

# KOMMS Reports Nr. 18 (2022)

Reports zur Mathematischen Modellierung  
in MINT-Projekten in der Schule



## MINT-EC-Girls-Camp: Math-Talent-School

Armin Bosten, Tobias Joosten, Stefan Ruzika, Paul Weber



**FELIX KLEIN**  
ZENTRUM FÜR  
MATHEMATIK



## 1 Das MINT-EC-Girls-Camp: Math-Talent-School

Das **MINT-EC-Girls-Camp: Math-Talent-School** richtet sich an mathematikbegeisterte Schülerinnen von MINT-EC-Schulen, die Einblicke in die Berufswelt von Mathematikerinnen und Mathematikern bekommen möchten. Die Veranstaltung veranschaulicht den Schülerinnen die steigende Relevanz angewandter mathematischer Forschungsgebiete, wie der Techno- und der Wirtschaftsmathematik. Sie soll dazu dienen, Schüler:innen die Bedeutung mathematischer Arbeitsweisen in der heutigen Berufswelt, insbesondere in Industrie und Wirtschaft, begreifbar zu machen.

### 1.1 Partner und Finanzierung

Das **MINT-EC-Girls-Camp: Math-Talent-School** wird organisiert von MINT-EC, dem nationalen Excellence-Netzwerk von Schulen mit Sekundarstufe II und hervorragendem mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Schulprofil, und dem Felix-Klein-Zentrum für Mathematik, einer gemeinsamen Einrichtung des Fraunhofer-Instituts für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM) sowie des Fachbereichs Mathematik der TU Kaiserslautern. Die Fraunhofer-Gesellschaft unterstützt die Math-Talent-School finanziell. Die fachwissenschaftliche Betreuung der Schülerinnen während dieser Talent-School wurde durch Mitarbeitende des Kompetenzzentrums für Mathematische Modellierung in MINT-Projekten in der Schule (KOMMS) der TU Kaiserslautern und des Fraunhofer ITWM umgesetzt.

### 1.2 Zielgruppe und Intention

Die Veranstaltung richtet sich an Schülerinnen der gymnasialen Oberstufe in Rheinland-Pfalz, die an MINT-interdisziplinärem Arbeiten mit dem Schwerpunkt Mathematik interessiert sind. Die Schülerinnen sollten bereit sein, sich in unbekanntes mathematisches und außermathematisches Wissen einzuarbeiten und sich Programmierkenntnisse anzueignen. Ziel ist es, bei den Schülerinnen ein Bewusstsein dafür zu schaffen, wie das Arbeiten mit offenen Fragestellungen gelingen kann. Insbesondere lernen die Schülerinnen wie realitätsbezogene Fragestellungen mithilfe von mathematischer Modellierung und mit Unterstützung durch Computersimulationen schrittweise gelöst werden können.

### 1.3 Format und Durchführung

Die Math-Talent-School findet üblicherweise in den Räumlichkeiten des Fraunhofer ITWM statt. An drei Workshoptagen (Dienstag bis Donnerstag) arbeiten die Gruppen inhaltlich an ihren Projekten. Am Freitag endet die Veranstaltung mit der Präsentation und Diskussion der Ergebnisse und der Verteilung der Zertifikate im Plenum.

Jede Projektgruppe wird bei ihrer Arbeit von einem Mitarbeitenden des Fraunhofer ITWM oder des KOMMS betreut. Die Schülerinnen können sich selbst organisieren und auch den Arbeitsrhythmus eigenständig gestalten. Eine wesentliche Komponente dabei ist die Arbeitsumgebung im Fraunhofer Institut:

- Jede Projektgruppe arbeitet in ihrem eigenen Seminarraum.
- In den Pausen trifft man sich mit den anderen Gruppen, so dass es einen inhaltlichen Austausch gibt.

- Es gibt wenige Faktoren, die vom Arbeitsthema ablenken; sogar abends arbeiten viele Gruppen noch an ihren Projekten weiter.

Abgerundet wird die Veranstaltung durch Informationen zum Mathematik-Studium, einen Besuch der TU Kaiserslautern und verschiedene soziale Aktivitäten.

### 1.4 Einführung in das mathematische Modellieren

Empirische Studien haben bereits gezeigt, dass Schüler:innen beim Lösen einer Modellierungsaufgabe strukturierter vorgehen, wenn sie eine Instruktion erhalten haben, wie idealtypische Modellierungsprozesse ablaufen. Ein strukturiertes Vorgehen meint in diesem Kontext, dass die Schüler:innen dem idealtypischen Ablauf im Modellierungskreislauf folgen. Durch eine solche Instruktion zum Modellieren sollen die Schüler:innen beim Bearbeiten ihrer Modellierungsprojekte unterstützt werden, weswegen wir ihnen dieses Wissen vermitteln, bevor sie mit der Arbeit an den Modellierungsprojekten starten.

Zu Beginn erklären wir, was mathematische Modellierung ist und wieso es sinnvoll ist, Modelle zu erstellen. Unter dem Begriff der mathematischen Modellierung versteht man den Gesamtprozess zur Lösung von Problemen aus der realen Welt mit Hilfe mathematischer Methoden. Dabei werden Probleme aus der Realität – der außermathematischen Welt – in vereinfachter Form in die Mathematik übertragen und nach der mathematischen Lösung in die Realität zurückgeführt. Da die Realität komplex ist und es nicht möglich ist diese vollständig im mathematischen Modell abzubilden, werden nur bestimmte Aspekte der Wirklichkeit in das Modell integriert. Somit ergibt sich die Möglichkeit einer überschaubaren Verarbeitung der realen Daten. Im Anschluss illustrieren wir anhand eines Beispiels, wie ein Modellierungsprozess abläuft und wie die einzelnen Schritte aussehen. Dabei wird Bezug zu den Phasen des Modellierungskreislaufs von [KS13] (Abbildung 1) genommen.

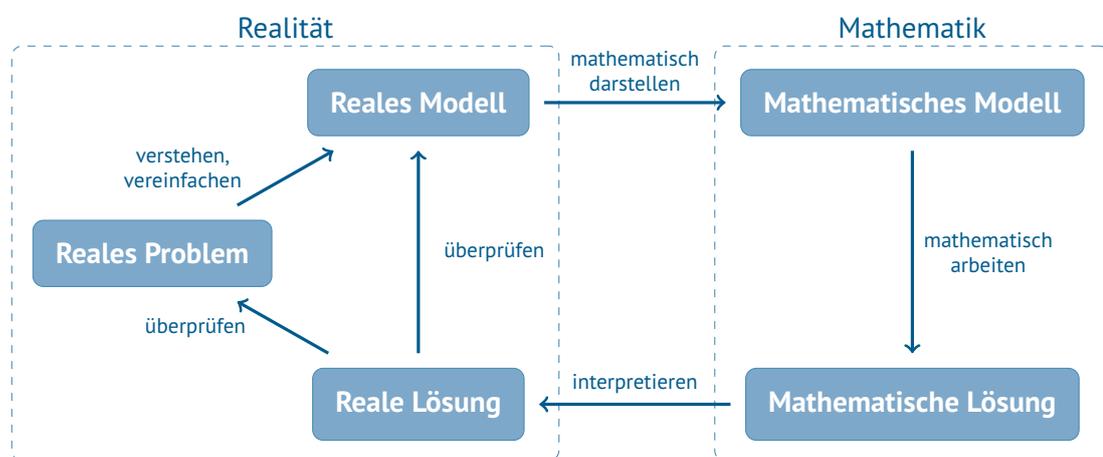


Abbildung 1: Der Modellierungskreislauf nach [KS13].

Zu Beginn gilt es, das *reale Problem*, also die Aufgabenstellung, zu verstehen. Insbesondere müssen hierbei die Zielgrößen klar definiert werden, um am Ende eine Lösung des Problems auch bewerten zu können. Weiterhin werden in dieser Phase die dem Problem zugrunde liegenden Parameter festgelegt, um die strukturellen Eigenschaften der Aufgabenstellung zu veranschaulichen. Aus diesen Vorüberlegungen entsteht anschließend ein erstes *reales Modell*, welches auch Vereinfachungen des ursprünglichen Problems aufweist.

Hierbei werden vor allen Dingen eine „Lösung“ der Aufgabe klar definiert und die darin enthaltenen Variablen mit den gefundenen Parametern zu Bedingungen verknüpft, die eine spätere Lösung erfüllen muss. Aus diesem realen Modell lässt sich nun durch Anwenden mathematischer Strukturen, Formeln und Gleichungen ein allgemeines *mathematisches Modell* erstellen, aus dem das ursprüngliche reale Problem nicht mehr ohne weitere Vorkenntnisse erkennbar ist. Nun besteht die Aufgabe darin, geeignete mathematische Verfahren und Algorithmen zu ermitteln oder zu entwickeln, um eine (oder eventuell sogar mehrere) *mathematische Lösungen* des Modells zu berechnen. Diese Lösungen werden anschließend wieder in die reale Welt zu *realen Lösungen* übersetzt, d.h. die Auswirkungen der Lösungswerte der Modellvariablen werden in die Realität interpretiert. Schlussendlich stellt sich die Frage nach der Sinnhaftigkeit der berechneten realen Lösungen: Wird die gegebene Aufgabenstellung durch die Resultate nicht zufriedenstellend gelöst, so muss möglicherweise das reale Modell angepasst werden. Dies kann passieren, wenn beispielsweise zu starke Vereinfachungen des realen Problems angenommen wurden. Ebenfalls muss überprüft werden, ob die erhaltenen realen Lösungen auch Lösungen zu dem realen Modell selbst darstellen, um Fehler bei der Übersetzung in die mathematische Welt identifizieren zu können. Bis überzeugende Lösungen des gegebenen realen Problems gefunden sind, kann dieser beschriebene Kreislauf also mehrfach durchlaufen werden.

Abschließend wird das Vorgehen beim mathematischen Modellieren als Leitfaden formuliert, das an den Lösungsplan von [Bec19] angelehnt ist.

## 2 Themenauswahl

Im [MINT-EC-Girls-Camp: Math-Talent-School](#) wurden drei unterschiedliche Projekte mit den folgenden Titeln bearbeitet:

- Künstliche Intelligenz im Kontext von Reinforcement Learning
- Wie ändern sich Straftatbestände in Krisensituationen?
- Kein Rocket Science?

Im Projekt **Künstliche Intelligenz im Kontext von Reinforcement Learning** betrachteten die Schülerinnen das Spiel *Space Alpha*, in dem sie einem Raumschiff beibringen, durch einen Asteroidenschauer zu fliegen. Dabei nutzten die Schülerinnen das Konzept des Reinforcement Learning, wobei ein sogenannter Agent eigenständig durch Aktionen eine Strategie entwickelt und herausfindet, welche Aktionen gut oder schlecht für das Erreichen seines Ziels sind.

Das Projekt **Wie ändern sich Straftatbestände in Krisensituationen?** befasste sich mit den kriminologischen Daten der Polizeilichen Kriminalstatistik (PKS). Mit statistischen Methoden analysierten die Schülerinnen verschiedene Straftatbestände und stellten in einigen Gebieten während der Coronapandemie signifikante Änderungen zu Vor-Corona-Zeiten fest. Daraus können Handlungsempfehlungen für die Polizei in zukünftigen Pandemiesituationen abgeleitet werden.

Beim Thema **Kein Rocket Science?** ging es darum, eine Rakete im mathematischen Sinne zum Mond zu schicken. So war es das Ziel dieses Projekts, die Rakete und ihre Flugbahn mathematisch zu modellieren, die Gleichungen zu lösen, von Hand und/oder mithilfe eines Computers, und Dank des somit erarbeiteten Verständnisses, direkte Erkenntnisse für den Raketenbau abzuleiten.

## 3 Ergebnisse der Projektgruppen

### 3.1 Künstliche Intelligenz im Kontext von Reinforcement Learning

#### 3.1.1 Problemstellung

Künstliche Intelligenz ist derzeit in aller Munde. Doch was versteckt sich hinter der Bezeichnung Künstliche Intelligenz? Um dies genauer zu verstehen, befasst sich dieses Projekt mit Reinforcement Learning (auf Deutsch: bestärkendes Lernen), welches ein Gebiet der Künstlichen Intelligenz darstellt.

Beim Reinforcement Learning gibt es einen Agenten, der sich in einer Umgebung zurechtfinden soll. Er soll die Umgebung mittels Aktionen erkunden und dabei lernen, welche Aktionen gut und welche schlecht sind. Dieses Lernverhalten ist von Menschen und Tieren inspiriert und wirkt dadurch sehr natürlich. Wie man dieses Lernverhalten mathematisch modelliert und am Computer implementiert, soll in diesem Projekt nähergebracht werden. Dafür betrachten die Schülerinnen das Spiel Space Alpha.

Space Alpha ist ein Spiel, indem ein Raumschiff durch einen Asteroidenschauer fliegt (siehe Abbildung 2). In dem Spiel bewegen sich die Asteroiden von oben nach unten und werden oben am Bildschirm erzeugt. Das Raumschiff hat drei Aktionen: nach links bewegen, stehen bleiben, nach rechts bewegen. Kollidiert das Raumschiff mit einem Asteroiden, wird das Raumschiff zerstört und das Spiel ist verloren. Das Spiel gilt als gewonnen, wenn das Raumschiff eine Distanz von 100 Schritten ohne Kollision zurücklegt.

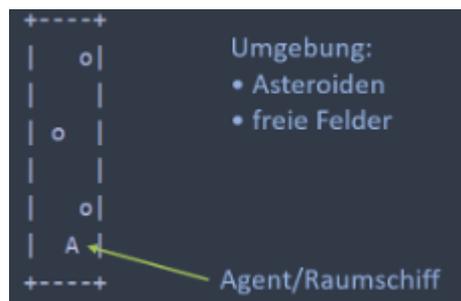


Abbildung 2: Das Spiel Space Alpha. Das Raumschiff ist das A und die Asteroiden sind die Kreise.

#### 3.1.2 Vorüberlegungen

Ein erster Modellierungsversuch für Space Alpha kann beispielsweise wie in Abbildung 3 aussehen. Die einzelnen Zustände der Spielfelder können als Knoten im Graphen interpretiert werden. Die ausgeführte Aktion verändert den aktuellen Zustand entsprechend, was mit Pfeilen dargestellt ist. Insgesamt erhält man dadurch einen Graphen. (Man beachte, dass wir hier deterministische Übergänge vom aktuellen Zustand zum neuen Zustand haben. Im Allgemeinen sind stochastische Übergänge möglich.)

Nachdem der Markov-Entscheidungsprozess verstanden wurde, müssen die Schülerinnen überlegen, wie die Wahl von Aktionen in Zuständen mathematisch dargestellt werden kann. Dies geschieht mithilfe von Funktionen, welche in der Literatur Strategien genannt werden. Letztlich müssen die Schülerinnen noch überlegen, was eine Lösung zu einem Markov-

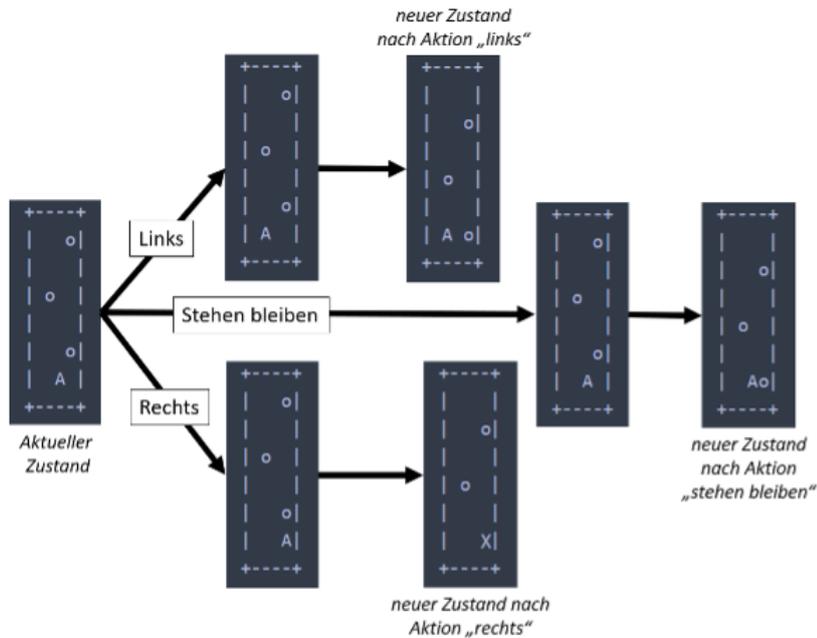


Abbildung 3: Dies ist ein Ausschnitt aus der Modellierung des Spiels Space Alpha. Die Idee ist, dass man von einem Zustand aus mit verschiedenen Aktionen in verschiedene neue Zustände gelangt

Entscheidungsprozess darstellt. Dies sind die sogenannten optimalen Strategien. Sie maximieren die erwartete (diskontierte) Summe aller Belohnungen von jedem Zustand aus. Anschließend sollen die Schülerinnen erste Ideen für einen Reinforcement Learning-Algorithmus entwickeln. Das bedeutet, sie sollen überlegen, wie der Agent bei der Interaktion mit der Umgebung lernen kann und am Ende weiß, welche Aktionen optimal sind (d. h. eine optimale Strategie wurde bestimmt). Ziel hierbei ist es nicht, dass die Schülerinnen wirklich einen Reinforcement Learning-Algorithmus konstruieren, sondern lediglich benötigte Eigenschaften des Algorithmus benennen. Anschließend wird den Schülerinnen der Algorithmus Q-Learning vorgestellt und gezeigt, wo die benannten Eigenschaften sich im Algorithmus wiederfinden. Ein weiteres Ziel ist zu zeigen, dass Künstliche Intelligenz simpel sein kann: Q-Learning ist im Grunde das Ausfüllen einer Tabelle mithilfe einer bestimmten Update-Formel.

Zum Schluss sollen die Schülerinnen den Algorithmus Q-Learning implementieren und Space Alpha damit lösen. Hierbei soll überlegt werden, ob und welche Zustände von Space Alpha zusammengefasst werden können und welche Auswirkungen dies hat. Eine Auswirkung ist, dass sich die Lerngeschwindigkeit des Agenten erhöht.

### 3.1.3 Ergebnisse

Die Schülerinnen leiteten sich die Markov-Entscheidungsprozesse mithilfe eines einfacheren Beispiels her. Als Beispiel diente das Labyrinth aus Abbildung 4. Aus dem Labyrinth wurde dann der Graph aus Abbildung 5 hergeleitet.

Damit der Graph als Markov-Entscheidungsprozess verstanden werden kann, fehlten noch die Belohnungen. Hier schlugen die Schülerinnen verschiedene Varianten vor, welche diskontiert wurden. Sie kamen zum folgenden Ergebnis: Im Zustand  $s_9$  bei Aktion  $\rightarrow$  soll eine

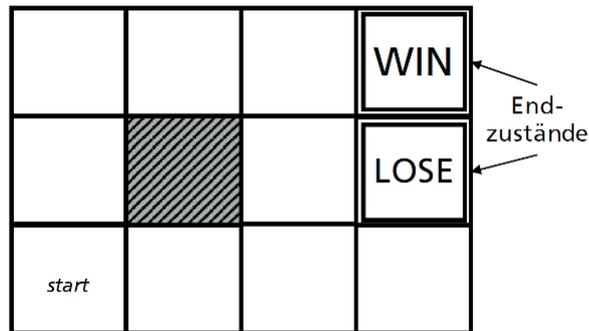


Abbildung 4: Ein einfaches Labyrinth.

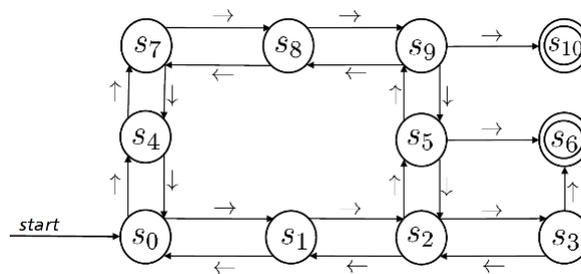


Abbildung 5: Das einfache Labyrinth als Graph.

positive Belohnung von 1 gegeben werden, im Zustand  $s_5$  bei Aktion  $\rightarrow$  sowie im Zustand  $s_3$  bei Aktion  $\uparrow$  soll eine negative Belohnung von  $-1$  gegeben werden und jede andere Aktionen soll eine negative Belohnung von  $-0.1$  geben. Die  $-0.1$  sorgen dafür, dass der Agent lernt, schnell ins Ziel zu laufen.

Als nächstes sollten die Schülerinnen überlegen, wie das Verhalten des Agenten dargestellt werden kann und wann dieses optimal ist. Sie kamen schnell zum Ergebnis, dass Funktionen, das Verhalten darstellen können. Bei der Optimalität reichte es ihnen, wenn eine maximale Summe von Belohnungen vom Startfeld erreicht wird. (In der Literatur wird Optimalität anders definiert. Hier muss die maximale Summe von Belohnungen von jedem Zustand aus erreicht werden.)

Im nächsten Schritt sollten die Schülerinnen überlegen wie ein Algorithmus, Markov-Entscheidungsprobleme lösen kann. Sie kamen auf die Idee für jedes Zustand-Aktion-Paar die zugehörige Belohnung in einer Tabelle festzuhalten, wobei die Zeilen die Zustände und die Spalten die Aktionen darstellen. Diese Werte werden bei der Interaktion des Agenten mit der Umgebung bestimmt. Sie behaupteten, dass man anhand der Werte in der Tabelle sieht, welche Aktionen in einem Zustand optimal sind: Optimale Aktionen in einem Zustand haben den höchsten Wert in der Zeile des Zustandes. Dieser sehr einfache Algorithmus führt zum richtigen Ergebnis bei einfachen Markov-Entscheidungsproblemen und bei der einfachen Variante von Space Alpha, in der alle zwei Zeitschritte ein Asteroid generiert wird. Jedoch zeigte sich, dass bei „verschachtelten“ Markov-Entscheidungsproblemen ein gewisses Vorausschauen benötigt wird. Anschaulich dafür sind Probleme in denen nach einer „schlechten Aktion“ eine „sehr gute Aktion“ folgt, aber auch bei dem Labyrinth aus Abbildung 3 funktioniert der Algorithmus nicht.

Die Schülerinnen erkannten, dass man in die zukünftigen Zustände schauen muss, um eine Aktion richtig bewerten zu können. Sie wussten aber nicht, wie sie ihren Algorithmus dafür

anpassen müssen. Daraufhin wurde ihnen die Q-Learning Update-Formel gezeigt: In der Tabelle von Zustand-Aktion-Paar (Zustände x Aktionen), welche wir mit  $Q$  bezeichnen, wird jeder Aktion  $a$  in einem Zustand  $s$  einen Wert zugeordnet. Mithilfe der Bezeichnung  $Q(s, a)$  verweisen wir auf den entsprechenden Wert in der Tabelle zu. Die Werte in der Tabelle werden mit der folgenden Update-Formel immer wieder aktualisiert:

$$Q(s, a) \leftarrow (1 - \alpha) \cdot Q(s, a) + \alpha \cdot \left( \underbrace{R(s, a)}_{\text{erhaltene Belohnung}} + \gamma \cdot \underbrace{\max_a Q(s', a)}_{\text{zukünftige Belohnung}} \right)$$

wobei  $s$  der aktuelle Zustand ist,  $a$  die ausgeführte Aktion,  $s'$  der neue Zustand,  $R(s, a)$  die erhaltene Belohnung im Zustand  $s$  unter Aktion  $a$  und  $\gamma \in (0, 1)$  der sogenannte Diskontierungsfaktor, welcher beschreibt wie stark zukünftige Ereignisse bewertet werden.

Nachdem sich die Schülerinnen mit der Update-Formel vertraut gemacht haben, implementierten sie ihren eigenen Algorithmus sowie Q-Learning für Space Alpha. Hierbei entschieden sie sich, dass die untersten zwei Zeilen im Spiel Space Alpha ausreichend Informationen beinhalten. Dadurch fassten sie viele Zustände zusammen. Anschließend zeigten sie, dass beide Algorithmen die einfache Variante von Space Alpha, in der alle zwei Zeitschritte ein Asteroid generiert wird, lösen.

Zum Schluss erhielten die Schülerinnen eine Variante von Space Alpha, in der das Raumschiff durch einen Asteroidentunnel fliegen muss (siehe Abbildung 6). Hierbei stellten sie fest, dass ihr einfacher Algorithmus nicht mehr funktioniert, da ein gewisses Vorausschauen benötigt wird. Sie zeigten, dass Q-Learning dagegen gut funktioniert, da es ein Vorausschauen beinhaltet.

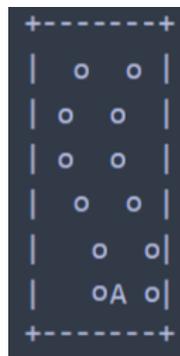


Abbildung 6: Space Alpha mit Asteroidentunnel.

## 3.2 Wie ändern sich Straftatbestände in Krisensituationen?

### 3.2.1 Problemstellung

In der polizeilichen Kriminalstatistik (PKS) gibt das Bundeskriminalamt (BKA) jedes Jahr einen deutschlandweiten Überblick über die polizeilich erfassten Straftaten. Die PKS aus den letzten Jahrzehnten ist online und öffentlich auf der Internetseite des BKA abrufbar.

Nun gab es in den letzten zehn Jahren unterschiedliche sogenannte Krisensituationen. 2014/15 gab es in Folge des Syrienkriegs große Migrationsbewegungen vom Nahen Osten

nach Europa und seit Anfang 2020 legt die Covid-19-Pandemie immer wieder Teile des öffentlichen Lebens lahm oder schränkt es maßgeblich ein. Auch beim Brexit, dem Austritt Großbritanniens aus der EU, sprechen einige von einer Krise. In diesem Projekt wird die Frage gestellt, welche Auswirkungen solche Ereignisse auf die Kriminalitätssituation in Deutschland haben. Damit können beispielsweise folgende Fragen einhergehen:

- Steigen in Krisensituationen die politisch motivierten Straftaten?
- Sank während der Coronapandemie die Zahl der Wohnungseinbrüche und stieg die Zahl der Straftaten im Bereich der häuslichen Gewalt?
- In welchem Ausmaß verändert sich die Anzahl der Straftaten und wann kehren die Zahlen wieder zum Ausgangsniveau zurück?
- Handelt es sich um zufällige Abweichungen oder signifikante Änderungen?
- Gibt es abhängig von der Krise Auffälligkeiten im Tatverdächtigenprofil (Geschlecht, Alter, usw.) und dem Ort der Straftaten?

In diesem Projekt sollen die Schülerinnen große Datenmengen analysieren und für Vorhersagen in der Praxis nutzen. Dafür sollen vergangene Krisen betrachtet werden, um daraus Empfehlungen für die Zukunft ableiten zu können.

### 3.2.2 Vorüberlegungen

Da es sich um eine sehr umfassende Problemstellung handelt, müssen sich die Schüler:innen zu Beginn auf Vereinfachungen und Schwerpunkte einigen, die sie im Projekt betrachten möchten. So ist es sinnvoll, sich auf eine oder wenige Krisensituationen zu beschränken und erst einmal weitere Einflussgrößen, wie zum Beispiel das Geschlecht oder den Ort der Straftat zu vernachlässigen.

Um sich einen Überblick über die Struktur und den Aufbau der Daten zu verschaffen, müssen diese zuerst gesichtet werden. Zur Analyse von zeitlichen Änderungen eignet sich besonders die Analyse der Zeitreihentabellen, die ebenfalls in der PKS gegeben sind. Einmal festgelegt, welche Daten im Speziellen betrachtet werden sollen, muss eine Methode gefunden werden, die Daten anschaulich darzustellen und Abweichungen in Krisensituationen zu analysieren.

Zur Veranschaulichung der Daten können die Schüler:innen entweder ein Statistikprogramm oder eine Programmiersprache, die zur Auswertung von Daten geeignet ist, verwenden. Das kann zum Beispiel Excel, Python oder R sein. Da die Schüler:innen zu Beginn der einwöchigen Veranstaltung eine Einführung in das Programmieren in Python bekommen, bietet es sich an, auch in diesem Projekt Python zu verwenden.

Zunächst ist es interessant, die Daten, z.B. die Anzahl der Straftaten pro Jahr, in einer Grafik für die letzten Jahrzehnte zu veranschaulichen. Die grafische Darstellung dient zur einfacheren Betrachtung und man kann direkt erste Vermutungen anstellen, ob ein Trend ersichtlich ist und es Änderungen in Krisensituationen gibt.

Zur Untersuchung, ob die Entwicklung der Daten einem Trend folgt, kann man lineare Regressionen verwenden. Folgt zum Beispiel die Anzahl der Straftaten abhängig von der Zeit einem linearen An- oder Abstieg? Nimmt die Anzahl der Straftaten vielleicht sogar quadratisch zu oder ab? Nur wenn man den Trend vor der Krisensituation betrachtet, ist eine Beurteilung des Wertes im Krisenjahr möglich. Mit dem statistischen  $R^2$ -Wert, der die durch die Regression erklärte Abweichung mit der Gesamtabweichung in ein Verhältnis setzt, kann die Güte der gewählten Trendlinie beurteilt werden. Mit diesem mathematischen Hilfsmittel

tel kann man besser beurteilen, ob es sich um rein zufällige oder wahrscheinlich signifikante Änderungen der Anzahl von Straftaten handelt. Hier können zusätzlich Konfidenzbänder helfen, die beispielsweise mit einem Signifikanzniveau von 95 Prozent darüber Auskunft geben können, ob die Änderung zufällig, das heißt, nicht signifikant vom Trend abweicht.

### 3.2.3 Ergebnisse

Die Projektgruppe bestand aus fünf Schülerinnen. Bevor sie die Daten sichteten, diskutierten sie gemeinsam darüber, welche Krisensituation für sie besonders interessant ist, um darauf einen Schwerpunkt zu legen. Eine Betrachtung mehrerer Krisen erschien ihnen sehr aufwendig, weswegen sie sich schnell auf die Fokussierung der Covid-19-Pandemie einigten. Im Anschluss verschafften sie sich einen Überblick über die Tabellen und Daten, die in der polizeilichen Kriminalstatistik gegeben sind. Die meisten Daten sind sowohl für einzelne Jahre als auch in Zeitreihen seit ca. •1987 gegeben. Schnell realisierten die Schülerinnen, dass die Nutzung der Zeitreihentabellen am sinnvollsten ist.

Da die Tabellen sehr viele Kategorien auf einmal darstellen, vereinfachten die Schülerinnen die Daten so, dass sie möglichst gut für weitere Analysen verwendet werden konnten. Dazu wandelten sie die zu untersuchenden Daten in csv-Format um, um sie danach in Python importieren zu können. (Siehe Abbildung 7)

11 12 13 14 15	Schlüssel	Straftat	Jahr	Anzahl erfasste Fälle	HZ	erfasste Fälle davon: Versuche		mit Schusswaffe		Aufklärungsquote in %	Tat-verdächtige insgesamt	Nichtdeutsche Tatverdächtige	
						Anzahl	in %	gedoht	ge-schossen			Anzahl	Anteil an TV insg in %
16	.....	Straftaten insgesamt	1987	4.444.108	7.288,7	362.623	8,6	6.564	5.429	44,2	1.290.441	258.329	20,0
17	.....	Straftaten insgesamt	1988	4.356.726	7.114,4	371.110	8,5	6.839	4.976	45,9	1.314.080	286.741	21,8
18	.....	Straftaten insgesamt	1989	4.358.573	7.062,4	363.650	8,3	6.294	4.633	47,2	1.370.962	336.016	24,5
19	.....	Straftaten insgesamt	1990	4.455.333	7.108,2	352.518	7,9	6.589	4.185	47,0	1.437.923	383.583	26,7
20	.....	Straftaten insgesamt	1991	4.752.175	7.510,9	373.651	7,9	7.959	4.543	45,4	1.468.752	405.545	27,6
21	.....	Straftaten insgesamt	1992	5.209.960	7.920,6	426.942	8,2	8.907	5.179	44,8	1.581.734	509.305	32,2
22	.....	Straftaten insgesamt	1993	6.750.613	8.336,7	527.502	7,8	12.362	7.708	43,8	2.051.775	689.920	33,6
23	.....	Straftaten insgesamt	1994	6.537.748	8.037,7	502.392	7,7	12.020	7.678	44,4	2.037.729	612.988	30,1
24	.....	Straftaten insgesamt	1995	6.668.717	8.178,6	501.404	7,5	12.855	8.163	46,0	2.118.104	603.496	28,5
25	.....	Straftaten insgesamt	1996	6.647.598	8.124,9	476.902	7,2	13.479	8.471	49,0	2.213.293	635.595	28,3
26	.....	Straftaten insgesamt	1997	6.586.165	8.030,7	453.046	6,9	13.648	8.081	50,6	2.273.560	633.480	27,9
27	.....	Straftaten insgesamt	1998	6.456.996	7.868,9	436.117	6,8	12.865	6.993	52,3	2.319.895	628.477	27,1
28	.....	Straftaten insgesamt	1999	6.302.316	7.682,3	400.596	6,4	12.448	6.844	52,8	2.263.140	601.221	26,6
29	.....	Straftaten insgesamt	2000	6.264.723	7.624,7	380.677	6,1	12.462	6.937	53,2	2.286.372	589.109	25,8
30	.....	Straftaten insgesamt	2001	6.363.865	7.786,3	374.327	5,9	11.270	5.416	53,1	2.280.611	568.384	24,9
31	.....	Straftaten insgesamt	2002	6.507.394	7.893,5	384.537	5,9	10.883	5.288	52,6	2.326.149	566.918	24,4
32	.....	Straftaten insgesamt	2003	6.572.135	7.962,7	379.563	5,8	11.054	6.528	53,1	2.355.161	553.750	23,5
33	.....	Straftaten insgesamt	2004	6.633.156	8.037,1	387.766	5,8	9.876	5.499	54,2	2.384.268	546.985	22,9
34	.....	Straftaten insgesamt	2005	6.891.715	7.747,5	367.609	5,8	9.177	5.039	55,0	2.313.136	519.573	22,5
35	.....	Straftaten insgesamt	2006	6.304.223	7.647,2	371.688	5,9	8.813	4.584	55,4	2.283.127	503.037	22,0
36	.....	Straftaten insgesamt	2007	6.284.661	7.634,9	389.283	6,2	7.883	4.558	55,0	2.294.883	490.278	21,4
37	.....	Straftaten insgesamt	2008	6.114.128	7.436,5	398.584	6,5	6.994	4.371	54,8	2.255.693	471.067	20,9
38	.....	Straftaten insgesamt	2009	6.054.330	7.363,1	408.790	6,8	7.142	5.913	55,6	2.167.217	462.376	21,1
39	.....	Straftaten insgesamt	2010	5.933.278	7.253,2	414.644	7,0	6.823	5.553	56,0	2.152.803	471.812	21,9
40	.....	Straftaten insgesamt	2011	5.990.679	7.327,9	430.397	7,2	6.113	5.597	54,7	2.112.843	484.529	22,9
41	.....	Straftaten insgesamt	2012	5.997.040	7.327,4	450.708	7,5	5.696	5.132	54,4	2.094.118	502.390	24,0
42	.....	Straftaten insgesamt	2013	5.961.662	7.403,6	457.911	7,7	4.940	5.153	54,5	2.094.160	538.449	25,7
43	.....	Straftaten insgesamt	2014	6.092.964	7.530,3	461.117	7,6	4.567	5.018	54,9	2.149.594	617.392	28,7
44	.....	Straftaten insgesamt	2015	6.330.649	7.796,6	481.103	7,6	4.289	4.711	56,3	2.369.036	911.864	38,5
45	.....	Straftaten insgesamt	2016	6.372.526	7.754,8	533.647	8,4	4.425	5.542	56,2	2.360.806	953.744	40,4
46	.....	Straftaten insgesamt	2017	5.761.984	6.982,4	454.461	7,9	4.211	4.724	57,1	2.112.715	736.265	34,8
47	.....	Straftaten insgesamt	2018	5.555.520	6.710,2	423.408	7,6	3.819	4.524	57,7	2.051.296	708.380	34,5
48	.....	Straftaten insgesamt	2019	5.436.461	6.548,4	416.594	7,7	4.512	4.639	57,5	2.019.211	699.261	34,6
49	.....	Straftaten insgesamt	2020	5.310.621	6.385,5	399.759	7,5	4.370	4.454	58,4	1.969.617	663.199	33,7
50	.....	Straftaten insgesamt	2021	5.047.860	6.070,4	371.382	7,4	3.881	4.074	58,7	1.892.003	639.127	33,8

1987;4444108  
 1988;4356726  
 1989;4358573  
 1990;4455333  
 1991;4752175  
 1992;5209060  
 1993;6750613  
 1994;6537748  
 1995;6668717  
 1996;6647598  
 1997;6586165  
 1998;6456996  
 1999;6302316  
 2000;6264723  
 2001;6363865  
 2002;6507394  
 2003;6572135  
 2004;6633156  
 2005;6391715  
 2006;6304223  
 2007;6284661  
 2008;6114128  
 2009;6054330  
 2010;5933278  
 2011;5990679  
 2012;5997040  
 2013;5961662  
 2014;6082064  
 2015;6330649  
 2016;6372526  
 2017;5761984  
 2018;5555520  
 2019;5436461  
 2020;5310621  
 2021;5047860

Abbildung 7: Links ist ein Ausschnitt der Originaldatei der PKS zu sehen. Rechts ist die für die Datenauswertung angepasste csv-Datei. Die Tabellen stellen die *Straftaten insgesamt* in Deutschland seit 1987 dar.

Um die Daten zu analysieren, stellten sie die unterschiedlichen Untersuchungsfelder mit Python in einem Graph dar. So erhielten sie einen ersten Überblick über Entwicklungen und konnten erkennen, ob die Anzahl der Straftaten in einem bestimmten Gebiet einem Trend folgt. Bei einer oberflächlichen Betrachtung der Zeitreihen seit 1987 erkennt man schnell, dass die Zusammenführung der Daten aus Ost- und Westdeutschland zu einem starken

Anstieg zu Beginn der 90er Jahre führte. Aus diesem Grund ist häufig eine Betrachtung des Trends erst nach diesem Zeitpunkt sinnvoll.

Um einen Trend mathematisch festzustellen, arbeiteten die Schülerinnen mit Regressionsanalysen. Sie verwendeten lineare, parabolische und kubische Trendlinien um die Entwicklungen darzustellen. Mit dem statistischen  $R^2$ -Wert, der das Verhältnis der durch die Regression erklärten Varianz zu der Gesamtvarianz angibt, beurteilten sie die Aussagekraft der Trendlinien. So bestimmten die Schülerinnen aus den Daten bis 2019 Trends und verglichen die nach dem Trend prognostizierten Werte mit den tatsächlichen Werten von 2020 und 2021 – also mit den Werten der Covid-19-Pandemie. Dieses Vorgehen ist in Abbildung 8 grafisch dargestellt. In dieser Abbildung sieht man nicht nur das Vorgehen der Schülerinnen, sondern auch, dass die Straftaten insgesamt über die letzten Jahrzehnte abnehmen und auch während der Covid-19-Pandemie stark abgenommen haben. Man erkennt jedoch auch gut die Schwierigkeit, zu beurteilen, ob es sich um eine Abnahme über den Trend hinaus handelt.

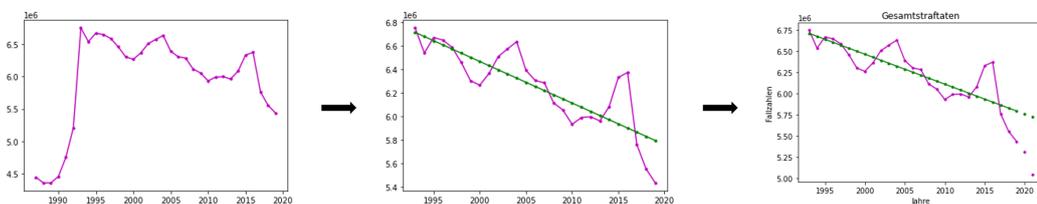


Abbildung 8: Grafische Darstellung des Vorgehens der Schülerinnen am Beispiel der *Straftaten insgesamt* – links: einfacher Plot, Mitte: lineare Regression (grün) an korrigiertem Plot nach der Wiedervereinigung, rechts: Vergleich Vorhersage und reale Werte.

Aufgrund der zahlreichen durchgeführten Analysen der Schülerinnen werden im Folgenden nur ausgewählte Ergebnisse der Schülerinnen vorgestellt:

### Sexuelle Straftaten an Kindern und Jugendlichen

Bei Analyse der *Sexuellen Straftaten an Kindern und Jugendlichen* wurde schon vor der Covid-19-Pandemie eine steigende Tendenz festgestellt. Deswegen war es interessant herauszufinden, ob es sich um einen stärkeren Anstieg als vom Trend erwartet handelt. Eine kubische Regression hat in diesem Fall die Daten und Entwicklung gut dargestellt. Die nach der kubischen Regression erwarteten Werte in 2020 und 2021 liegen deutlich unter den tatsächlichen Werten. Deswegen kann davon ausgegangen werden, dass es sich hierbei um eine Steigung über den zugrundeliegenden Trend hinaus handelt (s. Abbildung 9).

### Verbreitung, Erwerb, Besitz und Herstellung jugendpornografischer Schriften

Beim Straftatbestand *Sexueller Missbrauch von Kindern* haben die Schülerinnen die Entwicklung über eine Regression mit linearer Trendlinie seit 2016 betrachtet. Das haben die Schülerinnen auch bei den Straftatbeständen *Verbreitung, Erwerb, Besitz und Herstellung jugendpornografischer Schriften* (siehe Abbildung 10) und *Kinderpornografischer Schriften* gemacht und für die Jahre 2020 und 2021 starke Anstiege festgestellt. Diese Anstiege gehen deutlich über die Prognosen der linearen Trendlinien hinaus.

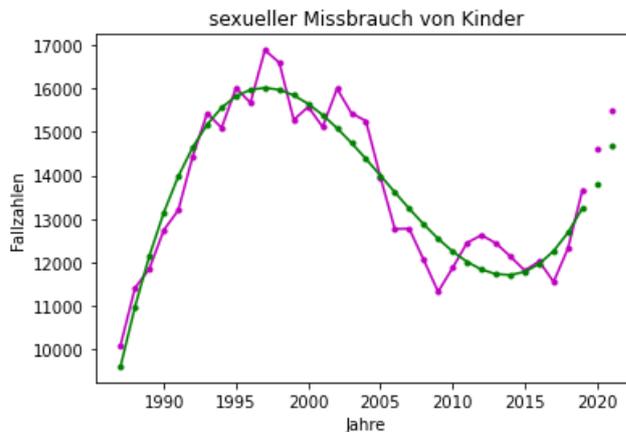


Abbildung 9: Grafische Darstellung der sexuellen Straftaten an Kindern und Jugendlichen; kubische Regression und Prognosewerte (grün); tatsächliche Werte (magenta).

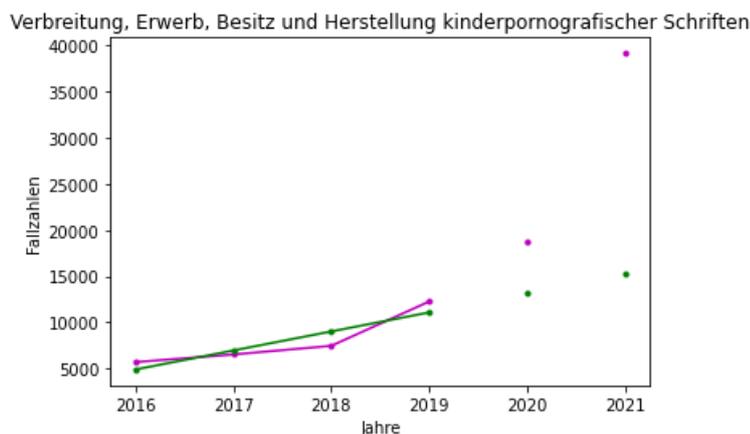


Abbildung 10: Grafische Darstellung von *Verbreitung, Erwerb, Besitz und Herstellung kinderpornografischer Schriften*; lineare Regression (grün), Prognosewerte (grün); tatsächliche Werte: magenta.

## Diebstahl

Der Straftatbestand *Diebstahl* ist in mehrere Unterkategorien aufgeteilt. Abbildung 11 zeigt uns die Entwicklungen von Tageswohnungseinbrüchen und Ladendiebstählen. In beiden Kategorien erwarteten die Schülerinnen wegen der Lockdowns Abnahmen, die über die Trendentwicklung hinaus gehen. Es sind tatsächlich abnehmende Tendenzen feststellbar, allerdings bewegen sich diese nicht über die Entwicklung des Trends hinaus. Besonders gut sieht man diese Entwicklung bei einem eingezeichneten 95 Prozent Konfidenzband, denn die Werte von 2020 und 2021 liegen nicht außerhalb des Bereiches, in dem mit 95 prozentiger Wahrscheinlichkeit die Werte durch die Trendprognose liegen.

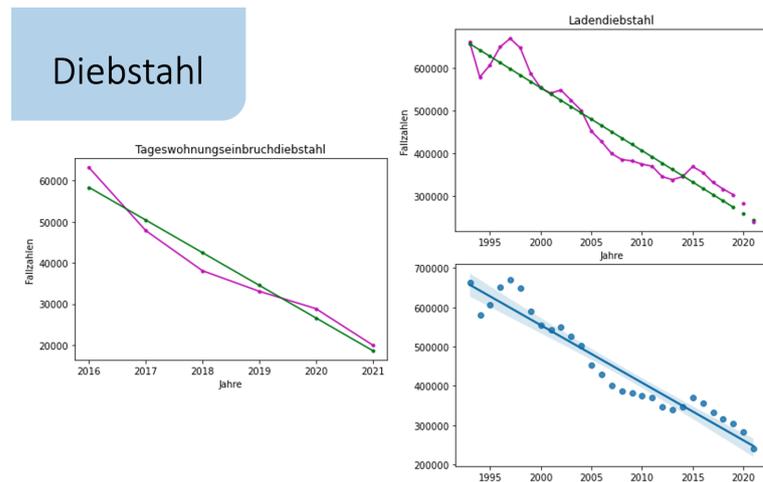


Abbildung 11: Grafische Darstellungen des Straftatbestands *Diebstahl*.

### Straftaten gegen das Infektionsschutzgesetz

In dieser Straftatkatgorie ist ein klarer Anstieg zu beobachten, denn solche Straftaten stehen in direktem Zusammenhang mit der Coronapandemie. Interessant ist aber auch der schon recht starke Rückgang 2021 (siehe Abbildung 12 links). Mithilfe von Abbildung 12 (rechts) erklärten die Schülerinnen das Problem des Overfitting. Grün ist eine lineare Trendlinie, blau eine parabolische und rot eine kubische. Die kubische Trendlinie trifft zwar alle Werte seit 2018 genau und hätte dementsprechend einen sehr guten  $R^2$ -Wert. Dennoch besitzt diese Regression aufgrund des Overfittings keine Aussagekraft bzw. Prognosefähigkeit mehr.

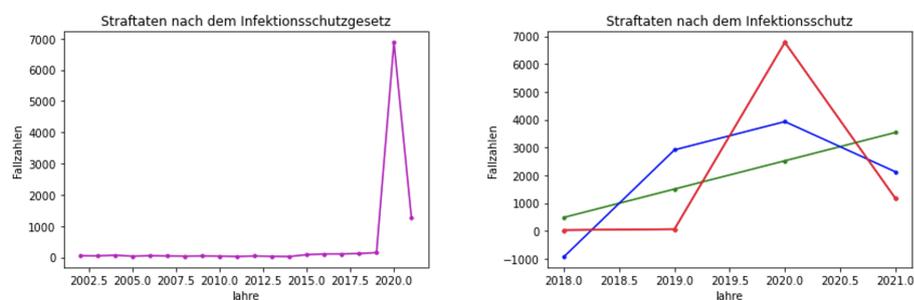


Abbildung 12: links: Grafische Darstellungen des Straftatbestands *Infektionsschutzgesetz*, rechts: Grafische Erklärung eines Overfitting.

### Weitere Analysen

Die Schülerinnen analysierten mit den gleichen Methoden viele weitere Straftatbestände: Sie stellten fest, dass die Vergehen im Bereich des Subventionsbetrugs, worunter auch die unrechtmäßige Beantragung von Coronahilfen fällt, sprunghaft angestiegen ist (siehe Abbildung 13). Straftaten im Bereich der Computerkriminalität sind signifikant gestiegen, was für eine Verlagerung der Straftaten in den digitalen Raum sprechen würde (siehe Abbildung 14). Auch die Anzahl der Verkehrsunfälle untersuchten die Schülerinnen und stellten

eine Korrelation mit den Lockdownzeiträumen fest. Während der Lockdowns ist die Anzahl der Verkehrsunfälle stark zurückgegangen.

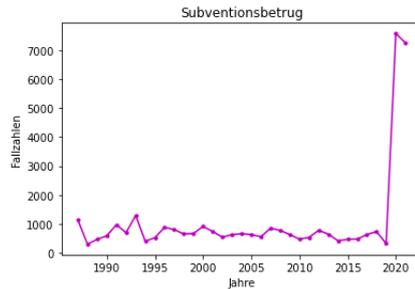


Abbildung 13: Grafische Darstellungen des Straftatbestands *Subventionsbetrug*.

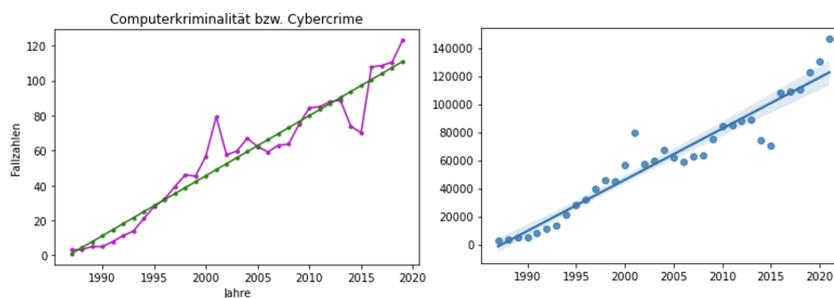


Abbildung 14: Grafische Darstellungen des Straftatbestands *Cybercrime* ohne und mit Konfidenzbänder.

### Fazit

Abschließend fassten die Schülerinnen ihre grundsätzlichen Beobachtungen zusammen: Im Allgemeinen haben Krisensituationen einen direkten Einfluss auf Straftatbestände. Wahrscheinlich sind die Beobachtungen während der Coronapandemie auf andere Pandemiesituationen übertragbar und können somit polizeilich genutzt werden. Bei der Analyse der Daten muss man jedoch sehr vorsichtig sein, weil Einzelfälle Statistiken verzerren können. Zum Beispiel kann ein Ermittlungserfolg einige Straftatbestände auf einmal erfassen und aufdecken und diese werden dann einem Jahr zugeordnet, obwohl die Straftaten schon Jahre zuvor ausgeübt wurden.

Auch können Gesetzesänderungen Daten verfälschen, weil zum Beispiel ein Straftatbestand ab der Änderung zu einer anderen Straftatkatgorie zugeordnet wird. Insgesamt muss man auch beachten, dass in der polizeilichen Kriminalstatistik immer nur erfasste Straftaten und somit nur das Hellfeld abgebildet ist. Das Dunkelfeld, also Straftaten, die gar nicht erfasst sind, werden auch nicht in der PKS abgebildet.

### 3.3 Kein Rocket Science?

#### 3.3.1 Problemstellung

Für manche Menschen reicht Urlaub am Strand nicht mehr. Auf der Suche nach immer exotischeren Reisezielen sind sie letztendlich zu dem Schluss gekommen, dass sie ins All wollen und dem Mond einen Besuch abstatten wollen. Visionäre wie Elon Musk möchten sich auf diesen neuen Markt positionieren und die benötigten Raketen zu Verfügung stellen. Geld und Zeit sind knapp, Ressourcen limitiert. Mehrere Prototypen bauen, um die Rakete zu optimieren, kommt also nicht infrage.

Ziel dieses Projekts ist, die Rakete und ihre Flugbahn mathematisch zu modellieren, die Gleichungen zu lösen, von Hand und/oder mithilfe eines Computers, und Dank des somit erarbeiteten Verständnisses, Elon Musk bei seinem Raketenbau zu beraten.

#### 3.3.2 Vorüberlegungen

Zu Beginn wurde in einer gemeinsamen Diskussion erarbeitet, welche Faktoren bei der Modellierung der Flugbahn einer Rakete nach Meinung der Schülerinnen zu berücksichtigen wären. Begonnen mit den Begriffen Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft wurde das Grundgerüst für die Differentialgleichung aufgestellt. Das Konzept einer Ableitung war jedem aus der Schule bekannt, sodass man sich schnell einigte, dass das Aufstellen des Kräftegleichgewichts den wichtigsten Schritt in der Modellierung darstellt. Nach einigem Überlegen waren dann der Luftwiderstand, die Antriebskraft und die Erdanziehung als Hauptakteur identifiziert worden.

Hinzu kam eine kleine Subtilität, die man nicht ignorieren durfte. Ein Großteil des Anfangsgewicht der Rakete besteht aus Treibstoff, der mit der Zeit verbrannt wird. Das heißt, dass die Rakete mit der Zeit leichter wird. Eine Gleichung, die diesen Effekt miteinbezieht, musste zum System hinzugefügt werden. Dies wird folgendermaßen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \\ \dot{V} &= -g - \frac{1}{(2m)\rho C_D A |V|^2 + u_e m_{fuel}} \\ \dot{m} &= -m_{fuel}, \end{aligned}$$

wobei  $x(t)$  die Höhe,  $V(t)$  die Geschwindigkeit und die Masse der Rakete beschreiben. Diese sind Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ . Die Modellparameter sind:  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\rho$  die Luftdichte,  $C_D$  der Luftwiderstandskoeffizienten,  $A$  die Raketenquerschnittsfläche,  $u_e$  die Schubgeschwindigkeit und  $m_{fuel}$  die Treibstoffverbrennungsrate.

Es wurde schnell klar, dass man das komplizierte Gleichungssystem nicht mehr von Hand lösen kann, wenn man alle Effekte im Modell behalten möchte. Deshalb entschied sich die Gruppe für einen numerischen Ansatz. Kennt man einen Anfangszustand und will den Zustand des Systems nach einem fixen Zeitschritt bestimmen, so kann man diesen annähern, indem man die aktuelle Ableitung des Systems durch einen Differenzenquotienten annähert. Mit diesem Hinweis erarbeitete die Gruppe ein einfaches Polygonzugverfahren zur numerischen Integration und konnte so einen einfachen Euler-Solver implementieren. Die diskretisierten Gleichungen lassen sich in kompakter Form schreiben:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f_n,$$

wo  $\Delta t$  den Zeitschritt beschreibt,  $y_n = [x(t_n), V(t_n), m(t_n)]^T$  und  $f_n$  die rechte Seite zum Zeitpunkt  $t = t_n$ .

### 3.3.3 Ergebnisse

Tatsächlich lieferte der Code auch erste Ergebnisse, nach denen die Rakete allerdings sofort abstürzte. Nach einigem Anpassen der Modellparameter, wie der Anfangsmasse und dem erzeugten Schub, hob die Rakete dann tatsächlich ab. Die Freude über den ersten gelungenen Start legte sich allerdings schnell, als klar wurde, dass man sich dem Mond, auch mit stark angepassten Parametern nicht ansatzweise nähern konnte.

In einer Krisensitzung stellten die Schülerinnen fest, dass die Modellierung das Abnehmen von Gravitation und Luftdichte mit zunehmender Höhe nicht berücksichtigte, und so den Weg ins All viel schwieriger, als es in Wirklichkeit der Fall ist, machte. Also entschied man, sich beide Größen durch die Funktionen  $g(x)$  und  $\rho(x)$  zu beschreiben. Diese sind in der wissenschaftlichen Literatur zu finden.

Infolge dieser kleinen Änderung ergab sich dann ein wesentlich besseres Bild, und mit genug Treibstoff an Bord konnte der Mond auf einer Höhe von  $x = 385\,000\,000$  Metern nach einer Dauer von  $t = 60\,000$  Sekunden tatsächlich erreicht werden! Die folgenden Abbildungen stellen die Ergebnisse grafisch dar:

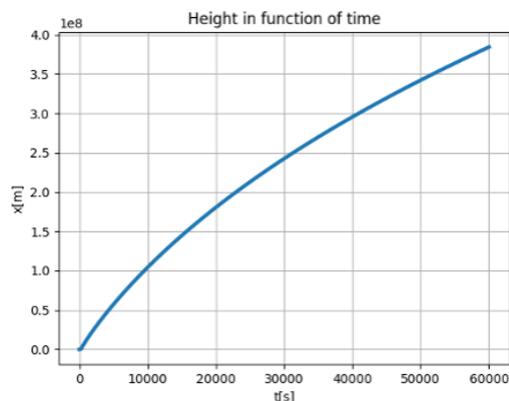


Abbildung 15: Höhe der Rakete in  $m$  nach Zeit in  $s$ .

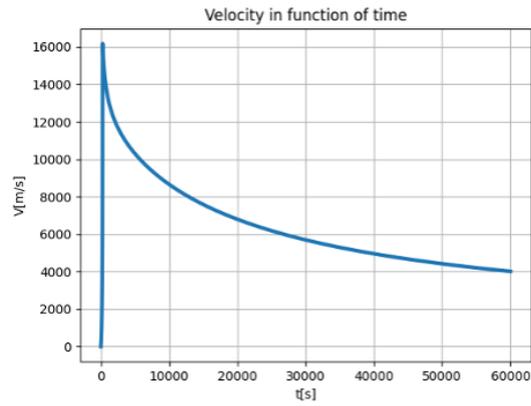


Abbildung 16: Geschwindigkeit der Rakete in  $m/s$  nach Zeit in  $s$ .

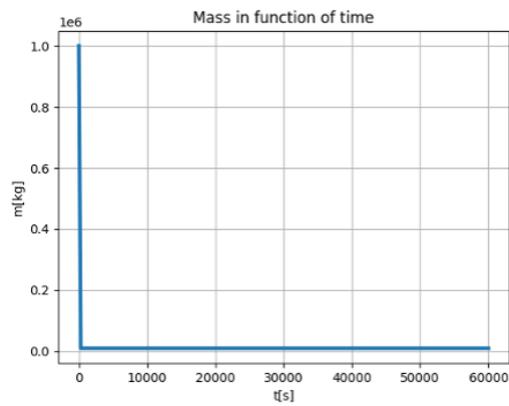


Abbildung 17: Masse der Rakete in  $kg$  nach Zeit in  $s$ .

## Literatur

- [Bec19] C. Beckschulte. *Mathematisches Modellieren mit Lösungsplan*. Springer Verlag, 2019.
- [KS13] G. Kaiser und P. Stender. „Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments“. In: *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (2013), S. 277–293.