Lineare Optimierung im Mathematikunterricht

Horst W. Hamacher*
Stefanie Müller*

WiMS/TeMS-Report, Wirtschafts- und Technomathematik in Schulen

*Fachbereich Mathematik, Universität Kaiserslautern

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Warum lineare Optimierung in der Schule?

Der Mathematik wird im Allgemeinen nachgesagt, sie sei unanschaulich und nur für Mathematiker da. Das Bild der Mathematik unter Schülern ist das einer Wissenschaft, die nur ihrem Selbstzweck dient. Es erscheint wichtig, dem Vorurteil, Mathematik sei von jedem praktischen Nutzen weit entfernt, entgegenzutreten.

Mathematik ist eine Servicewissenschaft, deren Hilfe in fast allen Bereichen des Lebens benötigt wird. Schulmathematik sollte im Lebensumfeld von Schülern die Erkenntnis wecken, wie Mathematisieren abläuft, wie das Suchen nach der richtigen Theorie für die Lösung einer ganzen Klasse von Problemen in der umgekehrten Richtung wieder praktisches Handeln ermöglicht. Wenn es z.B. selbst für heutige Großcomputer schwierig ist, das ,,traveling salesman"-Problem schon für 25 zu besuchende Orte zu lösen, um wie viel notwendiger ist es daher, für dieses und ähnliche Probleme eine angemessene Theorie zu besitzen. Hier ist der Mathematiker gefordert.

Die Motivation, Unterrichtsmaterialien einer etwas anderen Art zu entwickeln, lag auch darin, dem Anspruch des Lehrplans gerecht zu werden: ,,Eine weitere Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, Schülerinnen und Schülern den Prozess des Mathematisierens nahe zu bringen. Wo sich mathematische Mittel anbieten, ein Sachproblem zu strukturieren, wesentliche Aspekte eines komplexen Sachverhalts in einem Modell darzustellen und eine Lösung zu suchen, können Wechselbeziehungen zwischen Theorie und Praxis erfahren werden. (...) Schülerinnen und Schüler (...) sollen Beziehungen zwischen einem außermathematischen Sachverhalt und der Mathematik herstellen, das Problem mit mathematischen

Mitteln bearbeiten, gefundene Lösungen interpretieren und kritisch beurteilen. Dabei sollen auch Grenzen der fachspezifischen Verfahren und Grenzen der Mathematisierung erkannt werden."[2]

Optimierung ist eines derjenigen Themen, deren praktische Relevanz offensichtlich ist. Schüler ,,optimieren" mit dem Verfahren ,,Pi mal Daumen" und erzielen in vielen Bereichen des alltäglichen Lebens auf Grundlage ihres jeweiligen Erfahrungsschatzes durchaus brauchbare Ergebnisse. Würde man in dieser Weise jedoch in entscheidenden Bereichen des Lebens vorgehen, so wäre ein Scheitern vorprogrammiert. Wenn nämlich persönliche Wertungen und Einschätzungen in die Beurteilung einer Situation einfließen, so geht damit auch die gesamte Unsicherheit mit ein, die naturgemäß bei menschlichem Handeln vorhanden ist. Wird ein Problem mathematisch behandelt, besteht diese Unsicherheit nicht.

Ehe jedoch eine Problemstellung mathematisch formuliert werden kann, muss eine Reduktion auf das Wesentliche erfolgen, welche durch den Menschen vorgenommen wird. Das hat wiederum zur Folge, dass verschiedene Menschen aus einer realen Problemstellung verschiedene mathematische Probleme extrahieren, weil sie bei gleichem zu Grunde liegenden Informationsmaterial unterschiedliche Fragestellungen zulassen. Auf diesen Prozess, der Modellierung genannt wird, wird u.a. in Abschnitt 3.1 näher eingegangen.

In Kapitel 2 soll zunächst klar werden, was der Begriff ,,Lineare Optimierung" bedeutet. Dazu werden einige Probleme aus dem wirklichen Leben aufgezählt, die mit Hilfe linearer Optimierung gelöst werden können. Eines dieser Probleme wird näher betrachtet und schließlich, nachdem in Kapitel 3 und 4 Lösungsverfahren vorgestellt wurden, in Kapitel 5 gelöst. In Kapitel 6 soll an einem weiteren Beispiel kurz erläutert werden, wie man bei einem ganzzahligen Optimierungsproblem zu einer Lösung kommt.

Der vorliegende Text ist als Handreichung für Lehrer gedacht. Den Autoren ist klar, dass er in seiner jetzigen Form für Schüler noch nicht geeignet ist, weil noch einige mathematische Begriffe benutzt werden, die im Schulunterricht im Allgemeinen nicht eingeführt werden. Es ist unsere Hoffnung, dass dieser Text von manchen Lehrern als Anregung aufgefasst wird, eine ,,schülernähere" Version zu erstellen - als gemeinsame Arbeit zwischen Universität und Schule.

Die mathematischen Gebiete, die im vorliegenden Text vorausgesetzt werden, zu deren Einführung im Schulunterricht diese Arbeit aber auch dienen kann, gehören das Zeichnen von Geraden anhand von Geradengleichungen, das Umstellen von Ungleichungen und deren geometrische Interpretation sowie das Rechnen mit Vektoren und Matrizen als Teil der linearen Algebra. Im Rahmen des vorgestellten Themengebiets bietet sich auch die Einführung des Vektorbegriffs als geordnetes Zahlen-n-Tupel an.

Kapitel 2

Was bedeutet lineare Optimierung?

Die lineare Optimierung ist ein Anwendungsgebiet der linearen Algebra und hat große Bedeutung in der Lösung von Optimierungsproblemen in Wirtschaft, Technik und Verwaltung. Es geht bei der linearen Optimierung darum, einen Wert unter bestimmten einschränkenden Bedingungen zu maximieren oder zu minimieren. Ein optimaler Wert ist also kein ,,Extremwert", sondern ein ,,Extremwert unter bestimmten Bedingungen".

Will ein Unternehmen ermitteln, wieviele Mengeneinheiten von verschiedenen Produkten zu produzieren sind, damit bei gegebenen Verkaufspreisen der Gewinn maximal wird, werden die Produktionsmöglichkeiten durch Absatzbedingungen, Kapazitätsbeschränkungen und Finanzierungsengpässe eingeschränkt.

Sollen z.B. von einem Transportunternehmen Gefahrengüter transportiert werden, soll die Anzahl der transportierten Güter maximiert werden. Die Kapazitäten des Unternehmens wie etwa Größe und Anzahl von Lastwagen schränken jedoch die Menge der zu transportierenden Güter ein. Außerdem müssen vorgegebene Sicherheitsvorschriften eingehalten werden. Je nach Gefahr, die von einem Stoff ausgeht, dürfen nur bestimmte Mengen auf einmal transportiert werden. Manche Güter dürfen nicht zusammen transportiert werden, da sie erst in Kombination gefährlich werden. Daraus lassen sich ebenfalls einschränkende Bedingungen ableiten.

Ein weiteres Beispiel eines realen Problems, dass mit Hilfe lineare Optimierung gelöst werden kann, stellt die Gestaltung einer Rohrleitung dar. Die Rohrleitung einer Anlage führe z.B. eine Flüssigkeit mit einer festen Temperatur. Die auf-

tretenden Wärmeverluste müssen vor dem Eintritt in die nächste Prozessstufe durch Aufheizen ausgeglichen werden. Die Aufheizkosten sind proportional zum Wärmeverlust. Der Wärmeverlust kann allerdings durch das Anbringen einer Isolierung, woraus Kosten entstehen, verringert werden. Soll nun ein möglichst guter Kompromiss zwischen Dicke der Isolierung und dem Ausgleich der Wärmeverluste gefunden werden, bietet sich ein Verfahren der linearen Optimierung an.
Die Wärmeverluste sind allerdings nicht nur von der Dicke der Isolierung, sondern auch vom Durchmesser des Rohres abhängig. Der Durchmesser des Rohres legt wiederum die Investionskosten für das Rohr und auch die Betriebskosten für das Rohrsystem fest, da sich aus dem Rohrdurchmesser über den Druckverlust die aufzuwendene Förderleistung ergibt. Auch hier kann durch lineare Optimierung ein Kompromiss zwischen Pumpleistung und Investionskosten gefunden werden.

Eine Erörterung weiterer Beispiele für Situationen, in denen man mit linearer Optimierung ein reales Problem lösen kann, würde sicher zu weit führen. Ein detailliertes Beispiel wird nun vorgestellt und soll, nachdem die Theorie der linearen Optimierung erörtert und das Lösungsverfahren entwickelt wurde, gelöst werden.

Beispiel 2.1 *Eine große Firma für Softdrinks möchte ein neues Produkt auf den Markt bringen. Das neue Getränk soll aus drei flüssigen Zutaten zusammengemischt werden, wobei die erste Zutat 5 Euro pro Liter, die zweite Zutat 2 Euro pro Liter und die dritte Zutat 0,25 Euro pro Liter kostet. Zutat 1 enthält außerdem 3g/l Zucker und 4 Einheiten/l eines Aromastoffes, während die zweite Zutat 7g/l Zucker und 8 Einheiten/l des Aromastoffes und die dritte Zutat 20g/l Zucker und keinen Aromastoff enthält. Aus produktionstechnischen Gründen müssen pro Produktionsvorgang mindestens 100 Liter des Getränks hergestellt werden.*

Die Marktforschung hat ergeben, dass das Getränk von der Zielgruppe angenommen wird, falls sich die Parameter in folgenden Intervallen bewegen.

Das fertige Getränk soll mindestens 3g/l und höchtens 6g/l Zucker enthalten. In einem Liter des Getränks sollen sich mindestens 3 Einheiten des Aromastoffes befinden. Außerdem soll das Getränk zu mindestens 40% aus Zutat 1 bestehen, während Zutat 2 höchstens 50% und Zutat 3 höchstens 30% des neuen Getränks ausmachen darf.

Kapitel 3

Übersetzung des realen Problems

3.1 Modellierung

Die Voraussetzungen des realen Problems müssen nun in einem mathematischen Modell erfasst werden. Dazu werden zunächst die Variablen x_1, x_2 und x_3 eingeführt, die für die Menge der jeweiligen Flüssigkeit in Litern stehen.

Die Softdrink-Firma möchte natürlich die Produktionskosten gering halten. Die Kostenfunktion

$$5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 0.25 \cdot x_3$$

ist die Summe der Produkte der jeweiligen Flüssigkeit mit ihrem Preis und heißt **Zielfunktion**.

Aus den Restriktionen bezüglich des Zuckergehalts des Getränks ergeben sich folgende **Nebenbedingungen**:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 &\geq 3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 20 \cdot x_3 &\leq 6 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung für den Aromagehalt lautet:

$$4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \geq 3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$$

Für den Anteil jeder Zutat am Softdrink erhält man ebenfalls eine Nebenbedingung.

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0.4 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_2 &\leq 0.5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\ x_3 &\leq 0.3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Die herzustellende Mindestmenge von 100 Litern pro Produktionsvorgang ergibt:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$$

Natürlich muss auch der Anteil aller Zutaten größer null sein. Man erhält die **Nichtnegativitätsbedingung** :

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Da auf der rechten Seite der Ungleichungen keine Variablen stehen sollen, sind einige Umformungen nötig. Schließlich erhält man das Optimierungsproblem[1]:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} min & 5 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 0.25 \cdot x_3 & & \\ u.d.N. & & & 4 \cdot x_2 & + & 17 \cdot x_3 & \geq & 0 \\ & -3 \cdot x_1 & + & x_2 & + & 14 \cdot x_3 & \leq & 0 \\ & x_1 & + & 5 \cdot x_2 & - & 3 \cdot x_3 & \geq & 0 \\ & 0.6 \cdot x_1 & - & 0.4 \cdot x_2 & - & 0.4 \cdot x_3 & \geq & 0 \\ & -0.5 \cdot x_1 & + & 0.5 \cdot x_2 & - & 0.5 \cdot x_3 & \leq & 0 \\ & -0.3 \cdot x_1 & - & 0.3 \cdot x_2 & + & 0.7 \cdot x_3 & \leq & 0 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 100 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

3.2 Lineare Programme

Das am Ende von Kapitel 3.1 gefundene Optimierungsmodell wird **lineares Programm** genannt. Die **Zielfunktion** $\vec{c} \cdot \vec{x}$ ist linear. Jede Lösung $\vec{x}$, die alle Nebenbedingungen erfüllt, heißt **zulässige Lösung** des LP[2]s und $\vec{c} \cdot \vec{x}$ heißt **Zielfunktionswert** dieser Lösung.

[1]u.d.N. = unter den Nebenbedingungen

[2]Lineares Programm

Beispiel 3.1 *(aus [3]) Ein weiteres lineares Programm ist:*

$$
\begin{array}{llcccc}
max & x_1 & & & & \\
u.d.N. & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Beispiel 3.1 wurde gewählt, weil es nur zwei Variable x_1 und x_2 hat. Ein lineares Programm mit nur zwei Variablen läßt sich auf sehr anschauliche Weise lösen.

3.2.1 Das graphische Lösungsverfahren

Zur Lösung eines LPs mit nur zwei Variablen kann man das graphische Lösungsverfahren verwenden. Dazu werden zunächst die Variablen x_1 und x_2 auf die Abszisse und Ordinate eines Koordinatensystems aufgetragen, in das anschließend die Nebenbedingungen eingetragen werden (vgl. Abb 3.1).

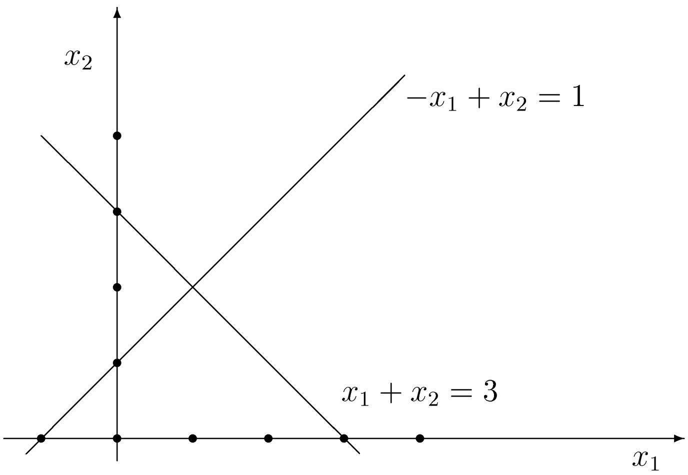

Abbildung 3.1: Graphische Darstellung der Nebenbedingungen aus Beipiel 3.1

Beachtet man, dass sie Nebenbedingungen Ungleichungen sind und dass auch die Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt sein müssen, erhält man den gepunkteten Bereich in Abbildung 3.2, in dem man die optimale Lösung suchen muss. Dieser Bereich wird **zulässiger Bereich** genannt.

Die Zielfunktion muss nun so weit wie möglich nach rechts[3] verschoben werden. Im Allgemeinen wird die Zielfunktion jedoch keine zur Ordinate parallele Gerade sein. Durch Parallelverschiebung der Zielfunktion zu größeren bzw. kleineren

[3]Bei Minimierungsproblemen verschiebt man die Zielfunktion nach links.

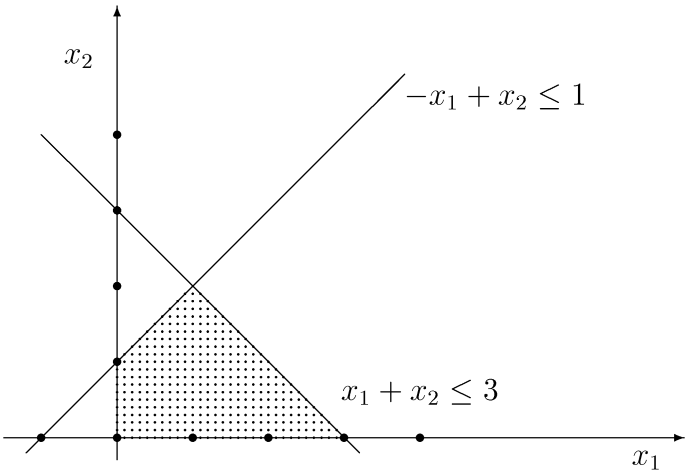

Abbildung 3.2: Graphische Darstellung des zulässigen Bereichs aus Beipiel 3.1

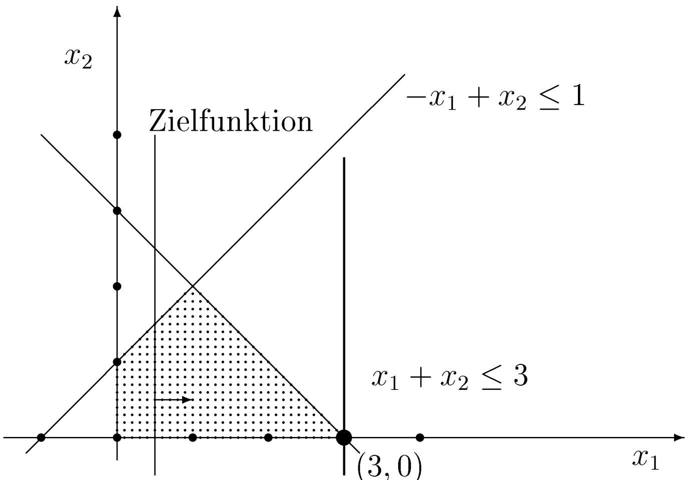

Abbildung 3.3: Graphische Darstellung des Optimierungsproblems aus Beispiel 3.1

Zielfunktionswerten hin erhält man schließlich die Optimallösung. In Abbildung 3.3 ist zu erkennen, dass die Zielfunktion nach der Verschiebung den zulässigen Bereich noch im Punkt $(3, 0)$ berührt. Damit ist die optimale Lösung $x_1 = 3$ und $x_2 = 0$ gefunden.

Kapitel 4

Die Simplexmethode

Die Idee des Simplexverfahren, mit dem im Gegensatz zum graphischen Verfahren auch LPs mit mehr als zwei Variablen betrachtet werden können, ist die, sich von Ecke zu Ecke des zulässigen Bereichs zu bewegen und dabei stets den Zielfunktionswert zu verbessern. Das Verfahren endet, wenn der Zielfunktionswert nicht mehr verbessert werden kann.

In Beispiel 3.1 würde man sich etwa von Eckpunkt $(0,0)$ zu $(3,0)$ oder über $(0,1)$ und $(1,2)$ zu $(3,0)$ bewegen, was sich in Abbildung 3.2 nachvollziehen lässt.

4.1 Standardform

Um ein LP mit dem Simplexverfahren lösen zu können, muss es in **Standardform** vorliegen.

Definition 4.1 *Ein LP der Form*

$$\begin{array}{lrcll} min & \vec{c}\cdot\vec{x} & & & \\ u.d.N. & A\vec{x} & = & \vec{b} & \\ & x_i & \leq & 0 & \forall i \end{array}$$

heißt LP in Standardform, wobei $\vec{c}$ der Kostenvektor und $\vec{b}$ der Bedarfsvektor ist und A die Koeffizientenmatrix darstellt. Man geht dabei davon aus, dass A eine $m \times n$-Matrix mit $rang(A)$[1] *$= m$ ist. Man lässt also die überflüssigen Nebenbedingungen weg.*

[1]vgl. Seite 40

Um nun ein beliebiges LP in Standardform zu überführen, müssen verschiedene Transformationen durchgeführt werden. Diese sollen an Beispiel 3.1 erläutert werden.

Das LP liegt in folgender Form vor:

$$\begin{array}{llcrcl}
max & x_1 & & & & \\
u.d.N. & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Dies ist ein Maximierungsproblem. Um ein Minimierungsproblem, wie für die Standardform gefordert, zu erhalten, muss die Zielfunktion mit -1 multipliziert werden. Man erhält:

$$\begin{array}{llcrcl}
-min & -x_1 & & & & \\
u.d.N. & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Nun sollen die Nebenbedingungen, die in Form von Ungleichungen vorliegen, in Gleichungen überführt werden. Dies geschieht durch die Einführung sogenannter **Schlupf-** und **Überschussvariablen**. Die Schlupfvariablen werden bei $\leq$-Gleichungen addiert, um Gleichheit zu erzeugen. Ebenso werden die Überschussvariablen bei $\geq$-Gleichungen subtrahiert. Im vorliegenden Beispiel sind nur $\leq$-Gleichungen vorhanden, so dass nur Schlupfvariablen eingeführt werden müssen.

$$\begin{array}{llcrcrcrcl}
-min & -x_1 & & & & & & & & \\
u.d.N. & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\
 & & & x_1, & & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

In diesem Beispiel sind alle Variablen $x_1, x_2 \geq 0$, so dass diesbezüglich keine Transformationen durchgeführt werden müssen. Wäre in einem LP eine nicht vorzeichenbeschränkte Variable x_i vorhanden, würde x_i durch $x_i^+ \geq 0$ und $x_i^- \geq 0$ ersetzt, wobei gälte: $x_i = x_i^+ - x_i^-$

Nach den notwendigen Transformationen liegt nun ein LP in Standardform vor mit

$$\text{Koeffizientenmatrix} \quad A \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Bedarfsvektor} \quad \vec{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \text{Kostenvektor} \quad \vec{c} &= (-1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix hat den $rang(A) = 2$. Je zwei Spalten sind linear unabhängig. Nimmt man jedoch zu einer beliebigen Zweierkombination von Spalten eine dritte hinzu, so sind die drei Spalten linear abhängig:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

4.2 Basisdarstellung

Definition 4.2 *Eine **Basis** von A ist eine Menge $A_B = (A_{B(1)}, ..., A_{B(m)})$, wobei $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ Spalten von A sind. A_B ist eine $m \times m$ Teilmatrix von A mit $rang(A_B) = m$. Die entsprechenden Variablen $\vec{x}_B = (x_{B(1)}, ...x_{B(m)})^T$ heißen **Basisvariablen**. Die übrigen Variablen $\vec{x}_N = (x_{N(1)}, ...x_{N(n-m)})^T$ heißen **Nichtbasisvariablen** und die entsprechenden Spalten der Koeffizientenmatrix werden durch $A_N = (A_{N(1)}, ..., A_{N(n-m)})$ zusammengefasst.*

Betrachtet man Beispiel 3.1 so lassen sich verschiedene Basen finden, z.B.:

1. $B = (3, 4) \qquad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $B = (1, 2) \qquad A_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $B = (4, 1) \qquad A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Wenn $\vec{x}$ nun eine Lösung eines LPs in Standardform ist, d.h. wenn $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ gilt, dann gilt auch $A_B \cdot \vec{x}_B + A_N \cdot \vec{x}_N = \vec{b}$, und umgekehrt.

Man kann dies leicht nachvollziehen, indem man $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ als $x_1 \cdot A_1 + ... + x_n \cdot A_n = \vec{b}$ schreibt, wobei $A_1, \ldots, A_n$ die Spalten von A sind.

Beispiel 4.1

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ = \quad & x_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit wird klar, dass sich die Summanden in der Reihenfolge vertauschen, und somit auch als $A_B \cdot \vec{x}_B + A_N \cdot \vec{x}_N = \vec{b}$ darstellen lassen.

Füer die Basis $B = (3, 4)$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} & A \cdot \vec{x} = \vec{b} \\ \Longleftrightarrow \quad & A_B \cdot \vec{x}_B + A_N \cdot \vec{x}_N = \vec{b} \\ \Longleftrightarrow \quad & A_B \cdot \vec{x}_B = \vec{b} - A_N \cdot \vec{x}_N \\ \Longleftrightarrow \quad & \vec{x}_B = A_B^{-1} \cdot \vec{b} - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot \vec{x}_N \end{aligned} \tag{4.1}$$

Gleichung 4.1 ist die **Basisdarstellung** von $\vec{x}$ bzgl. der Basis B. Aufgrund der Herleitung ist klar, dass sich jede beliebige Lösung in dieser Form darstellen lässt, falls das Inverse der Matrix A_B berechnet werden kann.

Für $B = (3, 4)$ ist A_B die Einheitsmatrix. Somit ist $A_B = A_B^{-1}$.
Für $B = (1, 2)$ ist $A_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Zur Berechnung von A_B^{-1} müssen zwei Gleichungssysteme gelöst werden:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weil die Systeme sich nur auf der rechten Seite unterscheiden, können die Rechnungen in einem Schema zusammengefasst werden:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Die inverse Matrix A_B^{-1} steht nach den Umformungen auf der rechten Seite.

Für die verschiedenen Basen aus Beispiel 3.1 läßt sich die Basisdarstellung berechnen.

1. $B = (3,4) \quad A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = A_B = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{x}_B &= I \cdot \vec{b} - I \cdot A_N \cdot \vec{x}_N \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + x_1 - x_2 \\ 3 - x_1 - x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. $B = (1,2) \quad A_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{x}_B &= \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_3 + x_4 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -x_3 - x_4 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. $B = (4,1) \quad A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \end{pmatrix} = \vec{x}_B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot x_2 + x_3 \\ -x_2 - x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.3 Basislösung

Definition 4.3 *Eine Lösung $\vec{x}$ heißt* ***Basislösung*** *von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, falls $\vec{x}_N = \vec{0}$ und somit $\vec{x}_B = A_B^{-1} \cdot \vec{b}$. Gilt zusätzlich $\vec{x}_B \geq 0$, so wird $\vec{x}$ als* ***zulässige Basislösung*** *bezeichnet.*

In Beispiel 3.1 sind die Lösungen bzgl. der Basen $B = (3,4)$ und $B = (1,2)$ zulässige Basislösungen.

1. $B = (3,4) \qquad \vec{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $B = (1,2) \qquad \vec{x}_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $B = (4,1) \qquad \vec{x}_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

   In diesem Fall ist $\vec{x}_B \not\geq \vec{0}$ und somit ist $\vec{x}$ keine zulässige Basislösung.

Beim Versuch, diese Lösungen in graphischer Form darzustellen (vgl. Abb. 4.1), erkennt man leicht, warum es sich um zulässige bzw. nicht zulässige Lösungen handelt.

Die Basislösung bzgl. Basis $B = (4,1)$ liegt mit $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$ außerhalb des zulässigen Bereichs, während die Lösungen bzgl. der Basen $B = (3,4)$ und $B = (1,2)$ mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ bzw. $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ innerhalb des zulässigen Bereichs liegen.

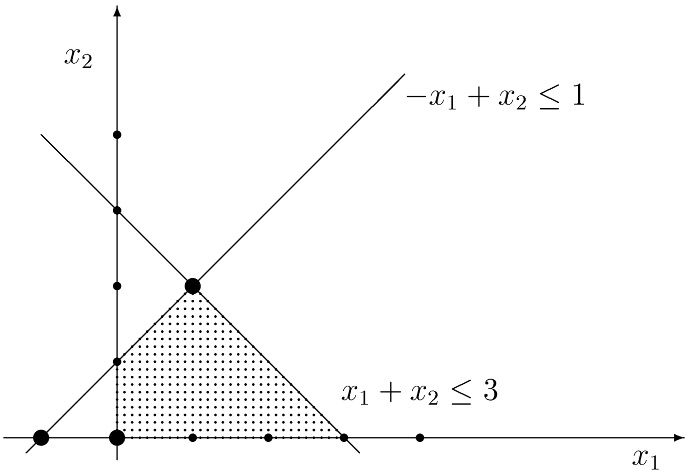

Abbildung 4.1: Graphische Darstellung zulässiger und unzulässiger Lösungen.

Man erkennt in Abb. 4.1 außerdem, dass Basislösungen den Ecken des zulässigen Bereichs entsprechen.

4.4 Optimalitätstest

Aus Kapitel 3.2.1 ist bereits bekannt, dass die optimale Lösung des LPs aus Beispiel 3.1 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ lautet.

Wie aber lässt sich aufbauend auf einer bekannten zulässigen Basislösung die optimale Lösung finden ?
Zunächst soll der Zielfunktionswert der jeweiligen Lösungen betrachtet werden. Der Zielfunktionswert der Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ beträgt $\vec{c} \cdot \vec{x} = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, während er für die Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} \cdot \vec{x} = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$ beträgt.

Man kann nun die Basisdarstellung einer beliebigen zulässigen Basislösung (vgl. Gleichung 4.1) zur Herleitung eines Optimalitätskriteriums nutzen.

$$\begin{aligned}
\vec{c} \cdot \vec{x} &= \vec{c}_B \cdot \vec{x}_B + \vec{c}_N \cdot \vec{x}_N \\
&\overset{(4.1)}{=} \vec{c}_B \cdot (A_B^{-1} \cdot \vec{b} - A_B^{-1} \cdot A_N \cdot \vec{x}_N) + \vec{c}_N \cdot \vec{x}_N \\
&= \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \vec{b} + (\vec{c}_N - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N) \cdot \vec{x}_N
\end{aligned}$$

Da für eine Basislösung $\vec{x}_N = 0$ gilt, folgt: $\vec{c} \cdot \vec{x} = \vec{c}_B \cdot \vec{x}_B = \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \vec{b}$

Die Frage ist nun, ob der Zielfunktionswert noch weiter verbessert werden kann.
Bei Modifikation der Lösung ergibt sich eine Änderung des Zielfunktionswerts um $(\vec{c}_N - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N) \cdot \vec{x}_N$. Da bisher $\vec{x}_N = \vec{0}$ gilt, besteht nur die Möglichkeit $\vec{x}_N$ zu vergrößern. Da wir außerdem stets ein Minimierungsproblem betrachten und somit den Zielfunktionswert verkleinern wollen, muss für ein $j \in \{1, \ldots, n-m\}$ $(c_{N(j)} - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_{N(j)}) < 0$ sein, um eine Verbesserung des Zielfunktionswerts erreichen zu können.
Das bedeutet:

Satz 4.1 *Die zulässige Basislösung $\vec{x}$ bzgl. B ist optimal, falls*
$(c_{N(j)} - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_{N(j)}) \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n-m\}$

Die Werte $\bar{c}_{N(j)} := (c_{N(j)} - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_{N(j)})$, die **reduzierte Kosten** genannt werden, geben also Auskunft darüber, ob es sinnvoll ist, den Wert einer Nichtbasisvariablen $x_{N(j)}$ von 0 auf einen Wert $\delta > 0$ zu erhöhen.

Beispiel 4.2 *Im folgenden sollen nun nochmals die Lösungen bzgl. der verschiedenen Basen betrachtet werden.*

1. $B = (3,4)$, $N = (1,2)$

$$\begin{aligned}
& \vec{c}_N - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N \\
= \; & (-1,0) - (0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
= \; & (-1,0) - (0,0) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
= \; & (-1,0) - (0,0) \\
= \; & (-1,0) \not\geq (0,0)
\end{aligned}$$

Das Optimalitätskriterium ist nicht erfüllt.

2. $B = (1,2)$, $N = (3,4)$

$$\begin{aligned}
& \vec{c}_N - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N \\
= \; & (0,0) - (-1,0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= \; & (0,0) - \frac{1}{2} \cdot (-1,0) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (0,0) - \frac{1}{2} \cdot (1,-1) \\ &= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \ngeq (0,0) \end{aligned}$$

Das Optimalitätskriterium ist nicht erfüllt.

3. $B = (1,3)$, $N = (2,4)$

$$\begin{aligned} & \vec{c}_N - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N \\ = \; & (0,0) - (-1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \; & (0,0) - (-1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = \; & (0,0) - (-1,-1) \\ = \; & (1,1) \geq (0,0) \end{aligned}$$

Also ist die zu B gehörende Basislösung optimal.

$$\begin{aligned} \vec{x}_B &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_B^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \vec{x}_N &= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie bereits in Kapitel 3.2.1 graphisch ermittelt, ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ [2] *die optimale Lösung.*

4.5 Basisänderung

Wie in Kapitel 4.3 bereits erwähnt, entsprechen die zulässigen Basislösungen den Ecken des zulässigen Bereichs. Entsprechend der Idee des Simplexverfahrens von Ecke zu Ecke zu gehen solange sich der Zielfunktionswert noch verbessert,

[2] Mit $\vec{x}$ ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gemeint. Sobald eine endgültige Lösung angegeben wird, werden Schlupf-, Überschuss- oder sonstige Variablen, die nur zur Überführung des LPs in Standardform benötigt wurden, außer Acht gelassen.

werden wir nun von einer zulässigen Basislösung zur nächsten gehen solange das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist.

Wie allerdings kommt man von einer zulässigen Basislösung zur nächsten ?

Es besteht die Situation, dass das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist. Das heißt, $\exists \quad s \in \{1, \ldots, n-m\} : \bar{c}_{N(s)} = c_{N(s)} - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_{N(s)} < 0$
Bis jetzt war $x_{N(s)} = 0$, aber nun wird $x_{N(s)}$ auf einen Wert $\delta > 0$ erhöht, während alle anderen Nichtbasisvariablen $x_{N(j)}$ gleich bleiben.

Was passiert mit dem Zielfunktionswert, wenn $x_{N(s)} = \delta$ *wird?*

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{x} &= \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \vec{b} + (\vec{c}_N - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N) \cdot \vec{x}_N \\ &= \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \vec{b} + \underbrace{(\vec{c}_{N(s)} - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})}_{<0} \cdot \delta \end{aligned}$$

d.h. der Zielfunktionswert $\vec{c} \cdot \vec{x}$ wird kleiner, da $\delta > 0$ ist.

Anschließend stellt sich die Frage, wie groß δ gewählt werden kann. Natürlich soll δ so groß wie möglich gemacht werden, da der Zielfunktionswert minimiert werden soll.

Hierzu betrachten wir die Basisdarstellung 4.1 der Lösung

$$\vec{x}_B = A_B^{-1} \cdot \vec{b} + A_B^{-1} \cdot A_N \cdot \vec{x}_N$$

Da alle Nichtbasisvariablen außer $x_{N(s)}$ gleich null bleiben, gilt:

$$\begin{aligned} \vec{x}_B &= A_B^{-1} \cdot \vec{b} + A_B^{-1} \cdot A_N \cdot x_{N(s)} \\ &= A_B^{-1} \cdot \vec{b} + A_B^{-1} \cdot A_N \cdot \delta \end{aligned}$$

Da die neue Lösung weiterhin zulässig bleiben soll, muss jede Komponente von $\vec{x}_B$ größer oder gleich null sein.

$$(\vec{x}_B)_i = (A_B^{-1} \cdot \vec{b})_i + (A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_i \cdot \delta \geq 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

Da δ möglichst groß gewählt werden soll, ergibt sich:

$$\delta = x_{N(s)} := min \left\{ \frac{(A_B^{-1} \cdot \vec{b})_i}{(A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_i} : (A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_i > 0 \right\} \tag{4.2}$$

Bei der Berechnung von δ mit Hilfe von Gleichung 4.2, die **Quotientenregel** genannt wird, können zwei Fälle auftreten.

1. Fall:

$$\forall i = 1, \ldots, m: \quad (A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_i \leq 0$$

In diesem Fall ergibt sich aus der Quotientenregel keine Einschränkung für δ. δ kann also beliebig groß und somit der Zielfunktionswert beliebig klein gemacht werden. In diesem Fall heißt das LP **unbeschränkt** .

2. Fall:

$$\begin{aligned} \delta = x_{N(s)} &:= min \left\{ \frac{(A_B^{-1} \cdot \vec{b})_i}{(A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_i} : (A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_i > 0 \right\} \\ &= \frac{(A_B^{-1} \cdot \vec{b})_r}{(A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_r} \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} x_{N(j)} &= 0 \quad \forall j \neq s \\ x_{N(s)} &= \frac{(A_B^{-1} \cdot \vec{b})_r}{(A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_r} \\ x_{B(i)} &= (A_B^{-1} \cdot \vec{b})_i - (A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_i \cdot x_{N(s)} \\ &= (A_B^{-1} \cdot \vec{b})_i - (A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_i \cdot \frac{(A_B^{-1} \cdot \vec{b})_r}{(A_B^{-1} \cdot A_{N(s)})_r} \end{aligned}$$

Es findet ein sogenannter **Basisaustausch** statt. $B(r)$ verläßt die Basis, d.h. $x_{B(r)} = 0$, und $N(s)$ tritt in die Basis ein, d.h. $x_{N(s)} > 0$. ([3])

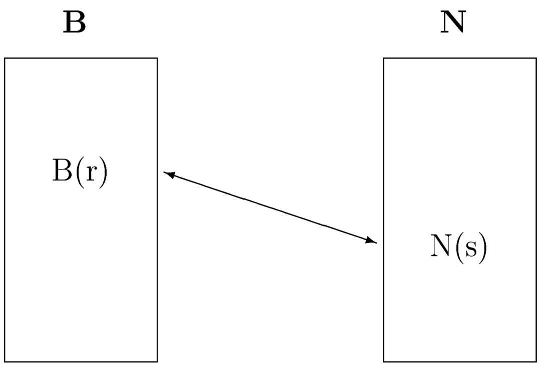

Abbildung 4.2: Basisaustausch: $B(r)$ verlässt die Basis, $N(s)$ tritt in die Basis ein.

Beispiel 4.3 $B = (3,4)$, $N = (1,2)$
Wie bereits in Beispiel 4.2 ermittelt, ist die zu dieser Basis gehörende Basislösung nicht optimal. $\vec{c}_N - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A_N = (-1, 0)$, *das bedeutet, dass durch die Vergrößerung von* $x_{N(1)}$ *eine Verbesserung des Zielfunktionswerts zu erreichen ist.*

$$\begin{aligned} x_{N(1)} = \delta &= min\left\{\frac{(A_B^{-1} \cdot \vec{b})_i}{(A_B^{-1} \cdot A_{N(1)})_i} : (A_B^{-1} \cdot A_{N(1)})_i > 0\right\} \\ &= \left\{\frac{(A_B^{-1} \cdot \vec{b})_2}{(A_B^{-1} \cdot A_{N(1)})_2}\right\} \\ &= \left\{\frac{3}{1}\right\} = 3 = x_1 \end{aligned}$$

$$x_{N(2)} = x_2 = 0$$

$$x_{B(1)} = x_3 = (A_B^{-1} \cdot \vec{b})_1 - (A_B^{-1} \cdot A_{N(1)})_1 \cdot x_{N(1)} = 1 - (-1) \cdot 3 = 4$$

$$x_{B(2)} = x_4 = (A_B^{-1} \cdot \vec{b})_2 - (A_B^{-1} \cdot A_{N(1)})_2 \cdot x_{N(1)} = 3 - 1 \cdot 3 = 0$$

Die neue Basis lautet nun $B' = (3,1)$, $N' = (4,2)$. *Bei graphischer Betrachtung stellt man fest, dass man sich von der Basislösung bzgl.* $B = (3,4)$ $\vec{x} = (0,0)$ *zur Basislösung bzgl.* $B' = (3,1)$ $\vec{x} = (3,0)$ *bewegt hat (vgl. Abb. 4.3).*

4.6 Tableaus

Bevor in Kapitel 4.7 das Simplexverfahren in zusammengefasster Form dargestellt wird, soll der Basisaustausch in effizienter Weise organisiert werden. Dies soll

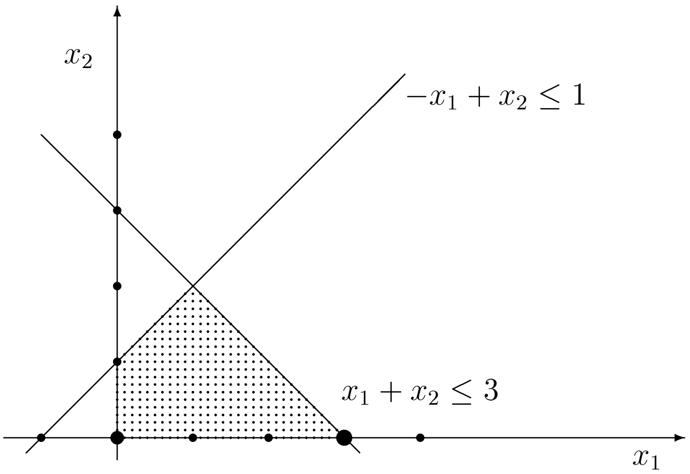

Abbildung 4.3: Graphische Darstellungen der Basislösungen bzgl. $B = (3,4)$: $\vec{x} = (0,0)$ und bzgl. $B' = (3,1)$: $\vec{x} = (3,0)$ als Ecken des zulässigen Bereichs.

durch die Speicherung des LPs in sogenannten **Tableaus** geschehen.

Die Zielfunktion wird umgeschrieben als $-z + c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n = 0$ und sie wird wie auch die Nebenbedingungen in einer Matrix gespeichert, die in Tableauform als **Ausgangstableau** $T = (t_{ij})$ mit $i = 0, 1, \ldots, m$ und $j = 0, 1, \ldots, n, n+1$ geschrieben wird:

$$T = \begin{array}{c|ccc|c} -z & x_1 & \ldots & x_n & \\ \hline 1 & c_1 & \ldots & c_n & 0 \\ \hline 0 & a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \vec{c} & 0 \\ \hline \vec{0} & A & \vec{b} \\ \hline \end{array}$$

T repräsentiert ein Gleichungssystem mit m+1 Gleichungen. Die 0-te Spalte gehört zur Variablen $-z$, die i-te Spalte zu x_i $(i = 1, \ldots, n)$ und die $(n+1)$-te Spalte enthält die Information für die rechten Seiten.
Für eine Basis B, bezeichnet man mit T_B die reguläre $(m+1) \times (m+1)$ - Matrix

$$T_B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \vec{c}_B \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_B \\ 0 & \end{array} \right)$$

$$T_B^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \\ \hline \vec{0} & A_B^{-1} \end{array} \right)$$

$$T_B^{-1}T \quad = \quad \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \vec{c} - \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A & -\vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \vec{b} \\ \hline 0 & & \\ \vdots & A_B^{-1} \cdot A & A_B^{-1} \cdot \vec{b} \\ 0 & & \end{array}\right) =: T(B)$$

$T(B)$ heißt das zur Basis B gehörende **Simplextableau** :

- Die erste Spalte ist immer der Vektor $(1, 0, \ldots, 0)^T$. Diese Spalte verdeutlicht nur den Gleichungscharakter der 0-ten Zeile. Da sich diese Spalte während des Simplexverfahrens nicht verändert, kann sie weggelassen werden.
- Für $j = B(i) \in B$ gilt $A_B^{-1}A_j = \vec{e}_i^{\,\mathrm{T}}$ (i-ter Einheitsvektor mit m Komponenten). Weiter gilt $c_j - \vec{c}_B A_B^{-1} A_j = c_j - c_j = 0$. Also enthält $T(B)$ in der Spalte, die zur i-ten Basisvariablen $x_{B(i)}$ gehört, den Wert 0 in der 0-ten Zeile und anschliessend den i-ten Einheitsvektor mit m Komponenten.
- Für $j = N(i) \in N$ ist der Eintrag $t_{0j} = c_j - \vec{c}_B A_B^{-1} A_j = \overline{c}_j$, d.h. die t_{0j} sind die reduzierten Kosten der Nichtbasisvariablen x_j.
- In der letzten Spalte ist $A_B^{-1} \cdot \vec{b}$ der Vektor der Basislösung bzgl. B und folglich ist $-\vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \vec{b}$ das Negative des Zielfunktionswertes der momentanen Basislösung.

Beispiel 4.4 *Bei erneuter Betrachtung von Beispiel 3.1 mit Basis* $B = (1, 2)$ *ergibt sich:*

$$T = \begin{array}{c|ccccc|c|} -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Weil gilt:

$$\begin{aligned} A_B^{-1} &= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \\ \vec{c}_B \cdot A_B^{-1} &= (-1, 0) \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

erhält man:

$$T_B^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -1/2 & 1/2 \\ \hline 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Somit lautet das zur Basis B gehörende Simplextableau

$$T(B) = T_B^{-1}T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} -z & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{|c|cccc|c|} \hline 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Entsprechend der Interpretation von $T(B)$ liest man in der 0-ten Zeile die reduzierten Kosten $\bar{c}_3 = -1/2$, $\bar{c}_4 = 1/2$ der Nichtbasisvariablen ab und sieht, dass das Optimalitätskriterium nicht erfüllt ist. Aus der letzten Spalte sehen wir, dass $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ die Werte der Basisvariablen in der Basislösung sind mit Zielfunktionswert $-t_{0\,n+1} = -1$.

Falls $t_{0j} < 0$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ ist das Optimalitätskriterium nicht erfüllt und man versucht, die Nichtbasisvariable in die Basis zu bekommen. Mit Hilfe des Simplextableaus kann mit der Quotientenregel leicht der Wert für δ berechnet werden:

$$\delta = x_j = \min \left\{ \frac{t_{i\,n+1}}{t_{ij}} \;:\; t_{ij} > 0 \right\}.$$

Eine unbeschränkte Zielfunktion erkennt man somit daran, dass eine zu einer Nichtbasisvariablen x_j mit $t_{0j} < 0$ gehörende Spalte nur Einträge ≤ 0 enthält. Ist $\delta = \frac{t_{r\,n+1}}{t_{rj}}$, so führt man eine sogenannte **Pivotoperation** mit dem Element $t_{rj} > 0$ durch, d.h. man verwandelt durch elementare Zeilenoperationen die j-te Spalte von $T(B)$ in einen Einheitsvektor. Das sich ergebende Tableau ist das Simplextableau $T(B')$ bzgl.der neuen Basis B'.

Beispiel 4.5 *Wir setzen Beispiel 4.4 fort. Da $t_{03} = -1/2$ ist, soll x_3 in die Basis gebracht werden. Die Quotientenregel ergibt $\delta = x_3 = \frac{t_{25}}{t_{23}} = \frac{2}{1/2} = 4$, also wird das letzte Tableau aus Beispiel 4.4 mit dem Element $t_{23} = \frac{1}{2}$ pivotiert.*

$$\underset{T(B)}{\begin{array}{|c|cccc|c|} \hline 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1/2} & 1/2 & 2 \\ \hline \end{array}} \longrightarrow \underset{T(B')}{\begin{array}{|c|cccc|c|} \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}}$$

In $T(B')$ sind alle reduzierten Kosten t_{0j} nicht negativ, also ist die zugehörige Basislösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ optimal.

Falls $t_{0j} \geq 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$ und $t_{i\,n+1} \geq 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$, nennt man $T(B)$ ein **optimales (Simplex-) Tableau**. ([3])

4.7 Der Simplexalgorithmus

Die in den vorherigen Abschnitten erarbeitete Vorgehensweise soll nun in Form eines Algorithmus formuliert werden.

Simplexalgorithmus

Problem: $min\{\vec{c}\vec{x} : A \cdot \vec{x} = \vec{b},\ \vec{x} \geq \vec{0}\}$

(INPUT) Zulässige Basislösung $\vec{x} = (\vec{x}_B, \vec{x}_N)$ bzgl. einer Basis B.

(1) Berechne das Simplextableau $T(B)$.

(2) Falls $t_{0j} \geq 0 \;\; \forall\, j = 1, \ldots, n$

(**STOP**) $\vec{x} = (\vec{x}_B, \vec{x}_N)$ mit $x_{B(i)} = t_{i\,n+1}$ $(i = 1, \ldots, m)$ und $\vec{x}_N = \vec{0}$ ist die optimale Lösung des LP mit Zielfunktionswert $-t_{0\,n+1}$

(3) Wähle ein j mit $t_{0j} < 0$.

(4) Falls $t_{ij} \leq 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots, m$

(**STOP**) Das LP ist unbeschränkt.

(5) Berechne $r \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\frac{t_{r\,n+1}}{t_{rj}} = \min\left\{\frac{t_{i\,n+1}}{t_{ij}} : t_{ij} > 0\right\}$
und pivotiere mit t_{rj}.
Gehe zu (2).

Kapitel 5

Beispiel: Softdrinks

Nun kann man zu Beispiel 2.1 zurückkehren und mit dem Simplexverfahren eine optimale Lösung bestimmen.

5.1 Standardform

Das LP muß nun in Standarform überführt werden. Nach Einführung von Überschuss- und Schlupfvariablen ergibt sich:

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
min & 5x_1 + & 2x_2 + & 0.25x_3 & & & & & & & & & \\
u.d.N. & & 4x_2 + & 17x_3 & -x_4 & & & & & & = & 0 & \\
 & -3x_1 + & x_2 + & 14x_3 & & +x_5 & & & & & = & 0 & \\
 & x_1 + & 5x_2 - & 3x_3 & & & -x_6 & & & & = & 0 & \\
 & 0.6x_1 - & 0.4x_2 - & 0.4x_3 & & & & -x_7 & & & = & 0 & \\
 & -0.5x_1 + & 0.5x_2 - & 0.5x_3 & & & & & +x_8 & & = & 0 & \\
 & -0.3x_1 - & 0.3x_2 + & 0.7x_3 & & & & & & +x_9 & = & 0 & \\
 & x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & & & -x_{10} & = & 100 & \\
 & & & & & & & & & x_i & \geq & 0 & i = 1, \ldots, 10
\end{array}
$$

Wie es für den Algorithmus benötigt wird, liegt das Problem nun in Standardform vor mit

$$\vec{c} = (5, 2, 0.25, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\vec{b}^T = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 100)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 17 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 14 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & -0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & -0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.2 Simplexverfahren

Als (INPUT) wird eine zulässige Basislösung bzgl. einer Basis B benötigt.
$B = (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ ist eine Basis. Es muss nun überprüft werden, ob die zugehörige Basislösung zulässig ist, ob $\vec{x}_B = A_B^{-1} \cdot \vec{b} \geq \vec{0}$ gilt.

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 300 \\ 100 \\ 60 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Die Basis $B = (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ ist also zulässig. Somit kann der Algorithmus starten.

(1) Berechnung von $T(B)$:

- $$A_B^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.3 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 17 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 14 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & -0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.3 & -0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3 \end{pmatrix}$$

- $$\vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot A = (5, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3 \end{pmatrix}$$
$$= (5, 5, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5)$$

- $\vec{c}_B \cdot A_B^{-1} \cdot \vec{b} = (5,0,0,0,0,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 300 \\ 100 \\ 60 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = 500$
- $\vec{c} - \vec{c}_b \cdot A_B^{-1} \cdot A = (5,2,0.25,0,0,0,0,0,0,0) - (5,5,5,0,0,0,0,0,0,-5)$
  $= (0,-3,-\frac{19}{4},0,0,0,0,0,0,5)$

$$\Longrightarrow T(B) = \left|\begin{array}{c|cccccccccc|c} 1 & 0 & -3 & -\frac{19}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -500 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 17 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 300 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.6 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3 & 30 \end{array}\right|$$

Die erste Spalte kann im folgenden, wie bereits auf Seite 25 erläutert, weggelassen werden.

(2) $t_{02} < 0$ und $t_{03} < 0 \Longrightarrow$ Die Lösung ist noch nicht optimal.

(3) Sei $j = 2$ mit $t_{02} = -3 < 0$.

(4) $t_{12}, t_{32}, t_{52}, t_{62} > 0 \Longrightarrow$ Das LP ist nicht unbeschränkt.

(5) $\delta = \frac{t_{r\,n+1}}{t_{r2}} = \min\left\{\frac{t_{i\,n+1}}{t_{i2}} : t_{i2} > 0\right\} = \min\left\{100, \frac{300}{4}, 60, 50\right\} = 50 \Rightarrow r = 6$
Nun muss mit t_{62} pivotiert werden:

$$T(B) = \left|\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & \boxed{-3} & -\frac{19}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -500 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & -4 & -17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 300 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.6 & 60 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3 & 30 \end{array}\right|$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{|cccccccccc|c|}
\hline
0 & 0 & -\frac{19}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3.5 & -350 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.5 & 50 \\
0 & 0 & -17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 200 \\
0 & 0 & 17 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & 100 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -3 & 300 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -0.1 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 50 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3 & 30 \\
\hline
\end{array}$$

Die Spalte 2 ist nun neu in die Basis eingetreten, während die achte Spalte die Basis verlassen hat. Die neue Basis lautet $B = (1, 2, 4, 5, 6, 7, 9)$.
$\longrightarrow$ (2)

(2) $t_{03} < 0 \Longrightarrow$ Die Lösung ist noch nicht optimal.

(3) Sei $j = 3$ mit $t_{02} = -\frac{19}{4} < 0$.

(4) $t_{13}, t_{33}, t_{43}, t_{53}, t_{73} > 0 \Longrightarrow$ Das LP ist nicht unbeschränkt.

(5) $\delta = \frac{t_{r\,n+1}}{t_{r3}} = \min\left\{\frac{t_{i\,n+1}}{t_{i3}} : t_{i3} > 0\right\} = \min\left\{50, \frac{100}{17}, \frac{300}{4}, 10, 30\right\} = \frac{100}{17} \Rightarrow r = 3$
Nun muss mit t_{33} pivotiert werden:

$$T(B) = \begin{array}{|cccccccccc|c|}
\hline
0 & 0 & \boxed{-\frac{19}{4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3.5 & -350 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -0.5 & 50 \\
0 & 0 & -17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 200 \\
0 & 0 & \boxed{17} & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & 100 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -3 & 300 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -0.1 & 10 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 50 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.3 & 30 \\
\hline
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{|cccccccccc|c|}
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{68} & 0 & 0 & \frac{32}{17} & 0 & \frac{219}{68} & -\frac{5475}{17} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{17} & 0 & 0 & -\frac{13}{17} & 0 & -\frac{15}{34} & \frac{750}{17} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 300 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{17} & 0 & 0 & -\frac{4}{17} & 0 & -\frac{1}{17} & \frac{100}{17} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{17} & 1 & 0 & \frac{84}{17} & 0 & -\frac{47}{17} & \frac{4700}{17} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{17} & 0 & 1 & -\frac{13}{17} & 0 & -\frac{7}{170} & \frac{70}{17} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.5 & 50 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{17} & 0 & 0 & \frac{4}{17} & 1 & -\frac{41}{170} & \frac{410}{17} \\
\hline
\end{array}$$

Die neue Basis lautet $B = (1, 2, 3, 4, 6, 7, 9)$.
$\longrightarrow$ (2)

(2) $t_{0j} \geq 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \quad$ (STOP)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750/17 \\ 50 \\ 100/17 \\ 300 \\ 0 \\ 4700/17 \\ 70/17 \\ 0 \\ 410/17 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist optimal mit Zielfunktionswert $-t_{0n+1} = \frac{5475}{17} \approx 322$

Aus dem optimalen Tableau wurden die Werte für $x_1, \ldots, x_{10}$ folgendermaßen abgelesen:

Nichtbasisvariable haben den Wert null, d.h. in diesem Fall $x_5 = 0$, $x_8 = 0$ und $x_{10} = 0$.

Die Werte der Basisvariablen stehen in der letzten Spalte. In der ersten Spalte steht der Einheitsvektor mit der 1 in der ersten Zeile. Deshalb wird der Basisvariablen x_1 der Wert $\frac{750}{17}$ zugeordnet, der in der letzten Spalte in der ersten Zeile steht.
In der zweiten Spalte ist der Einheitsvektor mit der 1 in der sechsten Zeile zu finden. Somit ist $x_2 = 50$, weil 50 in der letzten Spalte in der sechsten Zeile steht. Ebenso wurden auch die Werte für die übrigen Basisvariablen abgelesen.

Diese Vorgehensweise ist leicht einzusehen, wenn man sich erinnert, dass die Nichtbasisvariablen gleich null sind und die Tableaus ein Gleichungssystem repräsentieren.

Kapitel 6

Beispiel: Gartenmaschinen

In diesem Abschnitt soll ein weiteres Beispiel betrachtet werden, an dem einige Grenzen und Schwierigkeiten des Simplexverfahren illustriert werden.

Beispiel 6.1 *Ein Unternehmen produziert und verkauft vier verschiedene Gartenmaschinen: Häcksler, Rasenmäher, Kleintraktoren und Mähmaschinen. Pro Häcksler werden 1500 Euro Gewinn erzielt, während pro Rasenmäher 3500 Euro, pro Kleintraktor 3000 Euro und pro Mähmaschine 4000 Euro verdient wird. Das Unternehmen möchte selbstverständlich seinen Gewinn maximieren.*

Die Herstellung erfolgt in einem dreistufigen Prozess:
Stufe 1: Einzelteilfertigung
Stufe 2: Oberflächenvergütung
Stufe 3: Montage
Für die einzelnen Fertigungsstufen sind definierte Fertigungszeiten pro Produktionseinheit gegeben. Außerdem sind die Produktionskapazitäten in den einzelnen Fertigungsstufen begrenzt. Folgende Tabelle stellt die Bedingungen dar:

Produkt	*Häcksler*	*Rasenmäher*	*Traktor*	*Mähmaschine*	*Kapazität*
Stufe 1	*3.0*	*1.0*	*3.0*	*4.0*	*315*
Stufe 2	*1.0*	*2.0*	*2.7*	*4.0*	*270*
Stufe 3	*2.0*	*5.0*	*5.5*	*3.0*	*400*

Es wird erwartet, dass maximal 30 Häcksler absetzbar sind. Außerdem sollen aus betriebspolitischen Gründen mindestens zwölf Rasenmäher, 20 Kleintraktoren und zehn Mähmaschinen abgesetzt werden.

6.1 Lösung mit Simplexverfahren

Für Beispiel 6.1 ergibt sich folgendes Optimierungsmodell:

$$
\begin{array}{lccccccccl}
max & 1.5x_1 & + & 3.5x_2 & + & 3.0x_3 & + & 4.0x_4 & & \\
u.d.N. & 3.0x_1 & + & 1.0x_2 & + & 3.0x_3 & + & 4.0x_4 & \leq & 315 \\
 & 1.0x_1 & + & 2.0x_2 & + & 2.7x_3 & + & 4.0x_4 & \leq & 270 \\
 & 2.0x_1 & + & 5.0x_2 & + & 5.5x_3 & + & 3.0x_4 & \leq & 400 \\
 & x_1 & & & & & & & \leq & 30 \\
 & & & x_2 & & & & & \geq & 12 \\
 & & & & & x_3 & & & \geq & 20 \\
 & & & & & & & x_4 & \geq & 10 \\
 & & & & & & & x_i & \geq & 0 \quad \forall i = 1, \ldots, 4
\end{array}
$$

Nach Umformung in Standardform und Anwenden des Simplexverfahrens erhält man folgende Lösung: $x_1 = 0, x_2 = 36,5714, x_3 = 20, x_4 = 35,7143$ [1]. Das nun auftauchende Problem ist leicht zu sehen. Die Lösung ist nicht ganzzahlig. Was bei Beispiel 2.1 kein Problem dargestellt hat, denn ist es nicht schwierig $\frac{750}{17}l \approx 44.12l$ von einer Flüßigkeit abzumessen, ist nun problematisch. Es gibt nur *ganze* Gartenmaschinen.

6.2 Ganzzahlige Optimierung

In der ganzzahligen Optimierung werden Probleme betrachtet, bei denen die Lösung ganzzahlig sein muß. Die ganzzahlige Optimierung soll hier nicht so ausführlich wie das Simplexverfahren erörtert werden. Trotzdem sollen einige Einblicke gegeben werden, wie man eine ganzzahlige Lösung erhalten kann.

6.2.1 Problematik

Betrachten wir noch einmal die Lösung, die wir für Beispiel 6.1 erhalten haben:
$x_1 = 0, x_2 = 36,571438, x_3 = 20, x_4 = 35,71429$
Diese Lösung löst nicht wirklich das Problem des Unternehmers, der die Produktion seiner Gartenmaschinen optimieren will. Er benötigt eine ganzzahlige Lösung.

[1] Im Internet findet man z.B. unter [4] Software, mit der man unter anderem lineare Programme lösen kann.

Wie kann man vorgehn, um ausgehend von der Optimallösung eine ganzzahlige Lösung zu erhalten ?
Es ist naheliegend, eine ganzzahlige Lösung durch Auf- oder Abrunden der Optimallösung zu erhalten. Für Beispiel 6.1 erhält man somit $x_1 = 0$, $x_2 = 37$, $x_3 = 20$, $x_4 = 36$ als Lösung. Diese Lösung ist aber unzulässig, da sie die zweite und dritte Nebenbedingung des LPs verletzt.
Es gibt auch Fälle, in denen man durch Runden der Lösung eine zulässige aber sehr schlechte ganzzahlige Lösung erhält.

Man erkennt also, dass die naheliegende Methode, eine ganzzahlige Lösung durch Runden zu erzeugen, schnell zu schlechten oder sogar unzulässigen Lösungen führt. Im nachfolgenden sollen kurz eine bessere Methode zur Erzeugung einer ganzzahligen Lösung vorgestellt werden.

6.2.2 Lösung im zweidimensionalen Fall

Aufgrund der Möglichkeit der graphischen Darstellung wird die Methode zur Erzeugung ganzzahliger Lösungen an einem Beispiel mit zwei Variablen vorgestellt.

Beispiel 6.2 *Ein Transportunternehmen möchte verschiedene Güter transportieren, die in verschiedene Gefahrenstufen eingeteilt werden. Eine Einheit von Gut* 1 *hat einen Gefahrenwert von* 9 *auf einer Skala von* -10 *bis* $+10$*, während eine Einheit Gut* 2 *einen Gefahrenwert von* -4 *besitzt. Außerdem benötigt eine Einheit von Gut* 1 *eine Platzeinheit im Transporter erzielt einen Profit von* 2 *Millionen Euro. Eine Einheit von Gut* 2 *bringt einen Profit von* 7 *Millionen Euro ein, benötigt aber* 4 *Platzeinheiten.*

Die Gesamtkapazität eines Transporters beträgt 14 *Platzeinheiten und der Gefahrenhöchstwert, der nicht überschritten werden darf, ist* 36*.*

Da das Transportunternehmen möglichst viele Güter in einem Transporter unterbringen will, ergibt sich folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lccccl}
max & 2 \cdot x_1 & + & 7 \cdot x_2 & & \\
u.d.N. & 1 \cdot x_1 & + & 4 \cdot x_2 & \leq & 14 \\
 & 9 \cdot x_1 & - & 4 \cdot x_2 & \leq & 36 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
 & & & x_1, x_2 & & ganzzahlig
\end{array}$$

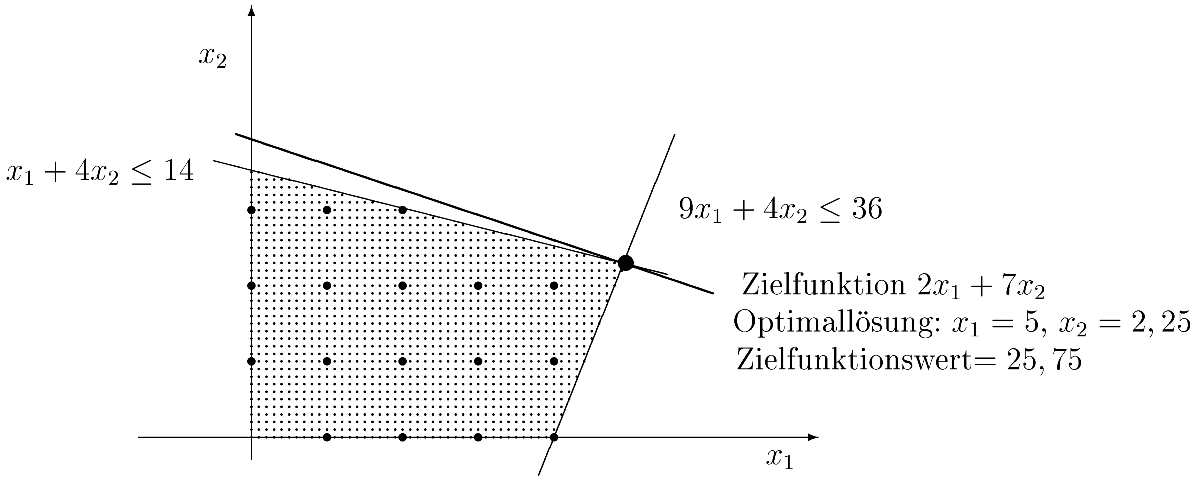

Abbildung 6.1: Graphische Darstellung des ganzzahligen Optimierungsproblems aus Beispiel 6.2 mit nicht-ganzzahliger Optimallösung

In Abbildung 6.1 erkennt man, dass die Optimallösung dieses Problems nicht ganzzahlig ist. Zwar ist $x_1 = 5$ eine ganze Zahl, aber mit $x_2 = 2,25$ kann der Transportunternehmer nicht viel anfangen.

Es muss nun entweder $x_2 \leq 2$ oder $x_2 \geq 3$ gelten. Diese beiden Fälle müssen nun getrennt betrachtet werden.

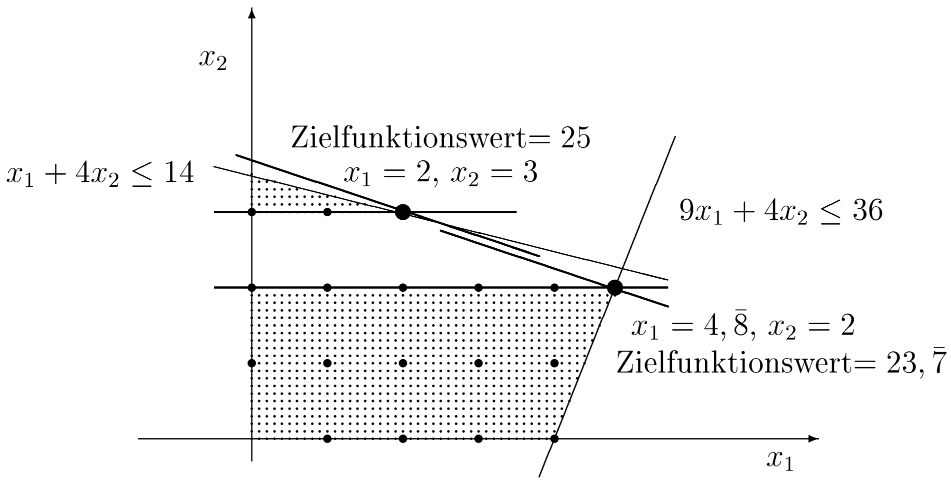

Abbildung 6.2: Partition des Optimierungsproblems aus Beispiel 6.2 in zwei Teilprobleme

Verschiebt man in beiden Teilbereichen in Abbildung 6.2 die Zielfunktion getrennt, erhält man für jedes der Teilprobleme eine Optimallösung mit einem Zielfunktionswert, der kleiner als der Zielfunktionswert der ursprünglichen Lösung ist. In diesem Fall erhält man für $x_1 = 4,\bar{8}$, $x_2 = 2$ einen Zielfunktionswert von

$23,\bar{7}$ und für $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ einen Zielfunktionswert von 25. Da der größere der Zielfunktionswerte zu einer ganzzahligen Lösung gehört, ist das Problem gelöst. Wäre dies nicht der Fall, würde also der bessere Wert zu einer nicht ganzzahligen Lösung gehören, müsste man das Verfahren wiederholen und die stets alle Zielfunktionswerte vergleichen.

6.2.3 Lösung im mehrdimensionalen Fall

Das Verfahren aus Abschnitt 6.2.2 lässt sich auch bei Problemen mit mehr als zwei Variablen anwenden. Die Teilprobleme werden wie ein LP behandelt und gelöst. Die Optimallösung wird auf Ganzzahligkeit überprüft und wenn notwendig das Problem weiter unterteilt.

Kehren wir noch einmal zu Beispiel 6.1 zurück. Die durch das Simplexverfahren erhaltene Lösung lautet $x_1 = 0, x_2 = 36,571438, x_3 = 20, x_4 = 35,71429$.
Da x_2 und x_4 nicht ganzzahlig sind, müssen vier Fälle $x_2 \leq 36$ und $x_4 \leq 35$, $x_2 \leq 36$ und $x_4 \geq 36$, $x_2 \geq 37$ und $x_4 \leq 35$ sowie $x_2 \geq 37$ und $x_4 \geq 36$ betrachtet werden. Fügt man diese Ungleichungen jeweils als zusätzliche Nebenbedingungen in das LP ein und löst mit dem Simplexverfahren, erhält man:

$x_2 \leq 36$, $x_4 \leq 35$	$x_2 \leq 36$, $x_4 \geq 36$	$x_2 \geq 37$, $x_4 \leq 35$
$x_1 = 10$	$x_1 = 0$	$x_1 = 0$
$x_2 = 33$	$x_2 = 36$	$x_2 = 37$
$x_3 = 20$	$x_3 = 20$	$x_3 = 20$
$x_4 = 35$	$x_4 = 36$	$x_4 = 35$
$\vec{c} \cdot \vec{x} = 330,5$	$\vec{c} \cdot \vec{x} = 330$	$\vec{c} \cdot \vec{x} = 329,5$

Für $x_2 \geq 37$ und $x_4 \geq 36$ ergibt sich ein unzulässiges Problem.
$x_2 \geq 37$, $x_4 \geq 36$ und $x_3 \geq 20$ widerspricht der Nebenbedingung $x_1 + 2x_2 + 2.7x_3 + 4x_4 \leq 270$. Da es sich um ein Maximierungsproblem handelt, ist der größte Zielfunktionswert $\vec{c} \cdot \vec{x} = 330,5$ der beste und $x_1 = 10$, $x_2 = 33$, $x_3 = 20$ und $x_4 = 35$ die optimale ganzzahlige Lösung.

Es gibt noch weitere Verfahren der ganzzahligen Optimierung die in [1] nachgelesen werden können.

Anhang A

Rang einer Matrix A

Um den Rang einer Matrix A zu erläutern, wird der Begriff der linearen Abhängigkeit von Vektoren benötigt.

Definition A.1 (Lineare Abhängigkeit) *Die Vektoren* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *heißen* ***linear abhängig****, wenn es* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *gibt, die nicht gleich null sind und für die*

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n = 0$$

gilt, das heißt, wenn die $a_1, \ldots, a_n$ *die Null nicht-trivial darstellen.*

Die Vektoren $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *heißen* ***linear unabhängig****, wenn sie nicht linear abhängig sind, das heißt, wenn gilt*

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \ldots + \alpha_n \cdot a_n = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Rang einer Matrix A

Eine $m \times n$-Matrix A hat genau dann den **Rang** r, wenn es unter den Spaltenvektoren von A

(i) r linear unabhängige Vektoren gibt und

(ii) je $r + 1$ Vektoren linear abhängig sind.

Literaturverzeichnis

[1] K.H. Borgwardt. Optimierung, Operations Research, Spieltheorie: Mathematische Grundlagen. *Birkhäuser Verlag, Berlin*, 2001

[2] C. Eger, A. Euteneuer, B. Mathea, K. Merkert, F. Weber, G. Wiederstein. Lehrplan Mathematik, Grund- und Leistungsfach, Jahrgangsstufen 11 bis 13 der gymnasialen Oberstufe (Mainzer Studienstufe). *Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung, Rheinland-Pfalz*, 1998

[3] H.W. Hamacher, K. Klamroth. Lineare und Netzwerk-Optimierung, Linear and Network Optimization. Ein bilinguales Lehrbuch, A bilingual textbook. *Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden*, 2000

[4] http://www.ifors.ms.unimelb.edu.au/tutorial/