$\underline{n}$	Flächennormale
$\underline{\varepsilon}$	GREEN-LAGRANGE Verzerrungstensor
$\underline{\sigma}$	CAUCHY Spannungstensor
$\underline{\Pi}$	Nennspannungstensor ( $\underline{\Pi}^T$ : 1. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor)
$\underline{\Sigma}$	2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensor
$\sigma_{\text{oct}}$	Oktaedernormalspannung
$\tau_{\text{oct}}$	Oktaederschubspannung
$m$	Masse
$\rho$	Dichte
$\gamma$	Wichte $\gamma = \rho \cdot g$
$g$	Erdbeschleunigung: $g = 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 10,0 \text{ m/s}^2$
$t$	Zeit

T	Temperatur
$\underline{b}$	Vektor der Körperkräfte (body forces)

### Werkstoffgrößen des Stahlbetons

$A_s$	Balkenbewehrungsquerschnitt
$a_{s1}$	flächenhafte Bewehrung in $\theta^1$ -Richtung
$a_{s2}$	flächenhafte Bewehrung in $\theta^2$ -Richtung
$c_1, c_2$	Bewehrungsabstände von Bauteilaußenkante
$f_c, f_{ck}$	einaxiale Betondruckfestigkeit (charakteristisch)
$f_{ct}$	einaxiale Betonzugfestigkeit
$E_c$	Elastizitätsmodul des Betons
$\nu_c$	Querdehnzahl des Betons
$\nu^D \varepsilon(\alpha)$	Druckvordehnung des Betons in Hauptrichtung ( $\alpha$ )
$\nu^Z \varepsilon(\alpha)$	Zugvordehnung des Betons in Hauptrichtung ( $\alpha$ )
$\kappa^D$	Entlastungsparameter des Betons (Druck)
$\kappa^Z$	Entlastungsparameter des Betons (Zug)
$f_y, f_{yk}$	Streckgrenze des Betonstahls (charakteristisch)
$E_s$	Elastizitätsmodul des Betonstahls
$E_{sv}$	Verfestigungsmodul des Betonstahls
$h_{eff}$	effektive Mitwirkungszonenhöhe für Tension Stiffening
$\sigma_{sr1}$	Spannung des Betonstahls im ungerissenen Zustand unter Erstrisslast
$\sigma_{sr2}$	Spannung des Betonstahls im diskreten Riss unter Erstrisslast
$N_r, M_r$	Risschnittgrößen eines Balkens

### Mathematische und mechanische Größen der Flächentragwerkstheorie

$u_i$	Komponenten des Verschiebungsvektors $\underline{u}$ der Schalenmittelfläche
$w_i$	Komponenten des Differenzvektors $\underline{w}$ des Schalendirektors
$n^{\alpha\beta}$	Komponenten des Dehnungskrafttensors (unsymmetrisch)
$\tilde{n}^{\alpha\beta}$	Komponenten des Normalkrafttensors (symmetrisch)
$m^{\alpha\beta}$	Komponenten des Momententensors
$q^\alpha$	Komponenten der Querkraftvektoren
$n^\alpha, n^3$	Randkräfte
$m^\alpha$	Randmomente
$\sigma^{\alpha\beta}$	tangentiale (ebene) Spannungskomponenten

$\varepsilon_{\alpha\beta}$	tangentiale (ebene) Verzerrungskomponenten $\varepsilon_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \theta^3 \cdot \beta_{\alpha\beta}$
$\alpha_{\alpha\beta}$	Komponenten des 1. Verzerrungstensors der Mittelfläche
$\beta_{\alpha\beta}$	Komponenten des 2. Verzerrungstensors der Mittelfläche
$E^{\alpha\beta\gamma\delta}$	Komponenten des flächenhaften Elastizitätstensors
$C^{\alpha\beta\gamma\delta}$	Komponenten des flächenhaften Viskositätstensors
$\mu$	Schalenshifter $\mu = \sqrt{a^*}/\sqrt{a}$
$h$	Schalenwanddicke
$a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}$	Metrikoeffizienten der Schalenmittelfläche
$a$	Metrikdeterminante $a = a_{11} \cdot a_{22}$ (für orthogonale Metrik)
$b_{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}, b^\alpha_\beta$	Komponenten des Krümmungstensors der Schalenmittelfläche
$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$	Christoffelsymbole der Schalenmittelfläche
$p^i$	Komponenten des Lastvektors der Mittelfläche
$s^\alpha$	Komponenten des Lastmomentenvektors der Mittelfläche
$\omega_\alpha$	Verdrehungskomponenten des Schalendirektors
$k_t$	Bettung tangential zur Schalenmittelfläche
$k_n$	Bettung normal zur Schalenmittelfläche
$c_t$	äußere Dämpfung tangential zur Schalenmittelfläche
$c_n$	äußere Dämpfung normal zur Schalenmittelfläche
$\theta^\alpha$	Koordinatenlinien zur Beschreibung der Schalenmittelfläche
$\theta^3$	Koordinate in Direktorenrichtung $\theta^3 = z$
$\varphi_{\alpha\beta}, \varphi_{3\alpha}$	Komponenten des Verschiebungsgradienten von $\underline{u}$
$\psi_{\alpha\beta}, \psi_{3\alpha}$	Komponenten des Verschiebungsgradienten von $\underline{w}$

### Größen der FE-Approximation für Rotationsschalen

$\underline{K}_t$	globale tangentielle Steifigkeitsmatrix
$\underline{K}_e$	globale linear elastische Steifigkeitsmatrix
$\underline{K}_{ev}$	globale elastische Steifigkeitsmatrix mit Anfangsverformungen
$\underline{K}_g$	globale geometrische Steifigkeitsmatrix
$\underline{C}$	globale Dämpfungsmatrix
$\underline{M}$	globale Massenmatrix
$\hat{\underline{K}}$	globale effektive Steifigkeitsmatrix bei Zeitintegrationsverfahren
$\underline{V}$	globaler Vektor der Knotenverformungen
$\underline{P}_a$	globaler Vektor der äußeren Knotenlasten
$\underline{P}_i$	globaler Vektor der inneren Knotenkräfte
$\underline{P}_{ca}$	globaler Vektor der äußeren Dämpfungskräfte
$\underline{P}_m$	globaler Vektor der Trägheitskräfte

$\underline{v}$	Vektor der lokalen Elementfreiheitsgrade
$\hat{\underline{u}}$	Vektor der Ansatzfreiwerte (Verformungen)
$\hat{\underline{p}}$	Vektor der Ansatzfreiwerte (Belastungen)
$\underline{\Phi}$	Matrix der Ansatzfunktionen
$\hat{\underline{\Phi}}$	Formmatrix (Transformation der Ansatzfreiwerte $\hat{\underline{u}}$ auf lokale Elementfreiheitsgrade $\underline{v}$ )
$\underline{G}$	Transformationsmatrix von lokalen Elementfreiheitsgraden $\underline{v}$ auf Ansatzfreiwerte $\hat{\underline{u}}$
$\underline{T}$	Transformationsmatrix von globalen auf lokale Elementfreiheitsgrade
$\underline{k}_t$	tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix
${}^{nm}k_t^{ji}$	Eintrag in $\underline{k}_t$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{k}_e$	linear elastische Elementsteifigkeitsmatrix
${}^{nm}k_e^{ji}$	Eintrag in $\underline{k}_e$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{k}_{ev}$	elastische Elementsteifigkeitsmatrix mit Anfangsverformungen
${}^{nm}k_{ev}^{ji}$	Eintrag in $\underline{k}_{ev}$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{k}_g$	geometrische Elementsteifigkeitsmatrix
${}^{nm}k_g^{ji}$	Eintrag in $\underline{k}_g$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{c}_a$	Elementdämpfungsmatrix infolge äußerer Dissipation
${}^{nm}c_a^{ji}$	Eintrag in $\underline{c}_a$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{c}_i$	Elementdämpfungsmatrix infolge innerer Dissipation
${}^{nm}c_i^{ji}$	Eintrag in $\underline{c}_i$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{m}$	Elementmassenmatrix
${}^{nm}m^{ji}$	Eintrag in $\underline{m}$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{p}_a$	Elementlastvektor aus äußeren Flächen- und Randlasten
${}^n p_a^j$	Eintrag in $\underline{p}_a$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{p}_i$	Elementvektor aus inneren Kräften
${}^n p_i^j$	Eintrag in $\underline{p}_i$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{p}_{ca}$	Elementvektor aus äußeren Dämpfungskräften
${}^n p_{ca}^j$	Eintrag in $\underline{p}_{ca}$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
$\underline{p}_m$	Elementvektor aus Massenträgheit
${}^n p_m^j$	Eintrag in $\underline{p}_m$ (Erläuterung siehe Kapitel 5)
${}^k W$	Wichtungsfaktor für GAUSS-Integrationspunkt $k$ in Meridianrichtung
${}^l W$	Wichtungsfaktor für SIMPSON-Integrationspunkt $l$ in Ringrichtung

### Direkte Zeitintegrationsverfahren und modale Verfahren

$a_1 - a_7$	Integrationsparameter
$\xi$	LEHRsches Dämpfungsmaß

$\alpha_M, \alpha_K$	RAYLEIGH Dämpfungsparameter
T	Periode
f	Frequenz
$\omega$	Kreisfrequenz
m	generalisierte Masse
k	generalisierte Steifigkeit
p	generalisierte Kraft
q, $\dot{q}$ , $\ddot{q}$	generalisierte Bewegungskordinate und deren Zeitableitungen
$q^+$ , $\dot{q}^+$ , $\ddot{q}^+$	Inkrement einer generalisierten Bewegungskordinate
$\ddot{v}_{gr}$	Bodenbeschleunigung infolge Erdbeben
$\ddot{V}_{gr}$	Starrkörperbeschleunigungsvektor der Systemfreiheitsgrade infolge $\ddot{v}_{gr}$
$\beta$	Spektrale Überhöhung der Beschleunigung in Abhängigkeit der Periode

### Mathematische Symbole und Rechenoperationen

$\delta( )$	Variation
$( )_{,\alpha}$	partielle Ableitung
$( ) _{\alpha}$	kovariante Ableitung in Richtung der Koordinatenlinie $\theta^{\alpha}$ auf A
$( )^T$	Transposition
$( )^{-1}$	Inversion
$\underline{I}$	Einheitsmatrix
$\delta_{ij}, \delta_i^j, \delta^{ij}$	KRONECKER Symbol
$\otimes$	dyadisches Produkt: $(\underline{a} \otimes \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c})$
:	doppelte Kontraktion: $(\underline{a} \otimes \underline{b}) : (\underline{c} \otimes \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{d}) \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c})$

### Sonstige Bezeichnungen, Indizierungen und Kopfzeiger

i, j, k, l ...	Indizierung des dreidimensionalen Raums $i = 1, 2, 3$
$\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$	Indizierung der zweidimensionalen Fläche $\alpha = 1, 2$
< >	physikalische Komponenten
$( )^-$	Term enthält ausschließlich Verschiebungsgrößen des Grundzustands
$( )^+$	Term ist linear in den Inkrementen der Verschiebungsgrößen
$( )^{++}$	Term ist quadratisch in den Inkrementen der Verschiebungsgrößen
$( )^{\cdot}$	materielle Zeitableitung
$( )^0, ( )^k$	Inkrementschritt bzw. Iterationsschritt k

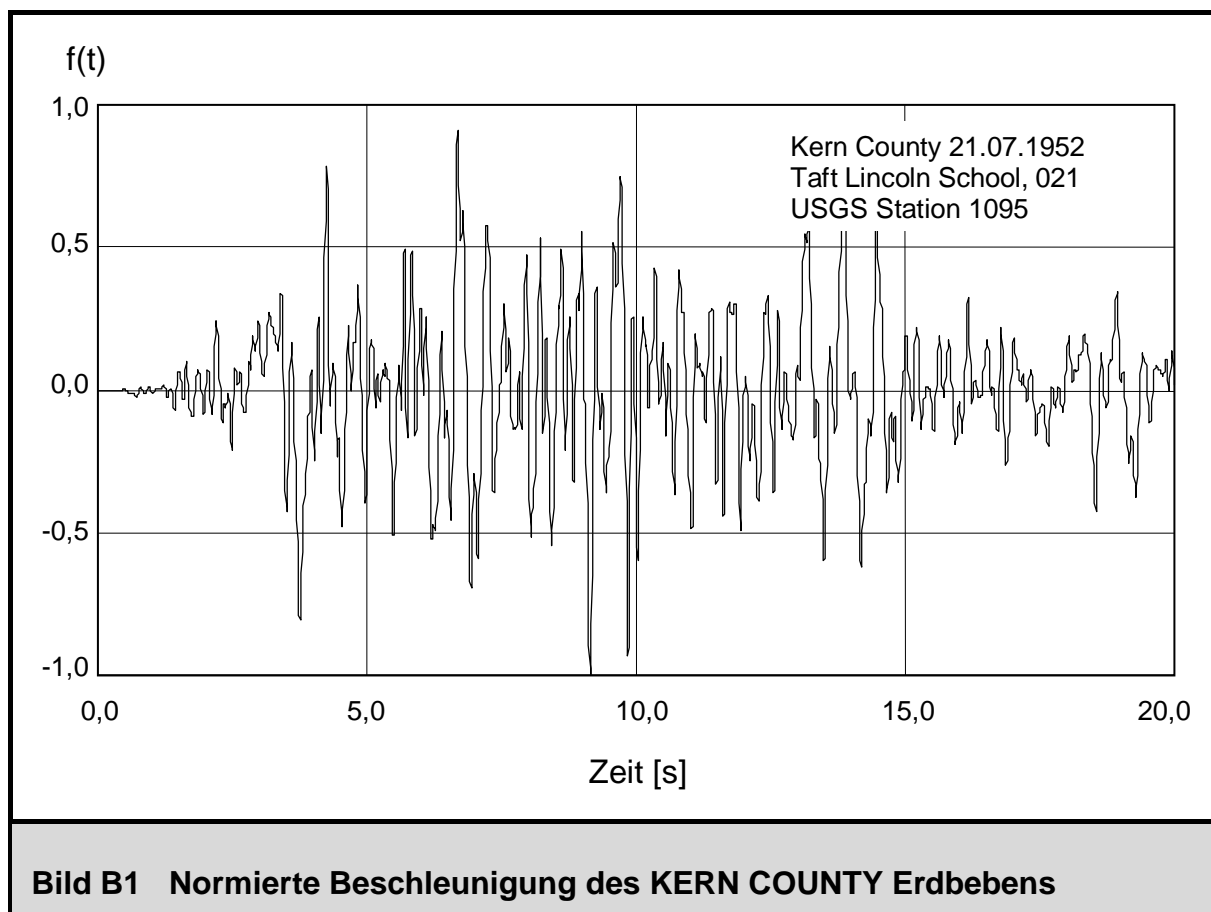
---

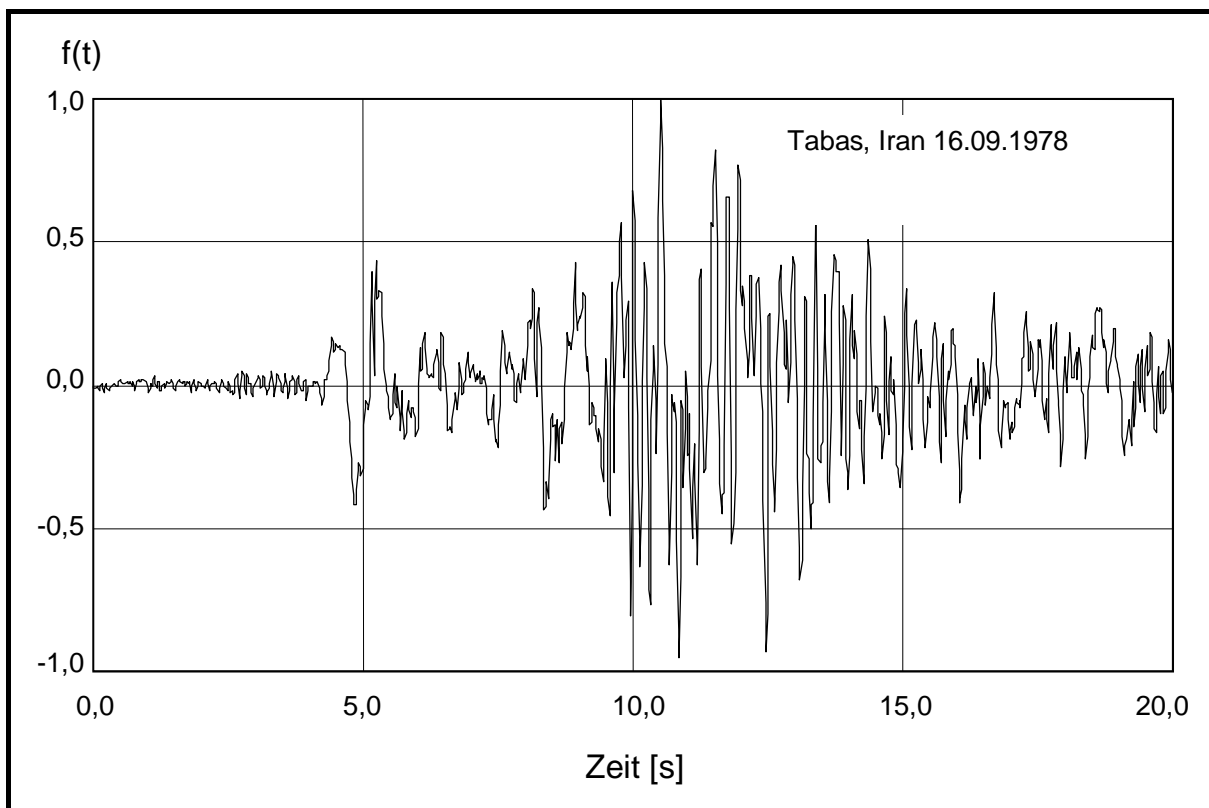
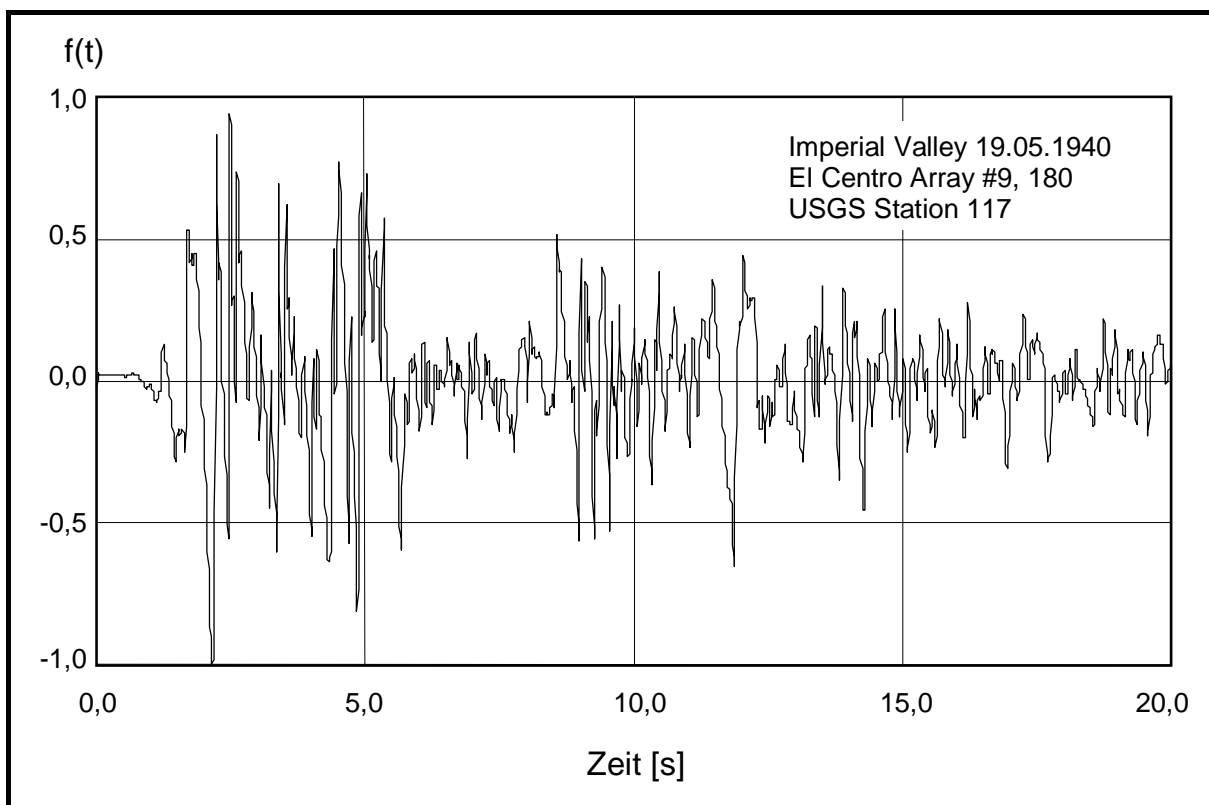
$\lambda$	Lastfaktor
$\Delta\lambda$	Lastinkrement bzw. Lastkorrektur
${}^n(\cdot)$ , ${}^m(\cdot)$ , ${}^{nm}(\cdot)$	Indizierung der Umfangswelle des Ansatzes in Ringrichtung
$(\cdot)^\circ$	auf Referenzkonfiguration bezogen
$(\cdot)^*$	auf Schalenmittelfläche bezogen
${}_i^n(\cdot)^k$	für Eigenform $i$ in Umfangswelle $n$ im Iterationsschritt $k$ (z.B. $\frac{5}{3}^+ q^2$ )

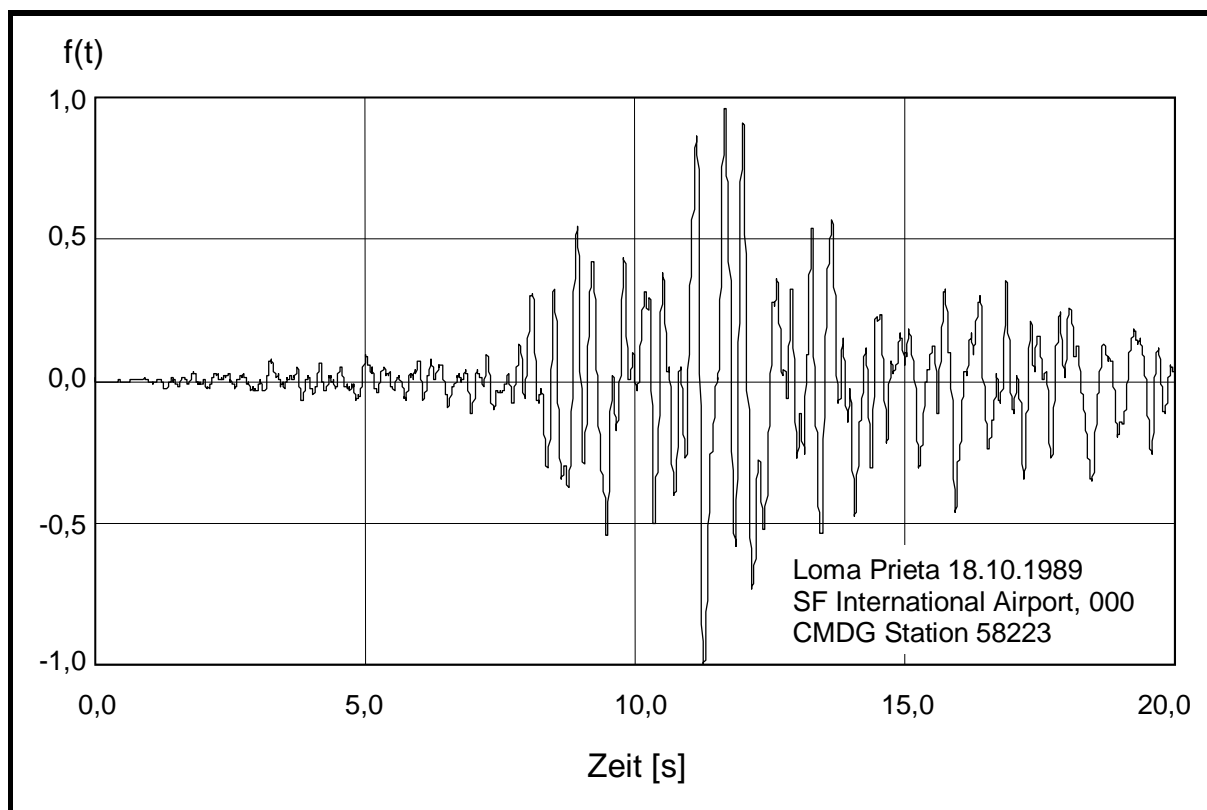


## Anhang B Erdbebenakzelerogramme

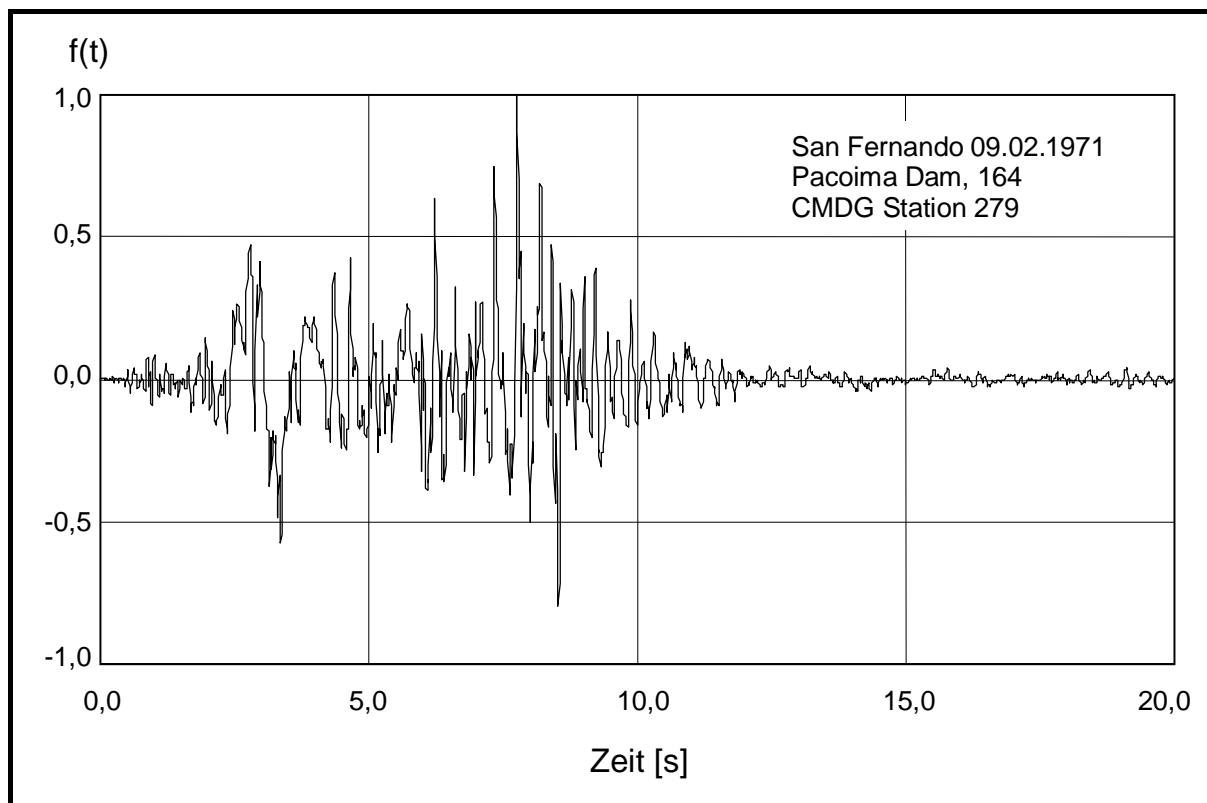
Die horizontalen Erdbebenbeschleunigungsverläufe in NS-Richtung, die den Berechnungen des Kapitels 7 zugrunde liegen, ergeben sich aus dem Produkt  $\ddot{v}_{gr} \cdot f(t)$ . Dabei stellt  $\ddot{v}_{gr}$  den maximalen Absolutwert der Bodenbeschleunigung während des gesamten Zeitverlaufs dar. Die Funktion  $f(t)$  repräsentiert normierte Einheitsbeschleunigungsverläufe in NS-Richtung aus gemessenen Beschleunigungsverläufen nach [95]. Für die Erdbeben, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet worden sind, sind diese in den Bildern B1 – B5 angegeben.



**Bild B2 Normierte Beschleunigung des TABAS Erdbebens****Bild B3 Normierte Beschleunigung des EL CENTRO Erdbebens**



**Bild B4 Normierte Beschleunigung des LOMA PRIETA Erdbebens**



**Bild B5 Normierte Beschleunigung des SAN FERNANDO Erdbebens**









